Nature d'une intégrale de Bertrand

💡 Ces exercices vous font étudier la nature d'un cas particulier d'intégrale impropre. Vous devez notamment bien identifier où réside le problème (au voisinage de 0 ? 1 ? $+\infty$? ailleurs ?), et comment vous ramener à des fonctions de Riemann.

Remarque sur le corrigé. Des défauts de programmation rendent certains corrigés étranges, où je scinde une intégrale en $\frac{1}{2}$ ou 2 alors qu'il n'y a aucune raison à cela (en revanche c'est parfois délibéré, et dans ce cas il faut comprendre pourquoi je le fais). Ayez du recul sur ce que vous lisez.

Autre commentaire général sur le corrigé de ces exercices. Je détaille à chaque fois ce qui motive mon choix particulier de α (où α est l'exposant d'une certaine fonction de Riemann), en prenant d'abord un α quelconque et en regardant ce qu'il doit vérifier pour que je puisse conclure. C'est pour que vous puissiez vous en inspirer, si le bon choix ne vous est pas naturel. Mais dans une rédaction d'examen ou de concours : prenez directement un choix de α qui convient, au lieu de raisonner dans un cadre général en premier lieu.

Exercice 1. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$. → page 8

Exercice 2. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2} t^5 \ln(t)^2\,\mathrm{d}t$. → page 8

Exercice 3. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(t)^2}\mathrm{d}t$. → page 8

Exercice 4. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$. → page 8

Exercice 5. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{2} \frac{t^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$. → page 9

Exercice 6. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{|\ln(t)|^{\frac{5}{3}}}{t}\mathrm{d}t$. → page 9

Exercice 7. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^4\ln(t)^2}\mathrm{d}t$. → page 9

Exercice 8. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. → page 10

Exercice 9. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^6}{t^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$. → page 10

Exercice 10. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{|\ln(t)|^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$. → page 10

Exercice 11. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^3}\mathrm{d}t$. → page 11

Exercice 12. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{11}}{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}}\mathrm{d}t$. → page 11

Exercice 13. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{1}{7}}}\mathrm{d}t$. → page 11

Exercice 14. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{11}{19}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$. → page 12

Exercice 15. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}t$. → page 12

Exercice 16. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$. → page 13

Exercice 17. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{\frac{1}{27}}}{\ln(t)}\mathrm{d}t$. → page 13

Exercice 18. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}}{t^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$. → page 13

Exercice 19. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{11}}\mathrm{d}t$. → page 14

Exercice 20. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3\ln(t)^{\frac{5}{8}}}\mathrm{d}t$. → page 14

Exercice 21. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$. → page 15

Exercice 22. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^{\frac{2}{3}}}{|\ln(t)|^{\frac{2}{9}}}\mathrm{d}t$. → page 15

Exercice 23. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^2}\mathrm{d}t$. → page 15

Exercice 24. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$. → page 16

Exercice 25. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^2}{\ln(t)}\mathrm{d}t$. → page 16

Exercice 26. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^{\frac{2}{13}}}{\ln(t)^8}\mathrm{d}t$. → page 16

Exercice 27. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$. → page 17

Exercice 28. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{31}{3}}}\mathrm{d}t$. → page 17

Exercice 29. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{2} \frac{1}{t^{\frac{1}{5}} \ln(t)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$. → page 17

Exercice 30. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^3}\mathrm{d}t$. → page 18

Exercice 31. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{2} t^{\frac{1}{49}}\sqrt{|\ln(t)|}\mathrm{d}t$. → page 18

Exercice 32. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}t$. → page 18

Exercice 33. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{2} \frac{\ln(t)^3}{t}\mathrm{d}t$. → page 19

Exercice 34. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{2} \frac{1}{\ln(t)^3}\mathrm{d}t$. → page 19

Exercice 35. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^{17}|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}t$. → page 19

Exercice 36. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{\frac{1}{2}} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t$. → page 20

Exercice 37. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{33}\ln(t)^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}t$. → page 20

Exercice 38. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{2} t^{\frac{1}{6}}\ln(t)\,\mathrm{d}t$. → page 20

Exercice 39. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{2} t^2|\ln(t)|^{\frac{8}{3}}\mathrm{d}t$. → page 21

Exercice 40. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{|\ln(t)|^{\frac{1}{2762}}}{t^2}\mathrm{d}t$. → page 21

Exercice 41. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$. → page 21

Exercice 42. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}t$. → page 22

Exercice 43. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{1} t^{\frac{1}{12}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}t$. → page 22

Exercice 44. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{1} t|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}t$. → page 22

Exercice 45. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^2 t^{\frac{1}{59}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$. → page 22

Exercice 46. Étudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}}\mathrm{d}t$. → page 23

Exercice 47. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^{551}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$. → page 23

Exercice 48. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^{\frac{2}{5}}}{|\ln(t)|^{\frac{5}{11}}}\mathrm{d}t$. → page 23

Exercice 49. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$. → page 24

Exercice 50. Étudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^4}\mathrm{d}t$. → page 24

Exercice 51. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$. → page 24

Exercice 52. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^2 t^{\frac{1}{5}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$. → page 25

Exercice 53. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\ln(t)|^{\frac{9}{11}}}{t^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}t$. → page 25

Exercice 54. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$. → page 26

Exercice 55. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$. → page 26

Exercice 56. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t|\ln(t)|^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}t$. → page 26

Exercice 57. Étudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t$. → page 27

Exercice 58. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$. → page 27

Exercice 59. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$. → page 28

Exercice 60. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^7}{t^{\frac{27}{32}}}\mathrm{d}t$. → page 28

Exercice 61. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{37}{2}}} \mathrm{d}t$. → page 28

Exercice 62. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{2} \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\ln(t)} \mathrm{d}t$. → page 29

Exercice 63. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{7}{44}}} \mathrm{d}t$. → page 29

Exercice 64. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{9}}}{t^4} \mathrm{d}t$. → page 29

Exercice 65. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{12}}}{t^5} \mathrm{d}t$. → page 30

Exercice 66. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}t$. → page 30

Exercice 67. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^4} \mathrm{d}t$. → page 31

Exercice 68. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{15}} \mathrm{d}t$. → page 31

Exercice 69. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{2} \frac{1}{t^2 \ln(t)} \mathrm{d}t$. → page 31

Exercice 70. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}{t^2} \mathrm{d}t$. → page 31

Exercice 71. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t$. → page 32

Exercice 72. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)^{10}}{t^{\frac{1}{139}}} \mathrm{d}t$. → page 32

Exercice 73. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{1} t \ln(t)^3 \, \mathrm{d}t$. → page 33

Exercice 74. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{2} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}} \ln(t)^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}t$. → page 33

Exercice 75. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} \mathrm{d}t$. → page 33

Exercice 76. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^{\frac{1}{4}} \ln(t)^4} \mathrm{d}t$. → page 34

Exercice 77. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} \mathrm{d}t$. → page 34

Exercice 78. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$. → page 34

Exercice 79. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2} t\sqrt{|\ln(t)|} \mathrm{d}t$. → page 35

Exercice 80. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2} t^{\frac{1}{45}} \ln(t) \, \mathrm{d}t$. → page 35

Exercice 81. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^2} \mathrm{d}t$. → page 35

Exercice 82. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2} t^2 \ln(t)^{20} \, \mathrm{d}t$. → page 35

Exercice 83. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$. → page 36

Exercice 84. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}} \mathrm{d}t$. → page 36

Exercice 85. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^6} \mathrm{d}t$. → page 36

Exercice 86. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{13}} \mathrm{d}t$. → page 37

Exercice 87. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{2}{11}}} \mathrm{d}t$. → page 37

Exercice 88. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{157}{2}}} \mathrm{d}t$. → page 37

Exercice 89. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{10}{3}}} \mathrm{d}t$. → page 38

Exercice 90. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{1}{8}}} \mathrm{d}t$. → page 38

Exercice 91. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}t$. → page 39

Exercice 92. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} \mathrm{d}t$. → page 39

Exercice 93. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{4}} \ln(t)} \mathrm{d}t$. → page 39

Exercice 94. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{31}}}{t^3} \mathrm{d}t$. → page 40

Exercice 95. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$. → page 40

Exercice 96. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$. → page 40

Exercice 97. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. → page 41

Exercice 98. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$. → page 41

Exercice 99. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2\ln(t)^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$. → page 41

Exercice 100. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{1}{48}}}\mathrm{d}t$. → page 42

Corrigé 1. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 1

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)} = \frac{t^\alpha}{\ln(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha > 0$). Par conséquent, si $\alpha > 0$, alors pour tout t assez grand on a :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\ln(t)} \geqslant \frac{1}{t^\alpha} > 0.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{\ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$ pour tout t assez grand, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 2. L'application $t \mapsto t^5 \ln(t)^2$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. ← page 1

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0} t^5 \ln(t)^2 = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t^5 \ln(t)^2$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,2]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^5 \ln(t)^2\, \mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^5 \ln(t)^2\, \mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 3. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)^2}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. ← page 1

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\ln(t)^2} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)^2}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(t)^2}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(t)^2}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 4. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{t}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 1

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$-\frac{\ln(t)}{t} \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{t} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_0^{2} -\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ aussi.

Corrigé 5. L'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur $]1{,}2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 1

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\ln(t)}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{2} \frac{t^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{2} \frac{t^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 6. L'application $t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^{\frac{5}{3}}}{t}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 1

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)^{\frac{5}{3}}}{t} \geqslant \frac{\ln(2)^{\frac{5}{3}}}{t} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{5}{3}}}{t}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{5}{3}}}{t}\mathrm{d}t$ aussi.

Corrigé 7. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^4\ln(t)^2}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. ← page 1

Au voisinage de 0. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de 0 :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{t^4\ln(t)^2} = \frac{t^{\alpha-4}}{\ln(t)^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - 4 \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - 4 > 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 4 \leqslant 0$). Par conséquent, si $\alpha \leqslant 4$, alors pour tout t au voisinage de 0 on a :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{t^4\ln(t)^2} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{t^4\ln(t)^2} \geqslant \frac{1}{t^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha \leqslant 4$ et $\alpha \geqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{t^4 \ln(t)^2} \geqslant \dfrac{1}{t}$ pour tout t au voisinage de 0, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^4 \ln(t)^2} \mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 8. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 1

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geqslant \frac{\ln(2)}{\sqrt{t}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ aussi.

Corrigé 9. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^6}{t^{\frac{1}{4}}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 1

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)^6}{t^{\frac{1}{4}}} \geqslant \frac{\ln(2)^6}{t^{\frac{1}{4}}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{4}}}$ est d'exposant $\frac{1}{4} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^6}{t^{\frac{1}{4}}} \mathrm{d}t$ diverge également. Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^6}{t^{\frac{1}{4}}} \mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 10. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{|\ln(t)|^{\frac{1}{11}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 1

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{|\ln(t)|^{\frac{1}{11}}} \underset{t \to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{11}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{11}}}$ est d'exposant $\frac{1}{11} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{|\ln(t)|^{\frac{1}{11}}} \mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{|\ln(t)|^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 11. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^2}{t^3}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 1

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{\ln(t)^2}{t^3} = t^{\alpha-3} \cdot \ln(t)^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - 3 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - 3 < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 3 < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 3$, on a :

$$\frac{\ln(t)^2}{t^3} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < 3$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = 2$ (la moyenne de 1 et de 3). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(t)^2}{t^3} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ parce que $2 < 3$, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^3}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^3}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 12. L'application $t \mapsto \dfrac{t^{11}}{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}}$ est continue sur $]0,1[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 2

Au voisinage de 0. On a : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^{11}}{\ln(t)^{\frac{1}{7}}} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \dfrac{t^{11}}{\ln(t)^{\frac{1}{7}}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t^{11}}{\ln(t)^{\frac{1}{7}}}\mathrm{d}t$ converge.

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t^{11}}{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{7}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{7}}}$ est d'exposant $\frac{1}{7} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{11}}{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^{11}}{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 13. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^2}{t^{\frac{1}{7}}}$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. ← page 2

Au voisinage de 0. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de 0 :

$$t^\alpha \cdot \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{1}{7}}} = t^{\alpha-\frac{1}{7}} \cdot \ln(t)^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{1}{7} \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{1}{7} > 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{1}{7} > 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > \frac{1}{7}$, on a :

$$\frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{1}{7}}} = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{7}$ et $\alpha < 1$, par exemple : $\alpha = \frac{4}{7}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{1}{7}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{1}{7}}} = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{4}{7}}}\right)$ parce que $\frac{4}{7} > \frac{1}{7}$, or l'intégrale de Riemann $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{4}{7}}}$ est d'exposant $\frac{4}{7} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^2 \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{1}{7}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^2 \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{1}{7}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 14. L'application $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{11}{19}} \ln(t)^{\frac{1}{3}}}$ est continue sur $]1,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 2

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{\frac{11}{19}} \ln(t)^{\frac{1}{3}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{11}{19}} \ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{11}{19}} \ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 15. L'application $t \mapsto \frac{|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{4}}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 2

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{4}}} \geqslant \frac{\ln(2)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{4}}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{4}}}$ est d'exposant $\frac{3}{4} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 16. L'application $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 2

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t+1}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 17. L'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{1}{27}}}{\ln(t)}$ est continue sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{t^{\frac{1}{27}}}{\ln(t)}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 2

Au voisinage de 0. On a : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^{\frac{1}{27}}}{\ln(t)} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{1}{27}}}{\ln(t)}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,\frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{\frac{1}{27}}}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{\frac{1}{27}}}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 18. L'application $t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}}{t^{\frac{1}{4}}}$ est continue sur $]0,1]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 2

Au voisinage de 0. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de 0 :

$$t^\alpha \cdot \frac{(-\ln(t))^{\frac{1}{7}}}{t^{\frac{1}{4}}} = t^{\alpha-\frac{1}{4}} \cdot (-\ln(t))^{\frac{1}{7}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{1}{4} \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{1}{4} > 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{1}{4} > 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > \frac{1}{4}$, on a :

$$\frac{(-\ln(t))^{\frac{1}{7}}}{t^{\frac{1}{4}}} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{4}$ et $\alpha < 1$, par exemple : $\alpha = \frac{5}{8}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{1}{4}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{(-\ln(t))^{\frac{1}{7}}}{t^{\frac{1}{4}}} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{5}{8}}}\right)$ parce que $\frac{5}{8} > \frac{1}{4}$, or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{5}{8}}}$ est d'exposant $\frac{5}{8} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\frac{1}{7}}}{t^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^{\frac{1}{7}}}{t^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 19. L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^{11}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 2

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^{\alpha} f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t - 1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{t^{11}} \leqslant \frac{t}{t^{11}} = \frac{1}{t^{10}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{10}}$ est d'exposant $10 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{11}}\mathrm{d}t$ converge également, et donc $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{11}}\mathrm{d}t$ aussi.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t - 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{11}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 20. L'application $t \mapsto \frac{1}{t^3 \ln(t)^{\frac{5}{8}}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1 et $+\infty$. ← page 2

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^3 \ln(t)^{\frac{5}{8}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^{\frac{5}{8}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^{\frac{5}{8}}}$ est d'exposant $\frac{5}{8} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{t^3 \ln(t)^{\frac{5}{8}}}\mathrm{d}t$ converge également.

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a $\ln(t) \geqslant \ln(2)$, donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{t^3 \ln(t)^{\frac{5}{8}}} \leqslant \frac{1}{t^3 \ln(2)^{\frac{5}{8}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ est d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)^{\frac{5}{8}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)^{\frac{5}{8}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 21. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{\frac{5}{2}}}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 2

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 2$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \leqslant \frac{t}{t^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$ converge également.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 22. L'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{2}{3}}}{|\ln(t)|^{\frac{2}{9}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 2

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t^{\frac{2}{3}}}{|\ln(t)|^{\frac{2}{9}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{2}{9}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{2}{9}}}$ est d'exposant $\frac{2}{9} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{|\ln(t)|^{\frac{2}{9}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{|\ln(t)|^{\frac{2}{9}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 23. L'application $t \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(t)}}{t^2}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels ← page 2

d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 2$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^2} \leqslant \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge également.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 24. L'application $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -t\ln(t)$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 2

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t\ln(t)$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,1]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 25. L'application $t \mapsto \dfrac{t^2}{\ln(t)}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{t^2}{\ln(t)}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 2

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$-\frac{t^2}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{-t+1} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{-t+1}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{t^2}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 26. L'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{2}{13}}}{\ln(t)^8}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 2

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t^{\frac{2}{13}}}{\ln(t)^8} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^8} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^8}$ est d'exposant $8 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{\frac{2}{13}}}{\ln(t)^8}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 27. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{1}{t\ln(t)}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 2

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$-\frac{1}{t\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{-t+1} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{-t+1}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 28. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^2}{t^{\frac{31}{3}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 3

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{31}{3}}} \leqslant \frac{t^2}{t^{\frac{31}{3}}} = \frac{1}{t^{\frac{25}{3}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{25}{3}}}$ est d'exposant $\frac{25}{3} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{31}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également, et donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{31}{3}}}\mathrm{d}t$ aussi.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{31}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 29. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{5}}\ln(t)^{\frac{1}{4}}}$ est continue sur $]1,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 3

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{5}}\ln(t)^{\frac{1}{4}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{4}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^{\frac{1}{4}}}$ est d'exposant $\frac{1}{4} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{1}{5}}\ln(t)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{1}{5}}\ln(t)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 30. L'application $t \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(t)}}{t^3}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 3

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 2$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^3} \leqslant \frac{\sqrt{t}}{t^3} = \frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{5}{2}}}$ est d'exposant $\frac{5}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^3}\mathrm{d}t$ converge également.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t^3}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 31. L'application $t \mapsto t^{\frac{1}{49}}\sqrt{|\ln(t)|}$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 3

Au voisinage de 0. On a : $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{49}}\sqrt{\ln(t)} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t^{\frac{1}{49}}\sqrt{\ln(t)}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le segment $[0,2]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{49}}\sqrt{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{49}}\sqrt{|\ln(t)|}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 32. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1 et $+\infty$. ← page 3

Au voisinage de $+\infty$. On va étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}t$ en calculant la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}t$. Nous vous laissons en effet vérifier que procéder par comparaison à une intégrale de référence échoue. Ce calcul de limite est rendu possible par le fait que l'intégrande soit de la forme $\dfrac{u'}{u^k}$ avec $u : t \mapsto \ln(t)$ et $k = \frac{1}{9}$: nous savons donc en donner une primitive, et calculer l'intégrale ci-avant. On a plus précisément :

$$\forall x \geqslant 2, \quad \int_2^x \frac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}t = \left[\frac{9}{8}\ln(t)^{\frac{8}{9}}\right]_2^x = \frac{9}{8}\ln(x)^{\frac{8}{9}} - \frac{9}{8}\ln(2)^{\frac{8}{9}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Comme : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}t = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}t$ diverge.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 33. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^3}{t}$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)^3}{t}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 3

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$-\frac{\ln(t)^3}{t} \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^3}{t} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(t)^3}{t}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_0^2 -\frac{\ln(t)^3}{t}\mathrm{d}t$ aussi.

Corrigé 34. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)^3}$ est continue sur $]1,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 3

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{\ln(t)^3} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^3} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^3}$ est d'exposant $3 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln(t)^3}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 35. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{17}|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 3

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{17}|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{5}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{5}}}$ est d'exposant $\frac{1}{5} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^{17}|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^{17}|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 36. L'application $t \mapsto t\ln(t)^2$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. ← page 3

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t)^2 = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t\ln(t)^2$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 37. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{33}\ln(t)^{\frac{1}{5}}}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 3

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a $\ln(t) \geqslant \ln(2)$, donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{t^{33}\ln(t)^{\frac{1}{5}}} \leqslant \frac{1}{t^{33}\ln(2)^{\frac{1}{5}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{33}}$ est d'exposant $33 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{33}\ln(t)^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{33}\ln(t)^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 38. L'application $t \mapsto t^{\frac{1}{6}}\ln(t)$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -t^{\frac{1}{6}}\ln(t)$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 3

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{1}{6}}\ln(t) = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t^{\frac{1}{6}}\ln(t)$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,2]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{6}}\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{6}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 39. L'application $t \mapsto t^2 |\ln(t)|^{\frac{8}{3}}$ est continue sur $]0{,}2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 3

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0} t^2 \ln(t)^{\frac{8}{3}} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t^2 \ln(t)^{\frac{8}{3}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0{,}2]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^2 \ln(t)^{\frac{8}{3}}\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^2 |\ln(t)|^{\frac{8}{3}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 40. L'application $t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^{\frac{1}{2762}}}{t^2}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 3

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^{\frac{1}{2762}}}{t^2} \leqslant \frac{t^{\frac{1}{2762}}}{t^2} = \frac{1}{t^{\frac{5523}{2762}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{5523}{2762}}}$ est d'exposant $\frac{5523}{2762} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{2762}}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge également, et donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{2762}}}{t^2}\mathrm{d}t$ aussi.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{|\ln(t)|^{\frac{1}{2762}}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 41. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 3

Au voisinage de $+\infty$. On va étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ en calculant la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$. Nous vous laissons en effet vérifier que procéder par comparaison à une intégrale de référence échoue. Ce calcul de limite est rendu possible par le fait que l'intégrande soit de la forme $\dfrac{u'}{u^k}$ avec $u : t \mapsto \ln(t)$ et $k = \frac{1}{2}$: nous savons donc en donner une primitive, et calculer l'intégrale ci-avant. On a plus précisément :

$$\forall x \geqslant 2, \quad \int_2^x \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t = \Big[2\sqrt{\ln(t)}\Big]_2^x = 2\sqrt{\ln(x)} - 2\sqrt{\ln(2)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t=+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ diverge.

Corrigé 42. L'application $t\mapsto \dfrac{t}{|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}$ est continue sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t\leqslant 1$, on a : $|\ln(t)|=-\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t\leqslant 1$ il y a). ← page 3

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(t)^{\frac{2}{3}}}=0$. On peut donc prolonger l'application $t\mapsto\dfrac{t}{\ln(t)^{\frac{2}{3}}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,\frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t}{\ln(t)^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 43. L'application $t\mapsto t^{\frac{1}{12}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $]0,1]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t\leqslant 1$, on a : $|\ln(t)|=-\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t\leqslant 1$ il y a). ← page 3

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0}t^{\frac{1}{12}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}=0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t\mapsto t^{\frac{1}{12}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,1]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{1}{12}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{1}{12}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 44. L'application $t\mapsto t|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}$ est continue sur $]0,1]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t\leqslant 1$, on a : $|\ln(t)|=-\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t\leqslant 1$ il y a). ← page 3

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0}t\ln(t)^{\frac{1}{5}}=0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t\mapsto t\ln(t)^{\frac{1}{5}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,1]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)^{\frac{1}{5}}\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t|\ln(t)|^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 45. L'application $t\mapsto t^{\frac{1}{59}}\ln(t)$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t\leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t\mapsto -t^{\frac{1}{59}}\ln(t)$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 4

Au voisinage de 0. On a : $\lim\limits_{t\to 0}t^{\frac{1}{59}}\ln(t)=0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t\mapsto t^{\frac{1}{59}}\ln(t)$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,2]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{59}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{59}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 46. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1 et $+\infty$. ← page 4

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}} = \frac{t^\alpha}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha > 0$). Par conséquent, si $\alpha > 0$, alors pour tout t assez grand on a :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}} \geqslant 1, \text{ donc} : \frac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}} \geqslant \frac{1}{t^\alpha} > 0.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$ pour tout t assez grand, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}}\mathrm{d}t$ diverge également.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^{\frac{1}{21}}}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 47. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{551}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{551}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^{551}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^{551}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 48. L'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{2}{5}}}{|\ln(t)|^{\frac{5}{11}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t^{\frac{2}{5}}}{|\ln(t)|^{\frac{5}{11}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{5}{11}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{5}{11}}}$ est d'exposant $\frac{5}{11} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{\frac{2}{5}}}{|\ln(t)|^{\frac{5}{11}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{\frac{2}{5}}}{|\ln(t)|^{\frac{5}{11}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 49. L'application $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t+1}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 50. L'application $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)^4}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1 et $+\infty$. ← page 4

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{\ln(t)^4} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^4} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^4}$ est d'exposant $4 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{1}^{2} \frac{1}{\ln(t)^4}\mathrm{d}t$ diverge également.

Par conséquent l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^4}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 51. L'application $t \mapsto \frac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ est continue sur $]0,1[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{\ln(t)}} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{\ln(t)}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{\ln(t)}} \mathrm{d}t$ converge.

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{|\ln(t)|}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t+1}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{|\ln(t)|}} \mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{17}}}{\sqrt{|\ln(t)|}} \mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 52. L'application $t \mapsto t^{\frac{1}{5}} \ln(t)$ est continue sur $]0,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -t^{\frac{1}{5}} \ln(t)$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 4

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{5}} \ln(t) = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t^{\frac{1}{5}} \ln(t)$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,2]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{5}} \ln(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^{\frac{1}{5}} \ln(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 53. L'application $t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^{\frac{9}{11}}}{t^{\frac{2}{3}}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)^{\frac{9}{11}}}{t^{\frac{2}{3}}} \geqslant \frac{\ln(2)^{\frac{9}{11}}}{t^{\frac{2}{3}}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{2}{3}}}$ est d'exposant $\frac{2}{3} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{9}{11}}}{t^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{9}{11}}}{t^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\ln(t)|^{\frac{9}{11}}}{t^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 54. L'application $t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{11}}}$ est continue sur $]0,1]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 0. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de 0 :

$$t^\alpha \cdot \frac{(-\ln(t))^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{11}}} = t^{\alpha-\frac{1}{11}} \cdot (-\ln(t))^{\frac{1}{4}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{1}{11} \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{1}{11} > 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{1}{11} > 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > \frac{1}{11}$, on a :

$$\frac{(-\ln(t))^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{11}}} = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{11}$ et $\alpha < 1$, par exemple : $\alpha = \frac{6}{11}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{1}{11}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{(-\ln(t))^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{11}}} = \underset{t\to 0}{o}\left(\dfrac{1}{t^{\frac{6}{11}}}\right)$ parce que $\frac{6}{11} > \frac{1}{11}$, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{6}{11}}}$ est d'exposant $\frac{6}{11} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 55. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{t^2}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 4

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$-\frac{\ln(t)}{t^2} \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{t^2} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est d'exposant $2 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 56. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t|\ln(t)|^{\frac{1}{6}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t|\ln(t)|^{\frac{1}{6}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{6}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{6}}}$ est d'exposant $\frac{1}{6} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t|\ln(t)|^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t|\ln(t)|^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 57. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^3}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 4

Au voisinage de $+\infty$. On va étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t$ en calculant la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t$. Nous vous laissons en effet vérifier que procéder par comparaison à une intégrale de référence échoue. Ce calcul de limite est rendu possible par le fait que l'intégrande soit de la forme $\dfrac{u'}{u^k}$ avec $u : t \mapsto \ln(t)$ et $k = 3$: nous savons donc en donner une primitive, et calculer l'intégrale ci-avant. On a plus précisément :

$$\forall x \geqslant 2, \quad \int_{2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\ln(t)^2}\right]_2^x = -\frac{1}{2\ln(x)^2} - -\frac{1}{2\ln(2)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\ln(2)^2}.$$

Comme : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\ln(2)^2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 58. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 59. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ est continue sur $]0,1[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 4

Au voisinage de 0. On a : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\ln(t)}} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln(t)}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ converge.

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t+1}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 60. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^7}{t^{\frac{27}{32}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 4

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)^7}{t^{\frac{27}{32}}} \geqslant \frac{\ln(2)^7}{t^{\frac{27}{32}}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{27}{32}}}$ est d'exposant $\frac{27}{32} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^7}{t^{\frac{27}{32}}}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^7}{t^{\frac{27}{32}}}\mathrm{d}t$ aussi.

Corrigé 61. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^2}{t^{\frac{37}{2}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{37}{2}}} \leqslant \frac{t^2}{t^{\frac{37}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{33}{2}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{33}{2}}}$ est d'exposant $\frac{33}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{37}{2}}}\mathrm{d}t$ converge également, et donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{37}{2}}}\mathrm{d}t$ aussi.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{37}{2}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 62. L'application $t \mapsto \dfrac{t^{\frac{4}{3}}}{\ln(t)}$ est continue sur $]1,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 5

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 63. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{7}{44}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 5

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{7}{44}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{7}{44}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{7}{44}}}$ est d'exposant $\frac{7}{44} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{7}{44}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{7}{44}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 64. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^{\frac{1}{9}}}{t^4}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^{\frac{1}{9}}}{t^4} \leqslant \frac{t^{\frac{1}{9}}}{t^4} = \frac{1}{t^{\frac{35}{9}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{35}{9}}}$ est d'exposant $\frac{35}{9} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{9}}}{t^4}\mathrm{d}t$ converge également.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t - 1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{9}}}{t^4}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 65. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^{\frac{1}{12}}}{t^5}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 2$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^{\frac{1}{12}}}{t^5} \leqslant \frac{t^{\frac{1}{12}}}{t^5} = \frac{1}{t^{\frac{59}{12}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{59}{12}}}$ est d'exposant $\frac{59}{12} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{12}}}{t^5}\mathrm{d}t$ converge également.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t - 1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{12}}}{t^5}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 66. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{3}}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1 et $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{3}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a $\ln(t) \geqslant \ln(2)$, donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{1}{t^2 \ln(2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 67. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^2}{t^4}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$\frac{\ln(t)^2}{t^4} \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2}{t^4} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^4}$ est d'exposant $4 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)^2}{t^4}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)^2}{t^4}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^4}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 68. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^2}{t^{15}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$\frac{\ln(t)^2}{t^{15}} \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2}{t^{15}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^{15}}$ est d'exposant $15 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)^2}{t^{15}}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)^2}{t^{15}}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{15}}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 69. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\ln(t)}$ est continue sur $]1{,}2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 5

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^2\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2\ln(t)}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 70. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}{t^2} \leqslant \frac{t^{\frac{1}{4}}}{t^2} = \frac{1}{t^{\frac{7}{4}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{7}{4}}}$ est d'exposant $\frac{7}{4} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge également.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t - 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 71. L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\frac{\ln(t)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 5

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$-\frac{\ln(t)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}} \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(t)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\int_0^1 -\frac{\ln(t)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^{41}}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 72. L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)^{10}}{t^{\frac{1}{139}}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)^{10}}{t^{\frac{1}{139}}} \geqslant \frac{\ln(2)^{10}}{t^{\frac{1}{139}}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{139}}}$ est d'exposant $\frac{1}{139} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{10}}{t^{\frac{1}{139}}}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{10}}{t^{\frac{1}{139}}}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^{10}}{t^{\frac{1}{139}}}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 73. L'application $t \mapsto t\ln(t)^3$ est continue sur $]0,1]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -t\ln(t)^3$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 5

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} t\ln(t)^3 = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t\ln(t)^3$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,1]$: on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 t\ln(t)^3\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^1 t\ln(t)^3\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 74. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}}$ est continue sur $]1,2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 5

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}\ln(t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 75. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 5

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{\ln(t)}{t^2} = t^{\alpha-2}\cdot\ln(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha-2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha-2 < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 2 < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < 2$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{3}{2}$ (la moyenne de 1 et de 2). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(t)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ parce que $\frac{3}{2} < 2$, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 76. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{4}} \ln(t)^4}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. ← page 5

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{4}} \ln(t)^4} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^4} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^4}$ est d'exposant $4 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^{\frac{1}{4}} \ln(t)^4}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 77. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{t^2}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 5

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$-\frac{\ln(t)}{t^2} \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{t^2} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est d'exposant $2 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_{0}^{1} -\frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 78. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{t}$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 6

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, donc :

$$-\frac{\ln(t)}{t} \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{t} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\displaystyle\int_{0}^{1} -\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ aussi.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 79. L'application $t \mapsto t\sqrt{|\ln(t)|}$ est continue sur $]0{,}2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 6

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} t\sqrt{\ln(t)} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t\sqrt{\ln(t)}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0{,}2]$: on en déduit que l'intégrale $\int_0^2 t\sqrt{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^2 t\sqrt{|\ln(t)|}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 80. L'application $t \mapsto t^{\frac{1}{45}}\ln(t)$ est continue sur $]0{,}2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour $t \leqslant 1$, il peut être préférable d'étudier l'intégrabilité de l'application opposée $t \mapsto -t^{\frac{1}{45}}\ln(t)$, afin de se ramener à une intégrale de fonction positive et raisonner par comparaison (en effet le logarithme est négatif au voisinage de 0, donc son opposé est positif). ← page 6

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{45}}\ln(t) = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t^{\frac{1}{45}}\ln(t)$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0{,}2]$: on en déduit que l'intégrale $\int_0^2 t^{\frac{1}{45}}\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^2 t^{\frac{1}{45}}\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 81. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^2}{t^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{\ln(t)^2}{t^2} = t^{\alpha-2}\cdot\ln(t)^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha-2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha-2 < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 2 < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)^2}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < 2$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{3}{2}$ (la moyenne de 1 et de 2). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(t)^2}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ parce que $\frac{3}{2} < 2$, or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{\ln(t)^2}{t^2}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{\ln(t)^2}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 82. L'application $t \mapsto t^2\ln(t)^{20}$ est continue sur $]0{,}2]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. ← page 6

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} t^2 \ln(t)^{20} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto t^2 \ln(t)^{20}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0,2]$: on en déduit que l'intégrale $\int_0^2 t^2 \ln(t)^{20}\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^2 t^2 \ln(t)^{20}\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 83. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)}{t} \geqslant \frac{\ln(2)}{t} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge également, et donc $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ aussi.

Corrigé 84. L'application $t \mapsto \dfrac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}$ est continue sur $]0,1[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 6

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{\ln(t)^{\frac{1}{4}}} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge.

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{4}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{4}}}$ est d'exposant $\frac{1}{4} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 85. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)^6}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)^6} = \frac{t^\alpha}{\ln(t)^6} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha > 0$). Par conséquent, si $\alpha > 0$, alors pour tout t assez grand on a :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)^6} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\ln(t)^6} \geqslant \frac{1}{t^\alpha} > 0.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{\ln(t)^6} \geqslant \frac{1}{t} > 0$ pour tout t assez grand, or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^6}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 86. L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)^2}{t^{13}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^2}{t^{13}} \leqslant \frac{t^2}{t^{13}} = \frac{1}{t^{11}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{11}}$ est d'exposant $11 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{13}}\mathrm{d}t$ converge également, et donc $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{13}}\mathrm{d}t$ aussi.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t - 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{13}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 87. L'application $t \mapsto \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{2}{11}}}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 6

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(t)^{\frac{2}{11}}} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \frac{t}{\ln(t)^{\frac{2}{11}}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\ln(t)^{\frac{2}{11}}}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{2}{11}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 88. L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{157}{2}}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{157}{2}}} \leqslant \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{157}{2}}} = \frac{1}{t^{77}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{77}}$ est d'exposant $77 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{157}{2}}}\mathrm{d}t$ converge également.
Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{157}{2}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 89. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{\frac{10}{3}}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{t^{\frac{10}{3}}} \leqslant \frac{t}{t^{\frac{10}{3}}} = \frac{1}{t^{\frac{7}{3}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{7}{3}}}$ est d'exposant $\frac{7}{3} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{10}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.
Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{10}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 90. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{1}{8}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 6

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{1}{8}}} \underset{t \to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{8}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{8}}}$ est d'exposant $\frac{1}{8} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{1}{8}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{1}{8}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 91. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 6

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{2}{3}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{2}{3}}}$ est d'exposant $\frac{2}{3} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2|\ln(t)|^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 92. L'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{\ln(t)}{t^2} = t^{\alpha-2}\cdot\ln(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha-2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - 2 < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 2 < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < 2$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{3}{2}$ (la moyenne de 1 et de 2). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ parce que $\frac{3}{2} < 2$, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 93. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{4}}\ln(t)}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 1 et $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{1}{4}} \ln(t)} \mathrm{d}t$ diverge également.

Par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{4}} \ln(t)} \mathrm{d}t$ diverge aussi.

Corrigé 94. L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)^{\frac{1}{31}}}{t^3}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 6

Au voisinage de $+\infty$. Nous pourrions utiliser la méthode « $t^\alpha f(t)$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $t \geqslant 2$, on a : $\ln(t) \leqslant t-1 \leqslant t$ (pour une justification de cette inégalité, voir plus bas), de sorte que :

$$\forall t \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(t)^{\frac{1}{31}}}{t^3} \leqslant \frac{t^{\frac{1}{31}}}{t^3} = \frac{1}{t^{\frac{92}{31}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{92}{31}}}$ est d'exposant $\frac{92}{31} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{31}}}{t^3} \mathrm{d}t$ converge également.

Remarque. Pour justifier l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$, le plus direct est de démontrer que le logarithme est une fonction concave. Son graphe est alors en-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation : $y = t-1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^{\frac{1}{31}}}{t^3} \mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 95. L'application $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 7

Au voisinage de $+\infty$. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)} = \frac{t^\alpha}{\ln(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha > 0$). Par conséquent, si $\alpha > 0$, alors pour tout t assez grand on a :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{\ln(t)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\ln(t)} \geqslant \frac{1}{t^\alpha} > 0.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{\ln(t)} \geqslant \frac{1}{t} > 0$ pour tout t assez grand, or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 96. L'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}$ est continue sur $]0,1[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0 et 1. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 7

Au voisinage de 0. Pour tout $t \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, donc : $\frac{1}{(-\ln(t))^{\frac{1}{3}}} \geqslant \frac{1}{\left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}} > 0$, puis :

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}\,(-\ln(t))^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}\left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}\,(-\ln(t))^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(-t+1)^{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(-t+1)^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}|\ln(t)|^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 97. L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. ← page 7

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geqslant \frac{\ln(2)}{\sqrt{t}} \geqslant 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ diverge également.

Corrigé 98. L'application $t \mapsto \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 7

Au voisinage de 0. On a : $\lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t)^{\frac{1}{4}}} = 0$. On peut donc prolonger l'application $t \mapsto \frac{t}{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}$ par continuité en 0 (en posant que sa valeur y est nulle). Elle se prolonge donc en une application continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$: on en déduit que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\ln(t)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{|\ln(t)|^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 99. L'application $t \mapsto \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{11}}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. Étudions les problèmes éven- ← page 7

tuels d'intégrabilité au voisinage de 1 et $+\infty$.

Au voisinage de 1. Pour tout t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{11}}} \underset{t \to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{11}}} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^{\frac{1}{11}}}$ est d'exposant $\frac{1}{11} < 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$ converge également.

Au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 2$, on a $\ln(t) \geqslant \ln(2)$, donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{11}}} \leqslant \frac{1}{t^2 \ln(2)^{\frac{1}{11}}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$ converge également.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{11}}}\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé 100. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 |\ln(t)|^{\frac{1}{48}}}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Étudions les problèmes éventuels d'intégrabilité au voisinage de 0. Notez que pour tout $t \leqslant 1$, on a : $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Cela peut vous éviter de raisonner avec des valeurs absolues (et explique les éventuels signes moins dans le raisonnement ci-dessous, si raisonnement pour $t \leqslant 1$ il y a). ← page 7

Au voisinage de 0. Utilisons la méthode « $t^\alpha f(t)$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de 0 :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{t^2 (-\ln(t))^{\frac{1}{48}}} = \frac{t^{\alpha-2}}{(-\ln(t))^{\frac{1}{48}}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - 2 \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - 2 > 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 2 \leqslant 0$). Par conséquent, si $\alpha \leqslant 2$, alors pour tout t au voisinage de 0 on a :

$$t^\alpha \cdot \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{48}}} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{48}}} \geqslant \frac{1}{t^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha \leqslant 2$ et $\alpha \geqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{48}}} \geqslant \dfrac{1}{t}$ pour tout t au voisinage de 0, or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est d'exposant $1 \geqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{1}{48}}}\mathrm{d}t$ diverge également.