Formule de l'intégration par parties

💡 Situations diverses et variées où l'on a besoin de la formule de l'intégration par parties pour calculer des intégrales (cette banque ne comporte pas d'application de cette formule à la recherche d'équivalents asymptotiques ni à l'étude de la nature d'intégrales impropres).

Remarque sur le corrigé. Lorsque nous devons expliciter une suite d'intégrales vérifiant une relation de récurrence non triviale d'ordre 1, j'utilise ce que j'appelle (sans grande créativité...) la « méthode du télescopage ». Pour avoir plus de détails sur cette méthode, veuillez consulter mes documents de méthodologie (*Suites récurrentes*) sur ma page professionnelle.

Exercice 1. → page 12

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{(-x)} \mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = e^{(-1)} + nI_{n-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 2. → page 12

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(4x)\, \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(4x)\, \mathrm{d}x$.

Exercice 3. → page 13

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^n e^{(21 i x)} \mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = -\frac{1}{21} i \left(\frac{2}{3}\pi\right)^n + \frac{1}{21} i n I_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^n \cos(21x)\, \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 4. → page 14

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} x^n e^{(i x)} \mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\pi\right)^n \left(i\sqrt{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{2} i + \frac{1}{2}\right) \sqrt{2} \left(-\frac{1}{4}\pi\right)^n + i n I_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} x^n \sin(x)\, \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 5. Calculer : $\displaystyle\int_{-3}^{0} \left(17x^2 - 64x + 1\right) e^{(6x)} \mathrm{d}x$. → page 15

Exercice 6. → page 15

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\pi}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$ converge.

2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. → page 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x^4}\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x^4}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad I_n = \frac{1}{3}nI_{n-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 8. → page 16

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-4\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)^2 e^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-4\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)^2 e^{(-2x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 9. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} xe^{(-5x)}\sin(3x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 17

Exercice 10. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(-3x)}\sin(2x)\,\mathrm{d}x$. → page 18

Exercice 11. → page 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{0}^{1} x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad I_n = -\frac{1}{2}nI_{n-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 12. Calculer : $\displaystyle\int_{1}^{4} (x+1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$. → page 19

Exercice 13. → page 19

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{0}^{1} x^n e^{(3x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad I_n = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}nI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 14. → page 20

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\frac{9}{2}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x^n e^{(21ix)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad I_n = \frac{1}{21}i\left(\frac{1}{3}\pi\right)^n + \frac{1}{21}\left(-\frac{9}{2}\pi\right)^n + \frac{1}{21}inI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

3. En déduire une expression explicite de $\int_{-\frac{9}{2}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x^n \sin(21\,x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 15. → page 21

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16. Calculer : $\int_{-\frac{191}{4}\pi}^{\pi} (3\,x - 11)\cos(5\,x)\,\mathrm{d}x$. → page 21

Exercice 17. → page 21

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^5 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 x^5 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = -\frac{1}{6} n I_{n-1}.$$

3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 18. → page 22

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = i\,\pi^n + \left(-\frac{1}{2}\pi\right)^n + inI_{n-1}.$$

2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 19. Calculer l'intégrale : $\int_{-\pi}^{0} x\cos(91\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$. → page 23

Exercice 20. → page 23

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\cos(x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} x\cos(x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 21. → page 24

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+\infty} x^n e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-1}^{+\infty} x^n e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = \frac{1}{6}\,(-1)^n\,e^6 + \frac{1}{6} n I_{n-1}.$$

3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 22. → page 25

1. Montrer que l'intégrale $\int_{\frac{74}{3}\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{74}{3}\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 23. Calculer : $\int_{-3}^{0} \left(2\,x^2 - x\right)e^{(6\,x)}\mathrm{d}x$. → page 25

Exercice 24. Calculer : $\int_{-2}^{3} xe^{(2\,x)}\mathrm{d}x$. → page 26

Exercice 25. Calculer : $\int_{2}^{40} \left(x^2 + x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x$. → page 26

Exercice 26. Calculer : $\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \left(4\,x^2 - 7\,x - 21\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x$. → page 26

Exercice 27. Calculer l'intégrale : $\int_{-4\,\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$. → page 27

Exercice 28. → page 27

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-2\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-4\,x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-2\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-4\,x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 29. Calculer : $\int_{0}^{\pi} 2\,(x-1)\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x$. → page 28

Exercice 30. Calculer l'intégrale : $\int_{\pi}^{4\,\pi} xe^{(-x)}\sin(25\,x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 28

Exercice 31. → page 28

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_{2}^{+\infty} x^n e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{2}^{+\infty} x^n e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = 2^{n-1}e^{(-4)} + \frac{1}{2}nI_{n-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 32. Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$. → page 29

Exercice 33. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\,\pi} x\cos(x)^2\,e^{x}\mathrm{d}x$. → page 30

Exercice 34. → page 30

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)^n\left(\sqrt{3} - i\right) + i\,\pi^n + inI_{n-1}.$$

2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 35. → page 31

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 36. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{0} x\cos(3\,x)^2\,e^{(-10\,x)}\mathrm{d}x$. → page 32

Exercice 37. Calculer : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{0} \left(x^2+x\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x$. → page 32

Exercice 38. Calculer : $\displaystyle\int_{-\pi}^{29\,\pi} \left(x^2-4\,x-1\right)\cos(4\,x)\,\mathrm{d}x$. → page 32

Exercice 39. → page 33

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{5}{6}\,\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\,\pi\right)^n \left(i\sqrt{3}+1\right) + inI_{n-1}.$$

2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{0}^{\frac{5}{6}\,\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 40. Calculer : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{2}{3}\,\pi} (2\,x+3)\cos(x)\,\mathrm{d}x$. → page 34

Exercice 41. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{7}{2}\,\pi}^{0} x\cos(2\,x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$. → page 34

Exercice 42. Calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+2)e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$. → page 34

Exercice 43. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} x\cos(x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$. → page 35

Exercice 44. → page 35

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{0} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = \left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^n + inI_{n-1}.$$

2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{0} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 45. → page 36

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-2\,\pi}^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\sin(7\,x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-2\,\pi}^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\sin(7\,x)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 46. → page 37

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-3\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-3\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 47. → page 38

1. On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad I_n=-\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^n+inI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 48. Calculer : $\int_0^{17\,\pi}\left(x^2+x-2\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x$. → page 38

Exercice 49. → page 39

1. Montrer que l'intégrale $\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 50. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} x\cos(x)^2\,e^x\mathrm{d}x$. → page 39

Exercice 51. → page 40

1. Montrer que l'intégrale $\int_{7\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{7\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 52. Calculer : $\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi}\left(x^2-x-3\right)\cos(2\,x)\,\mathrm{d}x$. → page 41

Exercice 53. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(6\,x)}\sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 41

Exercice 54. → page 41

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 55. Calculer : $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \left(x^2 + x\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x$. → page 42

Exercice 56. → page 42

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad I_n = -\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\pi\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\pi\right)^n + inI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 57. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} x\cos(8\,x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$. → page 43

Exercice 58. → page 44

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 59. Calculer : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 3\,x\cos(41\,x)\,\mathrm{d}x$. → page 45

Exercice 60. Calculer : $\displaystyle\int_{2}^{48} 2\,(3\,x+1)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 45

Exercice 61. Calculer : $\displaystyle\int_{5}^{40} (10\,x+1)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 45

Exercice 62. → page 46

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x^n e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad I_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\pi\right)^n\left(\sqrt{3}+i\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\pi\right)^n\left(\sqrt{3}-i\right) + \frac{1}{2}inI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x^n \cos(2\,x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 63. → page 47

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{1}^{10} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad I_n = -10^n e^{(-10)} + e^{(-1)} + nI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 64. Calculer : $\displaystyle\int_{-9\pi}^{0} \left(x^2 + 3\,x - 1\right)\cos(7\,x)\,\mathrm{d}x$. → page 47

Exercice 65. → page 48

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{-\frac{13}{6}\pi}^{-\pi} x^n e^{(i\,x)} \mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad I_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{6}\pi\right)^n \left(i\sqrt{3}+1\right) + i\,(-\pi)^n + inI_{n-1}.$$

2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{-\frac{13}{6}\pi}^{-\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 66. Calculer : $\displaystyle\int_1^5 \left(x^2+3\,x\right)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 49

Exercice 67. Calculer : $\displaystyle\int_1^2 (5\,x+2)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 49

Exercice 68. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{11\,\pi} xe^{(-x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$. → page 49

Exercice 69. → page 50

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 70. Calculer : $\displaystyle\int_1^{160} \left(3\,x^2+x-3\right)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 50

Exercice 71. → page 51

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{-5}^{-2} x^n e^{(-9\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad I_n = \frac{1}{9}\,(-5)^n\,e^{45} - \frac{1}{9}\,(-2)^n\,e^{18} + \frac{1}{9}nI_{n-1}.$$

2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 72. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$. → page 51

Exercice 73. → page 52

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x^3}\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x^3}\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad I_n = \frac{1}{8}\,\ln(2)^n + \frac{1}{2}nI_{n-1}.$$

3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 74. Calculer : $\displaystyle\int_2^3 \left(x^2-3\,x+8\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x$. → page 53

Exercice 75. Calculer : $\displaystyle\int_4^7 x\ln(x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 53

Exercice 76. Calculer : $\displaystyle\int_{-7}^{-2} (x^2 - x)e^x \mathrm{d}x$. → page 53

Exercice 77. → page 54

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = -nI_{n-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 78. → page 55

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(x)\, e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(x)\, e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 79. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} xe^{(-x)} \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x$. → page 55

Exercice 80. Calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{1} (7\,x + 2)e^x \mathrm{d}x$. → page 56

Exercice 81. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(2\,x)^2\, e^{(3\,x)}\mathrm{d}x$. → page 56

Exercice 82. → page 56

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{3\,\pi} x^n e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = -\frac{1}{2}i\,(3\,\pi)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^n + \frac{1}{2}inI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{3\,\pi} x^n \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 83. → page 57

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^n \left(\sqrt{3} - i\right) + inI_{n-1}.$$
2. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 84. Calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{13} (9\,x + 2)e^{(7\,x)}\mathrm{d}x$. → page 58

Exercice 85. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{8}{3}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} xe^x \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x$. → page 58

Exercice 86. Calculer : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(3\,x^2 + 47\right)\sin\left(3\,x\right)\mathrm{d}x.$ → page 59

Exercice 87. Calculer : $\displaystyle\int_{1}^{17} 2\,x\ln\left(x\right)^2\mathrm{d}x.$ → page 59

Exercice 88. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} xe^{(5\,x)}\sin\left(x\right)\mathrm{d}x.$ → page 60

Exercice 89. Calculer : $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \left(x+2\right)\sin\left(x\right)\mathrm{d}x.$ → page 60

Exercice 90. Calculer : $\displaystyle\int_{2}^{5} \left(2\,x^2 - 3\right)e^{x}\mathrm{d}x.$ → page 60

Exercice 91. → page 61

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-7}^{+\infty} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{-7}^{+\infty} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad I_n = \left(-7\right)^n e^7 + nI_{n-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Exercice 92. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(13\,x)}\sin\left(x\right)\mathrm{d}x.$ → page 61

Exercice 93. Calculer : $\displaystyle\int_{1}^{3} \left(x-8\right)\ln\left(x\right)\mathrm{d}x.$ → page 62

Exercice 94. → page 62

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-6\,x)}\sin\left(x\right)^2\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-6\,x)}\sin\left(x\right)^2\mathrm{d}x.$

Exercice 95. → page 63

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2\cos\left(6\,x\right)e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2\cos\left(6\,x\right)e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 96. → page 63

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos\left(x\right)^2 e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos\left(x\right)^2 e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 97. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} xe^{(3\,x)}\sin\left(6\,x\right)^2\mathrm{d}x.$ → page 64

Exercice 98. Calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 4\right)e^{x}\mathrm{d}x.$ → page 65

Exercice 99. → page 65

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-5}^{+\infty} x^n e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-5}^{+\infty} x^n e^{(-x)} \mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_n = (-5)^n e^5 + n I_{n-1}.$$

3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 100. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}\pi}^{2\pi} x e^{(-4x)} \sin(x) \, \mathrm{d}x$. → page 66

Corrigé 1. ← page 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n e^{(-x)}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées :
$$x^2 \cdot x^n e^{(-x)} = x^2 x^n e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $x^n e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge parce que son exposant est $2 > 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge, d'où le résultat.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(-x)}$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} -nx^{n-1} e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_1^{+\infty} x^n e^{(-x)} \mathrm{d}x = \left[-x^n e^{(-x)}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -nx^{n-1} e^{(-x)} \mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = e^{(-1)} + nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - kI_{k-1} = e^{(-1)}.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{1}{k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{k!} I_k - \frac{1}{(k-1)!} I_{k-1} = \frac{e^{(-1)}}{k!}.$$
On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{1}{n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{(-1)}}{k!}\right),$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = n! \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{(-1)}}{k!}\right)\right].$$
Or : $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{(-x)} \mathrm{d}x = \left[-e^{(-x)}\right]_1^{+\infty} = e^{(-1)}$, donc finalement :
$$I_n = n! \left[e^{(-1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{(-1)}}{k!}\right)\right].$$

Corrigé 2. ← page 1

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-x)} \sin(4\,x)$ est continue sur $[\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$, on a :
$$\left|x^2 e^{(-x)} \sin(4\,x)\right| \leqslant x^2 e^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-x)} = x^4 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{((4i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{1}{68}i + \frac{1}{272}\right)\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} - \left(\frac{4}{289}i - \frac{15}{578}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} + \left(\frac{104}{4913}i + \frac{94}{4913}\right)e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{68}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} - \frac{4}{289}\pi e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} + \frac{104}{4913}e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}.$$

Corrigé 3. ← page 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(21i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^n e^{(21i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{21}i\,x^n e^{(21i\,x)}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \int_0^{\frac{2}{3}\pi} -\frac{1}{21}i\,nx^{n-1}e^{(21i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = -\frac{1}{21}i\left(\frac{2}{3}\pi\right)^n + \frac{1}{21}inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - \frac{1}{21}ikI_{k-1} = -\frac{1}{21}i\left(\frac{2}{3}\pi\right)^k.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{21^k}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{21^k}{i^k k!}I_k - \frac{21^{k-1}}{i^{k-1}(k-1)!}I_{k-1} = -\frac{i\cdot 21^k\left(\frac{2}{3}\pi\right)^k}{21\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{21^n}{i^n n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{i\cdot 21^k\left(\frac{2}{3}\pi\right)^k}{21\,i^k k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = \frac{i^n n!}{21^n}\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{i\cdot 21^k\left(\frac{2}{3}\pi\right)^k}{21\,i^k k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} e^{(21i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{21}i\,e^{(21i\,x)}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = 0$, donc finalement :

$$I_n = \frac{i^n n!}{21^n}\left[+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{i\cdot 21^k\left(\frac{2}{3}\pi\right)^k}{21\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie réelle dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{k i \pi}{2}}$, et : $1 = e^{14 i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_0^{\frac{2}{3}\,\pi} x^n \cos(21\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{21^n}\left[+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{21^k\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)^{k-1}\sin\left(-\frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right)}{k!}\right)\right].$$

Corrigé 4. ← page 1

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,x^n e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi} - \int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi} -i\,n x^{n-1} e^{(i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)^n\left(i\,\sqrt{3}-1\right) + \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^n + inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - ikI_{k-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}-1\right) + \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{1}{i^k k!}I_k - \frac{1}{i^{k-1}(k-1)!}I_{k-1} = -\frac{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}-1\right) - (i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}-1\right) - (i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n!\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}-1\right) - (i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi} e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi} = -\frac{1}{2}i\,\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, donc finalement :

$$I_n = i^n n!\left[-\frac{1}{2}i\,\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}-1\right) - (i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{k i\pi}{2}}$, et : $-\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}$, $\frac{1}{2}\,\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{1}{6}i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x = n!\left[\sin\left(-\frac{1}{3}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) - \sin\left(-\frac{3}{4}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)^{k-1}\sin\left(-\frac{1}{3}\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right) - \left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^{k-1}\,\mathrm{s}}{k!}\right.$$

Corrigé 5. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 1

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 17\,x^2 - 64\,x + 1$ est de classe C^1 sur $[-3{,}0]$, de dérivée $x \mapsto 34\,x - 64$, tandis que $x \mapsto e^{(6\,x)}$ est continue sur $[-3{,}0]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{6}\,e^{(6\,x)}$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0} \left(17\,x^2 - 64\,x + 1\right) e^{(6\,x)} \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{6}\left(17\,x^2 - 64\,x + 1\right) e^{(6\,x)}\right]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} \frac{1}{3}\,(17\,x - 32) e^{(6\,x)} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{173}{3}\,e^{(-18)} + \frac{1}{6} - \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{3}\,(17\,x - 32) e^{(6\,x)}\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 34\,x - 64$ est de classe C^1 sur $[-3{,}0]$, de dérivée $x \mapsto 34$, tandis que $x \mapsto \frac{1}{6}\,e^{(6\,x)}$ est continue sur $[-3{,}0]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{36}\,e^{(6\,x)}$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0} \frac{1}{3}\,(17\,x - 32) e^{(6\,x)} \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{18}\,(17\,x - 32) e^{(6\,x)}\right]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} \frac{17}{18}\,e^{(6\,x)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{83}{18}\,e^{(-18)} - \frac{16}{9} - \int_{-3}^{0} \left(\frac{17}{18}\,e^{(6\,x)}\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-3}^{0} \left(\frac{17}{18}\,e^{(6\,x)}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{17}{108}\,e^{(6\,x)}\right]_{-3}^{0} = -\frac{17}{108}\,e^{(-18)} + \frac{17}{108}$. On conclut :

$$\int_{-3}^{0} \left(17\,x^2 - 64\,x + 1\right) e^{(6\,x)} \mathrm{d}x = -\frac{6743}{108}\,e^{(-18)} + \frac{227}{108}.$$

Corrigé 6. ← page 1

1. L'application $x \mapsto xe^{(-x)} \sin(x)$ est continue sur $[\frac{2}{3}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{2}{3}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|xe^{(-x)} \sin(x)\right| \leqslant xe^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$xe^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{((i-1)\,x)} \mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\left(\frac{1}{6}i - \frac{1}{6}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{1}{6}i + \frac{1}{6}\right)\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4}\,\sqrt{3} e^{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4} i\,e^{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{6}\,\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4}\,e^{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 7. ← page 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^n}{x^4}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées :
$$x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{\ln(x)^n}{x^4} = \frac{\ln(x)^n}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $\dfrac{\ln(x)^n}{x^4} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{2}}}$ converge parce que son exposant est $\frac{5}{2} > 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x^4}\mathrm{d}x$ converge, d'où le résultat.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto \ln(x)^n$ et en intégrant $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\frac{n\ln(x)^{n-1}}{3\,x^4}\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x^4}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)^n}{3\,x^3}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{n\ln(x)^{n-1}}{3\,x^4}\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = \frac{1}{3}nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - \frac{1}{3}kI_{k-1} = 0.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{3^k}{k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{3^k}{k!}I_k - \frac{3^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1} = 0.$$
On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{3^n}{n!}I_n - I_0 = 0,$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = \frac{n!}{3^n}I_0.$$
Or : $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3\,x^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$, donc finalement :
$$I_n = \frac{n!}{3^n}\frac{1}{3}.$$

Corrigé 8. ← page 2

1. L'application $x \mapsto x^2\cos(2\,x)^2\,e^{(-2\,x)}$ est continue sur $[-4\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-4\,\pi, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant x^2\cos(2\,x)^2\,e^{(-2\,x)} \leqslant x^2e^{(-2\,x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-2\,x)} = x^4e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-4\,\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{-4\,\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\, x^2(\cos(4\,x)+1)e^{(-2\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{((4i-2)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{16}{5}i+\frac{8}{5}\right)\pi^2 e^{(8\,\pi)} - \left(\frac{8}{25}i-\frac{6}{25}\right)\pi e^{(8\,\pi)} - \left(\frac{1}{250}i+\frac{11}{500}\right)e^{(8\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \frac{8}{5}\,\pi^2 e^{(8\,\pi)} + \frac{6}{25}\,\pi e^{(8\,\pi)} - \frac{11}{500}\,e^{(8\,\pi)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = 8\,\pi^2 e^{(8\,\pi)} - 2\,\pi e^{(8\,\pi)} + \frac{1}{4}\,e^{(8\,\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{-4\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(2\,x)^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \frac{24}{5}\,\pi^2 e^{(8\,\pi)} - \frac{22}{25}\,\pi e^{(8\,\pi)} + \frac{57}{500}\,e^{(8\,\pi)}.$$

Corrigé 9. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0} xe^{(-5\,x)}\sin(3\,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\,x(\cos(6\,x)-1)e^{(-5\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0} x\cos(6\,x)\,e^{(-5\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0} xe^{(-5\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0} x\cos(6\,x)\,e^{(-5\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0} xe^{((6i-5)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0} x\cos(6\,x)\,e^{(-5\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{9}{61}i+\frac{15}{122}\right)\pi e^{\left(\frac{15}{2}\,\pi\right)} - \left(\frac{60}{3721}i-\frac{11}{3721}\right)e^{\left(\frac{15}{2}\,\pi\right)} - \frac{60}{3721}i+\frac{11}{3721}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{3}{2}\,\pi}^{0} x\cos(6\,x)\,e^{(-5\,x)}\mathrm{d}x = \frac{15}{122}\,\pi e^{\left(\frac{15}{2}\,\pi\right)} + \frac{11}{3721}\,e^{\left(\frac{15}{2}\,\pi\right)} + \frac{11}{3721}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} xe^{(-5\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} xe^{(-5\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{50}\,(15\,\pi-2)e^{\left(\frac{15}{2}\,\pi\right)} - \frac{1}{25}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} xe^{(-5\,x)}\sin{(3\,x)}^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{186050}\,(39345\,\pi-3446)e^{\left(\frac{15}{2}\,\pi\right)} - \frac{1998}{93025}.$$

Corrigé 10. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 2

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(-3\,x)}\sin{(2\,x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{((2i-3)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(-3\,x)}\sin{(2\,x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{52}i-\frac{1}{78}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \left(\frac{1}{78}i+\frac{1}{52}\right)\pi e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \left(\frac{5}{338}i-\frac{6}{169}\right)\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} + \left(\frac{6}{169}i+\frac{5}{338}\right)e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)}$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(-3\,x)}\sin{(2\,x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{52}\,\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \frac{1}{78}\,\pi e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \frac{5}{338}\,\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} + \frac{6}{169}\,e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \frac{12}{169}.$$

Corrigé 11. ← page 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x\ln{(x)}^n$ est continue sur $]0,1]$. Pour tout x au voisinage de 0, on a par croissances comparées :
$$\sqrt{x}\cdot x|\ln{(x)}|^n = x^{\frac{3}{2}}|\ln{(x)}|^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $x|\ln{(x)}|^n \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge parce que son exposant est $\frac{1}{2} < 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 x|\ln{(x)}|^n\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge, d'où le résultat.
2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto \ln{(x)}^n$ et en intégrant $x \mapsto x$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\int_0^1 \frac{1}{2}\,nx\ln{(x)}^{n-1}\,\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_0^1 x\ln{(x)}^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,x^2\ln{(x)}^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\,nx\ln{(x)}^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = -\frac{1}{2}nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k + \frac{1}{2}kI_{k-1} = 0.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{(-2)^k}{k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{(-2)^k}{k!}I_k - \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1} = 0.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{(-2)^n}{n!} I_n - I_0 = 0,$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = \frac{n!}{(-2)^n} I_0.$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\, x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, donc finalement :

$$I_n = \frac{n!}{(-2)^n} \frac{1}{2}.$$

Corrigé 12. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. ← page 2

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $[1{,}4]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto x+1$ est continue sur $[1{,}4]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}\, x^2 + x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^4 (x+1)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(x^2 + 2\,x\right)\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x^2+2\,x}{2\,x}\mathrm{d}x \\ &= 24\,\ln(2) - \int_1^4 \left(\frac{1}{2}\,x + 1\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{2}\,x+1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\,x^2 + x\right]_1^4 = \frac{27}{4}$. On conclut :

$$\int_1^4 (x+1)\ln(x)\,\mathrm{d}x = 24\,\ln(2) - \frac{27}{4}.$$

Corrigé 13. ← page 2

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(3\,x)}$. On en déduit :

$$\int_0^1 x^n e^{(3\,x)} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^n e^{(3\,x)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\,n x^{n-1} e^{(3\,x)} \mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{3}\,e^3 - \frac{1}{3} n I_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k + \frac{1}{3} k I_{k-1} = \frac{1}{3}\,e^3.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{(-3)^k}{k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{(-3)^k}{k!} I_k - \frac{(-3)^{k-1}}{(k-1)!} I_{k-1} = \frac{(-3)^k\, e^3}{3\,k!}.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{(-3)^n}{n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-3)^k\, e^3}{3\,k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = \frac{n!}{(-3)^n}\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-3)^k\,e^3}{3\,k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{(3\,x)}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,e^{(3\,x)}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,e^3 - \frac{1}{3}$, donc finalement :

$$I_n = \frac{n!}{(-3)^n}\left[\frac{1}{3}\,e^3 - \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-3)^k\,e^3}{3\,k!}\right)\right].$$

Corrigé 14. ← page 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(21i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{-\frac{9}{2}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} x^n e^{(21i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{21}i\,x^n e^{(21i\,x)}\right]_{-\frac{9}{2}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} - \int_{-\frac{9}{2}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} -\frac{1}{21}i\,nx^{n-1}e^{(21i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{21}i\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^n + \frac{1}{21}\left(-\frac{9}{2}\,\pi\right)^n + \frac{1}{21}inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - \frac{1}{21}ikI_{k-1} = \frac{1}{21}i\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k + \frac{1}{21}\left(-\frac{9}{2}\,\pi\right)^k.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{21^k}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{21^k}{i^k k!}I_k - \frac{21^{k-1}}{i^{k-1}\,(k-1)!}I_{k-1} = -\frac{21^k\left(-i\,\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k - \left(-\frac{9}{2}\,\pi\right)^k\right)}{21\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{21^n}{i^n n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{21^k\left(-i\,\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k - \left(-\frac{9}{2}\,\pi\right)^k\right)}{21\,i^k k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = \frac{i^n n!}{21^n}\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{21^k\left(-i\,\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k - \left(-\frac{9}{2}\,\pi\right)^k\right)}{21\,i^k k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{9}{2}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} e^{(21i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{21}i\,e^{(21i\,x)}\right]_{-\frac{9}{2}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} = \frac{1}{21}i + \frac{1}{21}$, donc finalement :

$$I_n = \frac{i^n n!}{21^n}\left[\frac{1}{21}i + \frac{1}{21} + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{21^k\left(-i\,\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k - \left(-\frac{9}{2}\,\pi\right)^k\right)}{21\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{ki\pi}{2}}$, et : $-i = e^{-\frac{189}{2}i\,\pi}$, $-1 = e^{7i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{-\frac{9}{2}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} x^n \sin(21\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{21^n}\left[\frac{1}{21}\,\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + \frac{1}{21}\,\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^{k-1}\cos\left(-\frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \left(-\frac{9}{2}\,\pi\right)^{k-1}\sin\left(-\frac{1}{2}\right.\right.}{k!}\right.\right.$$

Corrigé 15. ← page 3

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :
$$\left| x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x) \right| \leqslant x^2 e^{(-2\,x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-2\,x)} = x^4 e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2 e^{(-2\,x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment [0,1]. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} x^2 e^{((i-2)\,x)} \mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{22}{125} i + \frac{4}{125}\right),$$
et donc :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{125}.$$

Corrigé 16. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 3

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 3\,x - 11$ est de classe C^1 sur $[-\frac{191}{4}\,\pi, \pi]$, de dérivée $x \mapsto 3$, tandis que $x \mapsto \cos(5\,x)$ est continue sur $[-\frac{191}{4}\,\pi, \pi]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{5}\,\sin(5\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{191}{4}\,\pi}^{\pi} (3\,x - 11)\cos(5\,x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{5}\,(3\,x-11)\sin(5\,x)\right]_{-\frac{191}{4}\,\pi}^{\pi} - \int_{-\frac{191}{4}\,\pi}^{\pi} \frac{3}{5}\,\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{40}\,\sqrt{2}(573\,\pi + 44) - \int_{-\frac{191}{4}\,\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{5}\,\sin(5\,x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Or : $\displaystyle\int_{-\frac{191}{4}\,\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{5}\,\sin(5\,x)\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{25}\,\cos(5\,x)\right]_{-\frac{191}{4}\,\pi}^{\pi} = -\frac{3}{50}\,\sqrt{2} + \frac{3}{25}$. On conclut :
$$\int_{-\frac{191}{4}\,\pi}^{\pi} (3\,x - 11)\cos(5\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{40}\,\sqrt{2}(573\,\pi + 44) + \frac{3}{50}\,\sqrt{2} - \frac{3}{25}.$$

Corrigé 17. ← page 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^5 \ln(x)^n$ est continue sur]0,1]. Pour tout x au voisinage de 0, on a par croissances comparées :
$$\sqrt{x} \cdot x^5 |\ln(x)|^n = x^{\frac{11}{2}} |\ln(x)|^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $x^5 |\ln(x)|^n = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge parce que son exposant est $\frac{1}{2} < 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^5 |\ln(x)|^n \mathrm{d}x$ converge absolument donc converge, d'où le résultat.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto \ln(x)^n$ et en intégrant $x \mapsto x^5$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{6} n x^5 \ln(x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6} x^6 \ln(x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{6} n x^5 \ln(x)^{n-1} \,\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = -\frac{1}{6} n I_{n-1}.$$
D'où le résultat.

3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k + \frac{1}{6} k I_{k-1} = 0.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{(-6)^k}{k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{(-6)^k}{k!} I_k - \frac{(-6)^{k-1}}{(k-1)!} I_{k-1} = 0.$$
On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{(-6)^n}{n!} I_n - I_0 = 0,$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = \frac{n!}{(-6)^n} I_0.$$
Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6} x^6\right]_0^1 = \frac{1}{6}$, donc finalement :
$$I_n = \frac{n!}{(-6)^n} \frac{1}{6}.$$

Corrigé 18. ← page 3

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :
$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\pi} x^n e^{(i\,x)} \mathrm{d}x = \left[-i\, x^n e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\pi} - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\pi} -i\, n x^{n-1} e^{(i\,x)} \mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = i\,\pi^n + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^n + i n I_{n-1}.$$
D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - i k I_{k-1} = i\,\pi^k + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{i^k k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{i^k k!} I_k - \frac{1}{i^{k-1}(k-1)!} I_{k-1} = \frac{i\,\pi^k + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i\,\pi^k + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{i^k k!} \right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n! \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i\,\pi^k + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{i^k k!} \right) \right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\pi} e^{(i\,x)} \mathrm{d}x = \left[-i\,e^{(i\,x)} \right]_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\pi} = i + 1$, donc finalement :

$$I_n = i^n n! \left[i + 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i\,\pi^k + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{i^k k!} \right) \right].$$

3. Il suffit de prendre la partie réelle dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{k\,i\,\pi}{2}}$, et : $-i = e^{-\frac{1}{2}\,i\,\pi}$, $-1 = e^{i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x = n! \left[\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^{k-1} \cos\left(-\frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right) - \pi^{k-1} \sin\left(-\frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right)}{k!} \right) \right].$$

Corrigé 19. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 3

$$\int_{-\pi}^{0} x \cos(91\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{0} x e^{((91i-1)\,x)} \mathrm{d}x \right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\pi}^{0} x \cos(91\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{91}{8282} i + \frac{1}{8282} \right) \pi e^{\pi} - \left(\frac{91}{34295762} i - \frac{2070}{17147881} \right) e^{\pi} - \frac{91}{34295762} i + \frac{2070}{17147881} \right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} x \cos(91\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{8282}\,\pi e^{\pi} + \frac{2070}{17147881}\, e^{\pi} + \frac{2070}{17147881}.$$

Corrigé 20. ← page 3

1. L'application $x \mapsto x \cos(x)^2 e^{(-x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant x \cos(x)^2 e^{(-x)} \leqslant x e^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x e^{(-x)} = x^3 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[0,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x \cos(x)^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\cos(x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,x(\cos(2\,x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cos(2\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(2\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} xe^{((2i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(2\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{4}{25}i - \frac{3}{25}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(2\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{3}{25}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = 1$. On peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{11}{25}.$$

Corrigé 21. ← page 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n e^{(-6\,x)}$ est continue sur $[-1, +\infty[$. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées :

$$x^2 \cdot x^n e^{(-6\,x)} = x^2 x^n e^{(-6\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $x^n e^{(-6\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge parce que son exposant est $2 > 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} x^n e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x$ converge, d'où le résultat.

2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(-6\,x)}$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} -\frac{1}{6}\,nx^{n-1}e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :

$$\int_{-1}^{+\infty} x^n e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}\,x^n e^{(-6\,x)}\right]_{-1}^{+\infty} - \int_{-1}^{+\infty} -\frac{1}{6}\,nx^{n-1}e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{6}\,(-1)^n\, e^6 + \frac{1}{6}nI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - \frac{1}{6}kI_{k-1} = \frac{1}{6}\,(-1)^k\, e^6.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{6^k}{k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{6^k}{k!}I_k - \frac{6^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1} = \frac{6^k\,(-1)^k\, e^6}{6\,k!}.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{6^n}{n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6^k \, (-1)^k \, e^6}{6 \, k!} \right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = \frac{n!}{6^n} \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6^k \, (-1)^k \, e^6}{6 \, k!} \right) \right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{(-6\,x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6} \, e^{(-6\,x)} \right]_{-1}^{+\infty} = \frac{1}{6} \, e^6$, donc finalement :

$$I_n = \frac{n!}{6^n} \left[\frac{1}{6} \, e^6 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6^k \, (-1)^k \, e^6}{6 \, k!} \right) \right].$$

Corrigé 22. ← page 3

1. L'application $x \mapsto x \cos(x) \, e^{(-x)}$ est continue sur $[\frac{74}{3}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{74}{3}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left| x \cos(x) \, e^{(-x)} \right| \leqslant x e^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x e^{(-x)} = x^3 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{74}{3}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{74}{3}\,\pi}^{+\infty} x e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{74}{3}\,\pi}^{+\infty} x \cos(x) \, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{74}{3}\,\pi}^{+\infty} x \cos(x) \, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{74}{3}\,\pi}^{+\infty} x e^{((i-1)\,x)} \mathrm{d}x \right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{74}{3}\,\pi}^{+\infty} x \cos(x) \, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{37}{6} i - \frac{37}{6} \right) \sqrt{3} \pi e^{\left(-\frac{74}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{37}{6} i + \frac{37}{6} \right) \pi e^{\left(-\frac{74}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4} \sqrt{3} e^{\left(-\frac{74}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4} i \, e^{\left(-\frac{74}{3}\,\pi\right)} \right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{74}{3}\,\pi}^{+\infty} x \cos(x) \, e^{(-x)} \mathrm{d}x = -\frac{37}{6} \sqrt{3} \pi e^{\left(-\frac{74}{3}\,\pi\right)} - \frac{37}{6} \pi e^{\left(-\frac{74}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4} \sqrt{3} e^{\left(-\frac{74}{3}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 23. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 4

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 2\,x^2 - x$ est de classe C^1 sur $[-3{,}0]$, de dérivée $x \mapsto 4\,x - 1$, tandis que $x \mapsto e^{(6\,x)}$ est continue sur $[-3{,}0]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{6} \, e^{(6\,x)}$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{0} (2\,x^2 - x) e^{(6\,x)} \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{6} \, (2\,x^2 - x) e^{(6\,x)} \right]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} \frac{1}{6} \, (4\,x - 1) e^{(6\,x)} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{7}{2} \, e^{(-18)} - \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{6} \, (4\,x - 1) e^{(6\,x)} \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 4\,x-1$ est de classe C^1 sur $[-3{,}0]$, de dérivée $x \mapsto 4$, tandis que $x \mapsto \frac{1}{6}\,e^{(6\,x)}$ est continue sur $[-3{,}0]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{36}\,e^{(6\,x)}$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0} \frac{1}{6}\,(4\,x-1)e^{(6\,x)}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{36}\,(4\,x-1)e^{(6\,x)}\right]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} \frac{1}{9}\,e^{(6\,x)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{13}{36}\,e^{(-18)} - \frac{1}{36} - \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{9}\,e^{(6\,x)}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{9}\,e^{(6\,x)}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{54}\,e^{(6\,x)}\right]_{-3}^{0} = -\frac{1}{54}\,e^{(-18)} + \frac{1}{54}$. On conclut :

$$\int_{-3}^{0} (2\,x^2-x)e^{(6\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{419}{108}\,e^{(-18)} + \frac{5}{108}.$$

Corrigé 24. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 4

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x$ est de classe C^1 sur $[-2{,}3]$, de dérivée $x \mapsto 1$, tandis que $x \mapsto e^{(2\,x)}$ est continue sur $[-2{,}3]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} xe^{(2\,x)}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\,xe^{(2\,x)}\right]_{-2}^{3} - \int_{-2}^{3} \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}\,e^{6} + e^{(-4)} - \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\,e^{(2\,x)}\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{4}\,e^{6} - \frac{1}{4}\,e^{(-4)}$. On conclut :

$$\int_{-2}^{3} xe^{(2\,x)}\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\,e^{6} + \frac{5}{4}\,e^{(-4)}.$$

Corrigé 25. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. ← page 4

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $[2{,}40]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto x^2+x$ est continue sur $[2{,}40]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{2}^{40} \left(x^2+x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{6}\left(2\,x^3+3\,x^2\right)\ln(x)\right]_{2}^{40} - \int_{2}^{40} \frac{2\,x^3+3\,x^2}{6\,x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{66400}{3}\,\ln(40) - \frac{14}{3}\,\ln(2) - \int_{2}^{40} \left(\frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{2}^{40} \left(\frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{9}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2\right]_{2}^{40} = \frac{67583}{9}$. On conclut :

$$\int_{2}^{40} \left(x^2+x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{66400}{3}\,\ln(40) - \frac{14}{3}\,\ln(2) - \frac{67583}{9}.$$

Corrigé 26. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 4

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 4\,x^2-7\,x-21$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{1}{2}\,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 8\,x-7$, tandis que $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}\,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\cos(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(4x^2 - 7x - 21\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\left(4x^2-7x-21\right)\cos(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} -(8x-7)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -21 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(-(8x-7)\cos(x)\right)\mathrm{d}x.$$

On recommence : l'application $x \mapsto 8x - 7$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{1}{2}\pi]$, de dérivée $x \mapsto 8$, tandis que $x \mapsto -\cos(x)$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\sin(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} -(8x-7)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[-(8x-7)\sin(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} -8\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -4\pi + 7 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(-8\sin(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Or : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(-8\sin(x)\right)\mathrm{d}x = \left[8\cos(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = -8$. On conclut :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(4x^2 - 7x - 21\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 4\pi - 36.$$

Corrigé 27. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 4

$$\int_{-4\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-4\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} xe^{((i-1)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-4\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi e^{\left(\frac{1}{4}\pi\right)} - (2i+2)\,\pi e^{(4\pi)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{4}\pi\right)} + \frac{1}{2}i\,e^{(4\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-4\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi e^{(4\pi)} - \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{4}\pi\right)} + \frac{1}{2}e^{(4\pi)}.$$

Corrigé 28. ← page 4

1. L'application $x \mapsto x^2e^{(-4x)}\sin(3x)$ est continue sur $[-2\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-2\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x^2e^{(-4x)}\sin(3x)\right| \leqslant x^2e^{(-4x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-4x)} = x^4e^{(-4x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2e^{(-4x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2e^{(-4x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{(-4x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-2\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{(-4x)}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{(-4x)}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{((3i-4)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-4x)} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{12}{25}i + \frac{16}{25}\right)\pi^2 e^{(8\pi)} - \left(\frac{96}{625}i + \frac{28}{625}\right)\pi e^{(8\pi)} + \left(\frac{234}{15625}i - \frac{88}{15625}\right)e^{(8\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-4x)} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{12}{25}\pi^2 e^{(8\pi)} - \frac{96}{625}\pi e^{(8\pi)} + \frac{234}{15625}e^{(8\pi)}.$$

Corrigé 29. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 4

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 2x - 2$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto \sin(5x)$ est continue sur $[0,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{5}\cos(5x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} 2(x-1)\sin(5x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{5}(x-1)\cos(5x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{2}{5}\cos(5x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{5}\pi - \frac{4}{5} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{2}{5}\cos(5x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(-\frac{2}{5}\cos(5x)\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{25}\sin(5x)\right]_0^{\pi} = 0$. On conclut :

$$\int_0^{\pi} 2(x-1)\sin(5x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\pi - \frac{4}{5}.$$

Corrigé 30. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{4\pi} xe^{(-x)}\sin(25x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{4\pi}\left(-\frac{1}{2}x(\cos(50x)-1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4\pi} x\cos(50x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{4\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\pi}^{4\pi} x\cos(50x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\pi}^{4\pi} xe^{((50i-1)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\pi}^{4\pi} x\cos(50x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{50}{2501}i + \frac{1}{2501}\right)\pi e^{(-\pi)} - \left(\frac{200}{2501}i + \frac{4}{2501}\right)\pi e^{(-4\pi)} + \left(\frac{100}{6255001}i - \frac{2499}{6255001}\right)e^{(-\pi)} - \left(\frac{100}{6255001}\right.\right.$$

et donc :

$$\int_{\pi}^{4\pi} x\cos(50x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2501}\pi e^{(-\pi)} - \frac{4}{2501}\pi e^{(-4\pi)} - \frac{2499}{6255001}e^{(-\pi)} + \frac{2499}{6255001}e^{(-4\pi)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{\pi}^{4\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\pi}^{4\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = (\pi+1)e^{(-\pi)} - (4\pi+1)e^{(-4\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{\pi}^{4\pi} xe^{(-x)}\sin(25x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1250}{6255001}(2501\pi + 2503)e^{(-\pi)} - \frac{1250}{6255001}(10004\pi + 2503)e^{(-4\pi)}.$$

Corrigé 31. ← page 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n e^{(-2\,x)}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées :
$$x^2 \cdot x^n e^{(-2\,x)} = x^2 x^n e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $x^n e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge parce que son exposant est $2 > 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty} x^n e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge, d'où le résultat.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(-2\,x)}$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\int_2^{+\infty} -\frac{1}{2}\,nx^{n-1}e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_2^{+\infty} x^n e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\,x^n e^{(-2\,x)}\right]_2^{+\infty} - \int_2^{+\infty} -\frac{1}{2}\,nx^{n-1}e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = 2^{n-1}e^{(-4)} + \frac{1}{2}nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - \frac{1}{2}kI_{k-1} = 2^{k-1}e^{(-4)}.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{2^k}{k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{2^k}{k!}I_k - \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1} = \frac{2^{k-1}2^k e^{(-4)}}{k!}.$$
On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{2^n}{n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{k-1}2^k e^{(-4)}}{k!}\right),$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = \frac{n!}{2^n}\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{k-1}2^k e^{(-4)}}{k!}\right)\right].$$
Or : $I_0 = \int_2^{+\infty} e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{2}\,e^{(-4)}$, donc finalement :
$$I_n = \frac{n!}{2^n}\left[\frac{1}{2}\,e^{(-4)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{k-1}2^k e^{(-4)}}{k!}\right)\right].$$

Corrigé 32. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 4
$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{((i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{24}i + \frac{1}{24}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{24}i - \frac{1}{24}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)} + \frac{1}{4}i\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{1}{4}\,e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)}\right.$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{1}{24}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\pi\right)} - \frac{1}{4}\pi e^{\left(-\frac{1}{2}\pi\right)} + \frac{1}{4}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{6}\pi\right)}.$$

Corrigé 33. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} x\cos(x)^2 e^x\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi}\left(\frac{1}{2}x(\cos(2x)+1)e^x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} x\cos(2x)e^x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} xe^x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} x\cos(2x)e^x\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} xe^{((2i+1)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} x\cos(2x)e^x\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{30}i+\frac{1}{15}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \left(\frac{28}{5}i-\frac{14}{5}\right)\pi e^{(14\pi)} + \left(\frac{1}{15}i-\frac{1}{30}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \left(\frac{3}{50}i-\frac{2}{25}\right)\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} x\cos(2x)e^x\mathrm{d}x = -\frac{1}{15}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{14}{5}\pi e^{(14\pi)} - \frac{1}{30}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{2}{25}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{3}{25}e^{(14\pi)} + \frac{3}{50}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} xe^x\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} xe^x\mathrm{d}x = 14\pi e^{(14\pi)} + \frac{1}{3}(\pi+3)e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - e^{(14\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{14\pi} x\cos(x)^2 e^x\mathrm{d}x = \frac{42}{5}\pi e^{(14\pi)} - \frac{1}{300}\left(5\pi\left(2\sqrt{3}-9\right)+12\sqrt{3}-159\right)e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{11}{25}e^{(14\pi)}.$$

Corrigé 34. ← page 4

1. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x\mapsto x^n$ et en intégrant $x\mapsto e^{(ix)}$. On en déduit :

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} x^n e^{(ix)}\mathrm{d}x = \left[-i\,x^n e^{(ix)}\right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} - \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} -i\,nx^{n-1}e^{(ix)}\mathrm{d}x.$$

   C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)^n\left(\sqrt{3}-i\right) + i\,\pi^n + inI_{n-1}.$$

   D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - ikI_{k-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right) + i\,\pi^k.$$

   Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{1}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{1}{i^k k!}I_k - \frac{1}{i^{k-1}(k-1)!}I_{k-1} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right)+2i\,\pi^k}{2\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)^k \left(\sqrt{3} - i\right) + 2i\,\pi^k}{2\,i^k k!} \right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n! \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)^k \left(\sqrt{3} - i\right) + 2i\,\pi^k}{2\,i^k k!} \right) \right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\pi} e^{(i\,x)} \mathrm{d}x = \left[-i\, e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} i$, donc finalement :

$$I_n = i^n n! \left[\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} i + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)^k \left(\sqrt{3} - i\right) + 2i\,\pi^k}{2\,i^k k!} \right) \right].$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{k i \pi}{2}}$, et : $-\frac{1}{2} i\sqrt{3} - \frac{1}{2} = e^{-\frac{2}{3} i\,\pi}$, $-1 = e^{i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\pi} x^n \sin(x)\, \mathrm{d}x = n! \left[\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) - \sin\left(-\frac{7}{6}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi^{k-1} \cos\left(-\frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right) - \left(-\frac{2}{3}\,\pi\right)^{k-1} \sin\left(-\frac{7}{6}\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi k -\right.}{k!} \right.\right.$$

Corrigé 35. ← page 5

1. L'application $x \mapsto x\cos(x)\, e^{(-x)}$ est continue sur $[\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left| x\cos(x)\, e^{(-x)} \right| \leqslant x e^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x e^{(-x)} = x^3 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x e^{((i-1)\,x)} \mathrm{d}x \right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{8} i\sqrt{2}\pi e^{\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{4} i - \frac{1}{4}\right) \sqrt{2} e^{\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)} \right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} e^{\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 36. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 5

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} x\cos(3x)^2 e^{(-10x)}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \left(\frac{1}{2}x(\cos(6x)+1)e^{(-10x)}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} x\cos(6x)e^{(-10x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} xe^{(-10x)}\mathrm{d}x.$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} x\cos(6x)e^{(-10x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} xe^{((6i-10)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} x\cos(6x)e^{(-10x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{3}{136}i+\frac{5}{136}\right)\pi e^{(5\pi)} - \left(\frac{15}{2312}i+\frac{1}{289}\right)e^{(5\pi)} - \frac{15}{2312}i - \frac{1}{289}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} x\cos(6x)e^{(-10x)}\mathrm{d}x = \frac{5}{136}\pi e^{(5\pi)} - \frac{1}{289}e^{(5\pi)} - \frac{1}{289}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} xe^{(-10x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} xe^{(-10x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{20}\pi e^{(5\pi)} + \frac{1}{100}e^{(5\pi)} - \frac{1}{100}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} x\cos(3x)^2 e^{(-10x)}\mathrm{d}x = -\frac{9}{1360}\pi e^{(5\pi)} + \frac{189}{57800}e^{(5\pi)} - \frac{389}{57800}.$$

Corrigé 37. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 5

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2 + x$ est de classe C^1 sur $[-\frac{1}{3}\pi,0]$, de dérivée $x \mapsto 2x+1$, tandis que $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $[-\frac{1}{3}\pi,0]$, et une primitive est $x \mapsto -\cos(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} \left(x^2+x\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\left(x^2+x\right)\cos(x)\right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} - \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} -(2x+1)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{18}\pi^2 - \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} (-(2x+1)\cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

On recommence : l'application $x \mapsto 2x+1$ est de classe C^1 sur $[-\frac{1}{3}\pi,0]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto -\cos(x)$ est continue sur $[-\frac{1}{3}\pi,0]$, et une primitive est $x \mapsto -\sin(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} -(2x+1)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[-(2x+1)\sin(x)\right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} - \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} -2\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{3}(2\pi-3) - \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} (-2\sin(x))\,\mathrm{d}x.$$

Or : $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} (-2\sin(x))\,\mathrm{d}x = [2\cos(x)]_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} = 1$. On conclut :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} \left(x^2+x\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{18}\pi^2 - \frac{1}{6}\sqrt{3}(2\pi-3) + 1.$$

Corrigé 38. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 5

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2 - 4\,x - 1$ est de classe C^1 sur $[-\pi,29\,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2\,x - 4$, tandis que $x \mapsto \cos(4\,x)$ est continue sur $[-\pi,29\,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{4}\sin(4\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-\pi}^{29\,\pi} \left(x^2 - 4\,x - 1\right)\cos(4\,x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\left(x^2 - 4\,x - 1\right)\sin(4\,x)\right]_{-\pi}^{29\,\pi} - \int_{-\pi}^{29\,\pi} \frac{1}{2}(x-2)\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 0 - \int_{-\pi}^{29\,\pi} \left(\frac{1}{2}(x-2)\sin(4\,x)\right)\mathrm{d}x.$$

On recommence : l'application $x \mapsto 2\,x-4$ est de classe C^1 sur $[-\pi,29\,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto \frac{1}{4}\sin(4\,x)$ est continue sur $[-\pi,29\,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{16}\cos(4\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-\pi}^{29\,\pi} \frac{1}{2}(x-2)\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8}(x-2)\cos(4\,x)\right]_{-\pi}^{29\,\pi} - \int_{-\pi}^{29\,\pi} -\frac{1}{8}\cos(4\,x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{15}{4}\pi - \int_{-\pi}^{29\,\pi}\left(-\frac{1}{8}\cos(4\,x)\right)\mathrm{d}x.$$

Or : $\displaystyle\int_{-\pi}^{29\,\pi}\left(-\frac{1}{8}\cos(4\,x)\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{32}\sin(4\,x)\right]_{-\pi}^{29\,\pi} = 0$. On conclut :

$$\int_{-\pi}^{29\,\pi} \left(x^2 - 4\,x - 1\right)\cos(4\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{4}\pi.$$

Corrigé 39. ← page 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_0^{\frac{5}{6}\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,x^n e^{(i\,x)}\right]_0^{\frac{5}{6}\pi} - \int_0^{\frac{5}{6}\pi} -i\,nx^{n-1}e^{(i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi\right)^n\left(i\sqrt{3}+1\right) + inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - ikI_{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi\right)^k\left(i\sqrt{3}+1\right).$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{1}{i^k k!}I_k - \frac{1}{i^{k-1}(k-1)!}I_{k-1} = \frac{\left(\frac{5}{6}\pi\right)^k\left(i\sqrt{3}+1\right)}{2\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{5}{6}\pi\right)^k\left(i\sqrt{3}+1\right)}{2\,i^k k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n!\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{5}{6}\pi\right)^k\left(i\sqrt{3}+1\right)}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{5}{6}\pi} e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,e^{(i\,x)}\right]_0^{\frac{5}{6}\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3} + i + \frac{1}{2}$, donc finalement :

$$I_n = i^n n!\left[\frac{1}{2}i\sqrt{3} + i + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{5}{6}\pi\right)^k\left(i\sqrt{3}+1\right)}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{ki\pi}{2}}$, et : $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{5}{6}i\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_0^{\frac{5}{6}\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x = n!\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + \sin\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{5}{6}\pi\right)^{k-1}\sin\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi k + \frac{1}{2}\pi n\right)}{k!}\right)\right].$$

Corrigé 40. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 5

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 2x + 3$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{2}{3}\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $[0, \frac{2}{3}\pi]$, et une primitive est $x \mapsto \sin(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (2x+3)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [(2x+3)\sin(x)]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{3}(4\pi+9) - \int_0^{\frac{2}{3}\pi}(2\sin(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(2\sin(x))\,\mathrm{d}x = [-2\cos(x)]_0^{\frac{2}{3}\pi} = 3$. On conclut :

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(2x+3)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sqrt{3}(4\pi+9) - 3.$$

Corrigé 41. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} x\cos(2x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0}\left(\frac{1}{2}x(\cos(4x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} x\cos(4x)e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} x\cos(4x)e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} xe^{((4i-1)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} x\cos(4x)e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{14}{17}i + \frac{7}{34}\right)\pi e^{\left(\frac{7}{2}\pi\right)} + \left(\frac{8}{289}i - \frac{15}{289}\right)e^{\left(\frac{7}{2}\pi\right)} - \frac{8}{289}i + \frac{15}{289}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} x\cos(4x)e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{7}{34}\pi e^{\left(\frac{7}{2}\pi\right)} - \frac{15}{289}e^{\left(\frac{7}{2}\pi\right)} + \frac{15}{289}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(7\pi-2)e^{\left(\frac{7}{2}\pi\right)} - 1$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{0} x\cos(2x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{578}(1071\pi - 274)e^{\left(\frac{7}{2}\pi\right)} - \frac{137}{289}.$$

Corrigé 42. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 5

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x+2$ est de classe C^1 sur $[-1{,}0]$, de dérivée $x \mapsto 1$, tandis que $x \mapsto e^{(-7\,x)}$ est continue sur $[-1{,}0]$, et une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{7}\,e^{(-7\,x)}$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} (x+2)e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{7}\,(x+2)e^{(-7\,x)}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -\frac{1}{7}\,e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{7}\,e^{7} - \frac{2}{7} - \int_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{7}\,e^{(-7\,x)}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{7}\,e^{(-7\,x)}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{49}\,e^{(-7\,x)}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{49}\,e^{7} + \frac{1}{49}$. On conclut :

$$\int_{-1}^{0} (x+2)e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \frac{8}{49}\,e^{7} - \frac{15}{49}.$$

Corrigé 43. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} x\cos{(x)}^{2}\,e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} \left(\frac{1}{2}\,x(\cos{(2\,x)}+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} x\cos{(2\,x)}\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} x\cos{(2\,x)}\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} xe^{((2i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} x\cos{(2\,x)}\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{60}i - \frac{1}{30}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \left(\frac{277}{5}i + \frac{277}{10}\right)\pi e^{\left(\frac{277}{2}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{30}i + \frac{1}{60}\right)\pi e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{3}{50}i + \frac{2}{25}\right)\sqrt{3}e^{(}\right.$$

et donc :

$$\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} x\cos{(2\,x)}\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{30}\,\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{277}{10}\,\pi e^{\left(\frac{277}{2}\,\pi\right)} + \frac{1}{60}\,\pi e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{2}{25}\,\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{3}{25}\,e^{\left(\frac{277}{2}\,\pi\right)} + \frac{3}{50}\,e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,(277\,\pi-2)e^{\left(\frac{277}{2}\,\pi\right)} + \frac{1}{6}\,(\pi-6)e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{277}{2}\,\pi}^{-\frac{1}{6}\,\pi} x\cos{(x)}^{2}\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{25}\,(1385\,\pi-14)e^{\left(\frac{277}{2}\,\pi\right)} + \frac{1}{600}\left(5\,\pi\left(2\,\sqrt{3}+11\right) - 24\,\sqrt{3} - 282\right)e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 44. ← page 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{0} x^{n}e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,x^{n}e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{0} - \int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{0} -i\,nx^{n-1}e^{(i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^{n} + inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - ikI_{k-1} = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k .$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{1}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{i^k k!} I_k - \frac{1}{i^{k-1}\,(k-1)!} I_{k-1} = \frac{(i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n! \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} - i$, donc finalement :

$$I_n = i^n n! \left[\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} - i + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(i+1)\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{ki\pi}{2}}$, et : $-\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x = n!\left[-\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) - \sin\left(-\frac{3}{4}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right)^{k-1}\sin\left(-\frac{3}{4}\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right)}{k!}\right)\right].$$

Corrigé 45. ← page 5

1. L'application $x \mapsto xe^{(-4\,x)}\sin(7\,x)^2$ est continue sur $[-2\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-2\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|xe^{(-4\,x)}\sin(7\,x)^2\right| \leqslant |x|e^{(-4\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot |x|e^{(-4\,x)} = x^2|x|e^{(-4\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$|x|e^{(-4\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}|x|e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-2\,\pi}^{+\infty}|x|e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-2\,\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-2\,\pi}^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\sin(7\,x)^2\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-2\pi}^{+\infty} xe^{(-4x)}\sin(7x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-2\pi}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x(\cos(14x)-1)e^{(-4x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{+\infty} x\cos(14x)\,e^{(-4x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{+\infty} xe^{(-4x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x\cos(14x)\,e^{(-4x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-2\pi}^{+\infty} xe^{((14i-4)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x\cos(14x)\,e^{(-4x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{7}{53}i+\frac{2}{53}\right)\pi e^{(8\pi)} + \left(\frac{7}{2809}i-\frac{45}{11236}\right)e^{(8\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x\cos(14x)\,e^{(-4x)}\mathrm{d}x = -\frac{2}{53}\pi e^{(8\pi)} - \frac{45}{11236}e^{(8\pi)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} xe^{(-4x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} xe^{(-4x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi e^{(8\pi)} + \frac{1}{16}e^{(8\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} xe^{(-4x)}\sin(7x)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{49}{212}\pi e^{(8\pi)} + \frac{2989}{89888}e^{(8\pi)}.$$

Corrigé 46. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x^2e^{(-x)}\sin(x)$ est continue sur $[-3\pi,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-3\pi,+\infty[$, on a :

$$\left|x^2e^{(-x)}\sin(x)\right| \leqslant x^2e^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2\cdot x^2e^{(-x)} = x^4e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-3\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-3\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-3\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-3\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-3\pi}^{+\infty} x^2e^{((i-1)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-3\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}\right)\pi^2e^{(3\pi)} + 3i\pi e^{(3\pi)} - \left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)e^{(3\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-3\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}\pi^2e^{(3\pi)} + 3\pi e^{(3\pi)} - \frac{1}{2}e^{(3\pi)}.$$

Corrigé 47. ← page 6

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} x^n e^{(i\,x)} \mathrm{d}x = \left[-i\,x^n e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} - \int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} -i\,n x^{n-1} e^{(i\,x)} \mathrm{d}x.$$

   C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = -\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^n + i n I_{n-1}.$$

   D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - ikI_{k-1} = -\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k.$$

   Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{i^k k!} I_k - \frac{1}{i^{k-1}\,(k-1)!} I_{k-1} = -\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}.$$

   On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right),$$

   et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n!\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

   Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} e^{(i\,x)} \mathrm{d}x = \left[-i\,e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} = -\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} + 1$, donc finalement :

$$I_n = i^n n!\left[-\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} + 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{ki\pi}{2}}$, et : $-i = e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}$, $\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = e^{\frac{1}{4}i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x = n!\left[\sin\left(-\frac{1}{4}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^{k-1}\sin\left(-\frac{1}{4}\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^{k-1}\sin\left(-\frac{1}{2}\right.}{k!}\right.\right.$$

Corrigé 48. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : ← page 6 l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant.

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2 + x - 2$ est de classe C^1 sur $[0{,}17\,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2\,x + 1$, tandis que $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $[0{,}17\,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto \sin(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{17\,\pi} \left(x^2 + x - 2\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\left(x^2 + x - 2\right)\sin(x)\right]_0^{17\,\pi} - \int_0^{17\,\pi} (2\,x + 1)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \int_0^{17\,\pi} ((2\,x + 1)\sin(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 2\,x+1$ est de classe C^1 sur $[0{,}17\,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $[0{,}17\,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\cos(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{17\,\pi} (2\,x+1)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-(2\,x+1)\cos(x)]_0^{17\,\pi} - \int_0^{17\,\pi} -2\,\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 34\,\pi + 2 - \int_0^{17\,\pi} (-2\,\cos(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_0^{17\,\pi} (-2\,\cos(x))\,\mathrm{d}x = [-2\,\sin(x)]_0^{17\,\pi} = 0$. On conclut :

$$\int_0^{17\,\pi} \left(x^2+x-2\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x = -34\,\pi - 2.$$

Corrigé 49. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}$ est continue sur $[\frac{8}{3}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{8}{3}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}\right| \leqslant xe^{(-2\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-2\,x)} = x^3 e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$xe^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{((3i-2)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{8}{13}i + \frac{16}{39}\right)\pi e^{\left(-\frac{16}{3}\,\pi\right)} + \left(\frac{12}{169}i - \frac{5}{169}\right)e^{\left(-\frac{16}{3}\,\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{8}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(3\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \frac{16}{39}\,\pi e^{\left(-\frac{16}{3}\,\pi\right)} - \frac{5}{169}\,e^{\left(-\frac{16}{3}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 50. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} x\cos(x)^2\,e^x\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} \left(\frac{1}{2}\,x(\cos(2\,x)+1)e^x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} x\cos(2\,x)\,e^x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} xe^x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} x\cos(2\,x)\,e^x\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} xe^{((2i+1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(2x)\,e^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{30}i+\frac{1}{15}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}+\left(\frac{1}{15}i-\frac{1}{30}\right)\pi e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}-\left(\frac{1}{20}i+\frac{1}{10}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}+\left(\frac{3}{50}i-\frac{2}{25}\right)\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}-\left(\right.\right.$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(2x)\,e^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{15}\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}-\frac{1}{30}\pi e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}-\frac{1}{10}\pi e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}-\frac{2}{25}\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}-\frac{3}{50}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}-\frac{4}{25}e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} xe^{x}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} xe^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\pi-3)e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}+\frac{1}{4}(\pi+4)e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(x)^2\,e^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{300}\left(5\pi\left(2\sqrt{3}+9\right)-12\sqrt{3}-159\right)e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}+\frac{3}{200}(5\pi+28)e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}.$$

Corrigé 51. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x^2e^{(-x)}\sin(x)^2$ est continue sur $[7\pi,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [7\pi,+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant x^2e^{(-x)}\sin(x)^2 \leqslant x^2e^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-x)} = x^4e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{7\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{7\pi}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2(\cos(2x)-1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_{7\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{7\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{((2i-1)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{7\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{98}{5}i+\frac{49}{5}\right)\pi^2e^{(-7\pi)}+\left(\frac{56}{25}i-\frac{42}{25}\right)\pi e^{(-7\pi)}-\left(\frac{4}{125}i+\frac{22}{125}\right)e^{(-7\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{7\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{49}{5}\pi^2e^{(-7\pi)}-\frac{42}{25}\pi e^{(-7\pi)}-\frac{22}{125}e^{(-7\pi)}.$$

On calcule de même $\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\mathrm{d}x = \Gamma(3,7\pi)$. On peut conclure :

$$\int_{7\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{98}{5}\pi^2e^{(-7\pi)}+\frac{196}{25}\pi e^{(-7\pi)}+\frac{136}{125}e^{(-7\pi)}.$$

Corrigé 52. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 6

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2 - x - 3$ est de classe C^1 sur $[-\frac{2}{3}\,\pi, \frac{29}{4}\,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2\,x - 1$, tandis que $x \mapsto \cos(2\,x)$ est continue sur $[-\frac{2}{3}\,\pi, \frac{29}{4}\,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}\,\sin(2\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} \left(x^2 - x - 3\right) \cos(2\,x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - x - 3\right)\sin(2\,x)\right]_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} - \int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} \frac{1}{2}\,(2\,x - 1)\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{29}{8}\,\pi + \frac{841}{32}\,\pi^2 - \frac{1}{36}\,\sqrt{3}\left(6\,\pi + 4\,\pi^2 - 27\right) - \frac{3}{2} - \int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} \left(\frac{1}{2}\,(2\,x - 1)\sin(2\,x)\right)\mathrm{d}x.$$

On recommence : l'application $x \mapsto 2\,x - 1$ est de classe C^1 sur $[-\frac{2}{3}\,\pi, \frac{29}{4}\,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto \frac{1}{2}\,\sin(2\,x)$ est continue sur $[-\frac{2}{3}\,\pi, \frac{29}{4}\,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{4}\,\cos(2\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} \frac{1}{2}\,(2\,x - 1)\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}\,(2\,x - 1)\cos(2\,x)\right]_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} - \int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} -\frac{1}{2}\,\cos(2\,x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6}\,\pi + \frac{1}{8} - \int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} \left(-\frac{1}{2}\,\cos(2\,x)\right)\mathrm{d}x.$$

Or : $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} \left(-\frac{1}{2}\,\cos(2\,x)\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}\,\sin(2\,x)\right]_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} = \frac{1}{8}\,\sqrt{3} - \frac{1}{4}$. On conclut :

$$\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{29}{4}\,\pi} \left(x^2 - x - 3\right)\cos(2\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{91}{24}\,\pi + \frac{841}{32}\,\pi^2 - \frac{1}{36}\,\sqrt{3}\left(6\,\pi + 4\,\pi^2 - 27\right) + \frac{1}{8}\,\sqrt{3} - \frac{15}{8}.$$

Corrigé 53. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 6

$$\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(6\,x)}\sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} \left(-\frac{1}{2}\,x(\cos(4\,x) - 1)e^{(6\,x)}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(6\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(6\,x)}\mathrm{d}x.$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(6\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{((4i+6)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(6\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{52}i + \frac{1}{78}\right)\sqrt{3}\pi e^{(-2\,\pi)} - \left(\frac{1}{26}i - \frac{3}{52}\right)\pi e^{(3\,\pi)} + \left(\frac{1}{78}i - \frac{1}{52}\right)\pi e^{(-2\,\pi)} + \left(\frac{5}{1352}i + \frac{3}{338}\right)\sqrt{3}e^{(-2\,\pi$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(6\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{78}\,\sqrt{3}\pi e^{(-2\,\pi)} + \frac{3}{52}\,\pi e^{(3\,\pi)} - \frac{1}{52}\,\pi e^{(-2\,\pi)} + \frac{3}{338}\,\sqrt{3}e^{(-2\,\pi)} - \frac{5}{676}\,e^{(3\,\pi)} - \frac{5}{1352}\,e^{(-2\,\pi)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(6\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(6\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\,\pi e^{(3\,\pi)} + \frac{1}{36}\,(2\,\pi + 1)e^{(-2\,\pi)} - \frac{1}{36}\,e^{(3\,\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(6\,x)}\sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{78}\,\pi e^{(3\,\pi)} - \frac{1}{24336}\left(26\,\pi\left(6\,\sqrt{3} - 35\right) + 108\,\sqrt{3} - 383\right)e^{(-2\,\pi)} - \frac{31}{3042}\,e^{(3\,\pi)}.$$

Corrigé 54. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-x)} \sin(x)$ est continue sur $[-\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left| x^2 e^{(-x)} \sin(x) \right| \leqslant x^2 e^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-x)} = x^4 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\frac{1}{6}\,\pi, 1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{((i-1)\,x)} \mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{144} i + \frac{1}{144}\right) \sqrt{3}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{1}{144} i - \frac{1}{144}\right) \pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{1}{12} i \sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{1}{12} \pi e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{4} i -\right.\right.$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{144} \sqrt{3}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{1}{144} \pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{1}{12} \sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{1}{4} \sqrt{3} e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{1}{4} e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 55. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 7

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2 + x$ est de classe C^1 sur $[-\pi, 0]$, de dérivée $x \mapsto 2\,x + 1$, tandis que $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $[-\pi, 0]$, et une primitive est $x \mapsto \sin(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0} \left(x^2 + x\right) \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\left(x^2 + x\right) \sin(x)\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} (2\,x + 1) \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \int_{-\pi}^{0} ((2\,x + 1) \sin(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 2\,x + 1$ est de classe C^1 sur $[-\pi, 0]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $[-\pi, 0]$, et une primitive est $x \mapsto -\cos(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0} (2\,x + 1) \sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-(2\,x + 1) \cos(x)]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} -2\,\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\,\pi - 2 - \int_{-\pi}^{0} (-2\,\cos(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} (-2\,\cos(x))\,\mathrm{d}x = [-2\,\sin(x)]_{-\pi}^{0} = 0$. On conclut :

$$\int_{-\pi}^{0} \left(x^2 + x\right) \cos(x)\,\mathrm{d}x = -2\,\pi + 2.$$

Corrigé 56. ← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :
$$\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,x^n e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} - \int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} -i\,nx^{n-1}e^{(i\,x)}\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = -\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^n + inI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - ikI_{k-1} = -\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{i^k k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{1}{i^k k!}I_k - \frac{1}{i^{k-1}\,(k-1)!}I_{k-1} = -\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}.$$
On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{1}{i^n n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right),$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = i^n n!\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$
Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} = -\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} + 1$, donc finalement :
$$I_n = i^n n!\left[-\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} + 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(i-1)\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k - 2\,\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$
3. Il suffit de prendre la partie réelle dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{ki\pi}{2}}$, et : $-i = e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}$, $\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = e^{\frac{1}{4}i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a, après calculs :
$$\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{\frac{1}{4}\,\pi} x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x = n!\left[\cos\left(-\frac{1}{4}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^{k-1}\cos\left(-\frac{1}{4}\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + \left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)^{k-1}\cos\left(-\frac{1}{2}\right.}{k!}\right.\right.$$

Corrigé 57. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 7
$$\begin{aligned}\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{5}{4}\,\pi} x\cos(8\,x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{5}{4}\,\pi}\left(\frac{1}{2}\,x(\cos(16\,x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{5}{4}\,\pi} x\cos(16\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{5}{4}\,\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{5}{4}\,\pi} x\cos(16\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{2}{3}\,\pi}^{\frac{5}{4}\,\pi} xe^{((16i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} x\cos(16\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{771}i - \frac{16}{771}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} - \left(\frac{16}{771}i + \frac{1}{771}\right)\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} - \left(\frac{20}{257}i + \frac{5}{1028}\right)\pi e^{\left(-\frac{5}{4}\pi\right)} - \left(\frac{255}{132098}i + \right.\right.$$

et donc :

$$\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} x\cos(16\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{16}{771}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} - \frac{1}{771}\pi e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} - \frac{5}{1028}\pi e^{\left(-\frac{5}{4}\pi\right)} - \frac{16}{66049}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} + \frac{255}{132098}e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} + \frac{255}{66049}e^{\left(-\frac{5}{4}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2\,\pi+3)e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} - \frac{1}{4}(5\,\pi+4)e^{\left(-\frac{5}{4}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} x\cos(8\,x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{792588}\left(514\,\pi\left(16\sqrt{3}-513\right) + 96\sqrt{3} - 397059\right)e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} - \frac{1}{264196}(165765\,\pi + 131588)e^{\left(-\frac{5}{4}\pi\right)}.$$

Corrigé 58. ← page 7

1. L'application $x \mapsto xe^{(-x)}\sin(x)^2$ est continue sur $[\frac{3}{2}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{3}{2}\pi, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant xe^{(-x)}\sin(x)^2 \leqslant xe^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.
2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x(\cos(2\,x)-1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{((2i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{3}{5}i + \frac{3}{10}\right)\pi e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} - \left(\frac{4}{25}i - \frac{3}{25}\right)e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}\right),$$
et donc :
$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{3}{10}\pi e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} + \frac{3}{25}e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = \Gamma\left(2, \frac{3}{2}\pi\right)$. On peut conclure :

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{9}{10}\pi e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} + \frac{11}{25}e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

Corrigé 59. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 7

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 3x$ est de classe C^1 sur $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, de dérivée $x \mapsto 3$, tandis que $x \mapsto \cos(41x)$ est continue sur $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{41}\sin(41x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 3x\cos(41x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{3}{41}x\sin(41x)\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{3}{41}\sin(41x)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{3}{41}\sin(41x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{3}{41}\sin(41x)\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{1681}\cos(41x)\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = 0$. On conclut :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 3x\cos(41x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Corrigé 60. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. Une seule dérivation ne suffit pas, parce que la dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$: il reste un logarithme. ← page 7

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^1 sur [2,48], de dérivée $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$, tandis que $x \mapsto 6x+2$ est continue sur [2,48], et une primitive est $x \mapsto 3x^2+2x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_2^{48} 2(3x+1)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[\left(3x^2+2x\right)\ln(x)^2\right]_2^{48} - \int_2^{48}\frac{2\left(3x^2+2x\right)\ln(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= 7008\ln(48)^2 - 16\ln(2)^2 - \int_2^{48}(2(3x+2)\ln(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur [2,48], de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto 6x+4$ est continue sur [2,48], et une primitive est $x \mapsto 3x^2+4x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_2^{48} 2(3x+2)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\left(3x^2+4x\right)\ln(x)\right]_2^{48} - \int_2^{48}\frac{3x^2+4x}{x}\mathrm{d}x\\ &= 7104\ln(48) - 20\ln(2) - \int_2^{48}(3x+4)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_2^{48}(3x+4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2+4x\right]_2^{48} = 3634$. On conclut :

$$\int_2^{48} 2(3x+1)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = 7008\ln(48)^2 - 16\ln(2)^2 - 7104\ln(48) + 20\ln(2) + 3634.$$

Corrigé 61. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. Une seule dérivation ne suffit pas, parce que la dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$: il reste un logarithme. ← page 7

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^1 sur [5,40], de dérivée $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$, tandis que $x \mapsto 10\,x+1$ est continue sur [5,40], et une primitive est $x \mapsto 5\,x^2+x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_5^{40} (10\,x+1)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \Big[\big(5\,x^2+x\big)\ln(x)^2\Big]_5^{40} - \int_5^{40} \frac{2\left(5\,x^2+x\right)\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= 8040\,\ln(40)^2 - 130\,\ln(5)^2 - \int_5^{40} (2\,(5\,x+1)\ln(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur [5,40], de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto 10\,x+2$ est continue sur [5,40], et une primitive est $x \mapsto 5\,x^2+2\,x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_5^{40} 2\,(5\,x+1)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \big[\big(5\,x^2+2\,x\big)\ln(x)\big]_5^{40} - \int_5^{40} \frac{5\,x^2+2\,x}{x}\mathrm{d}x \\ &= 8080\,\ln(40) - 135\,\ln(5) - \int_5^{40} (5\,x+2)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_5^{40} (5\,x+2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{5}{2}\,x^2+2\,x\right]_5^{40} = \frac{8015}{2}$. On conclut :

$$\int_5^{40} (10\,x+1)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = 8040\,\ln(40)^2 - 130\,\ln(5)^2 - 8080\,\ln(40) + 135\,\ln(5) + \frac{8015}{2}.$$

Corrigé 62. ← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(2i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x^n e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}i\,x^n e^{(2i\,x)}\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} - \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} -\frac{1}{2}i\,nx^{n-1}e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\pi\right)^n\left(\sqrt{3}+i\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\pi\right)^n\left(\sqrt{3}-i\right) + \frac{1}{2}inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - \frac{1}{2}ikI_{k-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}+i\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right).$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{2^k}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{2^k}{i^k k!}I_k - \frac{2^{k-1}}{i^{k-1}\,(k-1)!}I_{k-1} = \frac{\left(\left(\frac{1}{3}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}+i\right) - \left(\frac{1}{6}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right)\right)2^k}{4\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{2^n}{i^n n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}+i\right) - \left(\frac{1}{6}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right)\right)2^k}{4\,i^k k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = \frac{i^n n!}{2^n}\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}+i\right) - \left(\frac{1}{6}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right)\right)2^k}{4\,i^k k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}i\,e^{(2i\,x)}\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} = \frac{1}{2}i$, donc finalement :

$$I_n = \frac{i^n n!}{2^n}\left[\frac{1}{2}i + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}+i\right) - \left(\frac{1}{6}\pi\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right)\right)2^k}{4\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie réelle dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{k i \pi}{2}}$, et : $\frac{1}{2} i\sqrt{3} + \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{3} i\,\pi}$, $\frac{1}{2} i\sqrt{3} - \frac{1}{2} = e^{\frac{2}{3} i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x^n \cos(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2^n}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi n\right) - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\pi\right)^{k-1}\cos\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi k + \frac{1}{2}\pi n\right) - \left(\frac{1}{6}\pi\right)\right.}{k!}\right.\right.$$

Corrigé 63. ← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(-x)}$. On en déduit :

$$\int_1^{10} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x = \left[-x^n e^{(-x)}\right]_1^{10} - \int_1^{10} -n x^{n-1} e^{(-x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = -10^n e^{(-10)} + e^{(-1)} + n I_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - k I_{k-1} = -10^k e^{(-10)} + e^{(-1)}.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{k!} I_k - \frac{1}{(k-1)!} I_{k-1} = -\frac{10^k e^{(-10)} - e^{(-1)}}{k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{10^k e^{(-10)} - e^{(-1)}}{k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = n!\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{10^k e^{(-10)} - e^{(-1)}}{k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_1^{10} e^{(-x)}\mathrm{d}x = \left[-e^{(-x)}\right]_1^{10} = e^{(-1)} - e^{(-10)}$, donc finalement :

$$I_n = n!\left[e^{(-1)} - e^{(-10)} + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{10^k e^{(-10)} - e^{(-1)}}{k!}\right)\right].$$

Corrigé 64. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 7

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2 + 3\,x - 1$ est de classe C^1 sur $[-9\,\pi,0]$, de dérivée $x \mapsto 2\,x + 3$, tandis que $x \mapsto \cos(7\,x)$ est continue sur $[-9\,\pi,0]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{7}\sin(7\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-9\,\pi}^{0} \left(x^2 + 3\,x - 1\right)\cos(7\,x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{7}\left(x^2 + 3\,x - 1\right)\sin(7\,x)\right]_{-9\,\pi}^{0} - \int_{-9\,\pi}^{0} \frac{1}{7}(2\,x + 3)\sin(7\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \int_{-9\,\pi}^{0}\left(\frac{1}{7}(2\,x + 3)\sin(7\,x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 2\,x+3$ est de classe C^1 sur $[-9\,\pi,0]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto \frac{1}{7}\sin(7\,x)$ est continue sur $[-9\,\pi,0]$, et une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{49}\cos(7\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-9\,\pi}^{0} \frac{1}{7}\,(2\,x+3)\sin(7\,x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{49}\,(2\,x+3)\cos(7\,x)\right]_{-9\,\pi}^{0} - \int_{-9\,\pi}^{0} -\frac{2}{49}\cos(7\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{18}{49}\,\pi - \frac{6}{49} - \int_{-9\,\pi}^{0}\left(-\frac{2}{49}\cos(7\,x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-9\,\pi}^{0}\left(-\frac{2}{49}\cos(7\,x)\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{343}\sin(7\,x)\right]_{-9\,\pi}^{0} = 0$. On conclut :

$$\int_{-9\,\pi}^{0}\left(x^2+3\,x-1\right)\cos(7\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{18}{49}\,\pi + \frac{6}{49}.$$

Corrigé 65. ← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{-\frac{13}{6}\,\pi}^{-\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,x^n e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{13}{6}\,\pi}^{-\pi} - \int_{-\frac{13}{6}\,\pi}^{-\pi} -i\,nx^{n-1}e^{(i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{6}\,\pi\right)^n\left(i\,\sqrt{3}+1\right) + i\,(-\pi)^n + inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - ikI_{k-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}+1\right) + i\,(-\pi)^k.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{i^k k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{1}{i^k k!}I_k - \frac{1}{i^{k-1}\,(k-1)!}I_{k-1} = \frac{\left(-\frac{13}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}+1\right)+2i\,(-\pi)^k}{2\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(-\frac{13}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}+1\right)+2i\,(-\pi)^k}{2\,i^k k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n!\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(-\frac{13}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}+1\right)+2i\,(-\pi)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{13}{6}\,\pi}^{-\pi} e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,e^{(i\,x)}\right]_{-\frac{13}{6}\,\pi}^{-\pi} = \frac{1}{2}i\,\sqrt{3}+i+\frac{1}{2}$, donc finalement :

$$I_n = i^n n!\left[\frac{1}{2}i\,\sqrt{3}+i+\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(-\frac{13}{6}\,\pi\right)^k\left(i\,\sqrt{3}+1\right)+2i\,(-\pi)^k}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie réelle dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{ki\pi}{2}}$, et : $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i = e^{-\frac{13}{6}i\,\pi}$, $-1 = e^{-i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_{-\frac{13}{6}\,\pi}^{-\pi} x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x = n!\left[-\cos\left(-\frac{8}{3}\,\pi+\frac{1}{2}\,\pi n\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\left(-\frac{13}{6}\,\pi\right)^{k-1}\cos\left(-\frac{8}{3}\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right) + (-\pi)^{k-1}\sin}{k!}\right.\right.$$

Corrigé 66. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. Une seule dérivation ne suffit pas, parce que la dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$: il reste un logarithme. ← page 8

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^1 sur [1,5], de dérivée $x \mapsto \frac{2\,\ln(x)}{x}$, tandis que $x \mapsto x^2 + 3\,x$ est continue sur [1,5], et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^5 \left(x^2 + 3\,x\right)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{6}\left(2\,x^3 + 9\,x^2\right)\ln(x)^2\right]_1^5 - \int_1^5 \frac{\left(2\,x^3 + 9\,x^2\right)\ln(x)}{3\,x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{475}{6}\,\ln(5)^2 - \int_1^5 \left(\frac{1}{3}\left(2\,x^2 + 9\,x\right)\ln(x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur [1,5], de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto \frac{2}{3}\,x^2 + 3\,x$ est continue sur [1,5], et une primitive est $x \mapsto \frac{2}{9}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{3}\left(2\,x^2 + 9\,x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{18}\left(4\,x^3 + 27\,x^2\right)\ln(x)\right]_1^5 - \int_1^5 \frac{4\,x^3 + 27\,x^2}{18\,x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1175}{18}\,\ln(5) - \int_1^5 \left(\frac{2}{9}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_1^5 \left(\frac{2}{9}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{27}\,x^3 + \frac{3}{4}\,x^2\right]_1^5 = \frac{734}{27}$. On conclut :

$$\int_1^5 \left(x^2 + 3\,x\right)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{475}{6}\,\ln(5)^2 - \frac{1175}{18}\,\ln(5) + \frac{734}{27}.$$

Corrigé 67. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. Une seule dérivation ne suffit pas, parce que la dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$: il reste un logarithme. ← page 8

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^1 sur [1,2], de dérivée $x \mapsto \frac{2\,\ln(x)}{x}$, tandis que $x \mapsto 5\,x + 2$ est continue sur [1,2], et une primitive est $x \mapsto \frac{5}{2}\,x^2 + 2\,x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (5\,x + 2)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(5\,x^2 + 4\,x\right)\ln(x)^2\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\left(5\,x^2 + 4\,x\right)\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= 14\,\ln(2)^2 - \int_1^2 ((5\,x + 4)\ln(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur [1,2], de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto 5\,x + 4$ est continue sur [1,2], et une primitive est $x \mapsto \frac{5}{2}\,x^2 + 4\,x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (5\,x + 4)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(5\,x^2 + 8\,x\right)\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{5\,x^2 + 8\,x}{2\,x}\mathrm{d}x \\ &= 18\,\ln(2) - \int_1^2 \left(\frac{5}{2}\,x + 4\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{5}{2}\,x + 4\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{5}{4}\,x^2 + 4\,x\right]_1^2 = \frac{31}{4}$. On conclut :

$$\int_1^2 (5\,x + 2)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = 14\,\ln(2)^2 - 18\,\ln(2) + \frac{31}{4}.$$

Corrigé 68. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 8

$$\int_{-\pi}^{11\,\pi} xe^{(-x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{11\,\pi} xe^{((4i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\pi}^{11\,\pi} xe^{(-x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{4}{17}i+\frac{1}{17}\right)\pi e^{\pi} - \left(\frac{44}{17}i+\frac{11}{17}\right)\pi e^{(-11\,\pi)} + \left(\frac{8}{289}i-\frac{15}{289}\right)e^{\pi} - \left(\frac{8}{289}i-\frac{15}{289}\right)e^{(-11\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{11\,\pi} xe^{(-x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{17}\pi e^{\pi} - \frac{44}{17}\pi e^{(-11\,\pi)} + \frac{8}{289}e^{\pi} - \frac{8}{289}e^{(-11\,\pi)}.$$

Corrigé 69. ← page 8

1. L'application $x \mapsto x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}$ est continue sur $[\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}\right| \leqslant x^2e^{(-4\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-4\,x)} = x^4e^{(-4\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2e^{(-4\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x^2e^{((3i-4)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{800}i-\frac{7}{800}\right)\sqrt{2}\pi^2e^{(-\pi)} - \left(\frac{17}{2500}i+\frac{31}{2500}\right)\sqrt{2}\pi e^{(-\pi)} - \left(\frac{161}{15625}i+\frac{73}{15625}\right)\sqrt{2}e^{(-\pi)}\right)$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(3\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{7}{800}\sqrt{2}\pi^2e^{(-\pi)} - \frac{31}{2500}\sqrt{2}\pi e^{(-\pi)} - \frac{73}{15625}\sqrt{2}e^{(-\pi)}.$$

Corrigé 70. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. Une seule dérivation ne suffit pas, parce que la dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$: il reste un logarithme. ← page 8

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^1 sur $[1{,}160]$, de dérivée $x \mapsto \frac{2\,\ln(x)}{x}$, tandis que $x \mapsto 3\,x^2 + x - 3$ est continue sur $[1{,}160]$, et une primitive est $x \mapsto x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 - 3\,x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{160}\left(3\,x^2+x-3\right)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(2\,x^3+x^2-6\,x\right)\ln(x)^2\right]_1^{160} - \int_1^{160}\frac{\left(2\,x^3+x^2-6\,x\right)\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= 4108320\,\ln(160)^2 - \int_1^{160}\left(\left(2\,x^2+x-6\right)\ln(x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur [1,160], de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto 2\,x^2 + x - 6$ est continue sur [1,160], et une primitive est $x \mapsto \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 - 6\,x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_1^{160} \left(2\,x^2 + x - 6\right) \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\left(4\,x^3 + 3\,x^2 - 36\,x\right) \ln(x)\right]_1^{160} - \int_1^{160} \frac{4\,x^3 + 3\,x^2 - 36\,x}{6\,x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{8227520}{3} \ln(160) - \int_1^{160} \left(\frac{2}{3}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x - 6\right) \mathrm{d}x.$$

Or : $\displaystyle\int_1^{160} \left(\frac{2}{3}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x - 6\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{9}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2 - 6\,x\right]_1^{160} = \frac{3662671}{4}$. On conclut :

$$\int_1^{160} \left(3\,x^2 + x - 3\right) \ln(x)^2\,\mathrm{d}x = 4108320 \ln(160)^2 - \frac{8227520}{3} \ln(160) + \frac{3662671}{4}.$$

Corrigé 71. ← page 8

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(-9\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{-5}^{-2} x^n e^{(-9\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{9}\,x^n e^{(-9\,x)}\right]_{-5}^{-2} - \int_{-5}^{-2} -\frac{1}{9}\,n x^{n-1} e^{(-9\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = \frac{1}{9}\,(-5)^n\,e^{45} - \frac{1}{9}\,(-2)^n\,e^{18} + \frac{1}{9} n I_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - \frac{1}{9} k I_{k-1} = \frac{1}{9}\,(-5)^k\,e^{45} - \frac{1}{9}\,(-2)^k\,e^{18}.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{9^k}{k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{9^k}{k!} I_k - \frac{9^{k-1}}{(k-1)!} I_{k-1} = \frac{\left((-5)^k\,e^{45} - (-2)^k\,e^{18}\right) 9^k}{9\,k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{9^n}{n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left((-5)^k\,e^{45} - (-2)^k\,e^{18}\right) 9^k}{9\,k!}\right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = \frac{n!}{9^n} \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left((-5)^k\,e^{45} - (-2)^k\,e^{18}\right) 9^k}{9\,k!}\right)\right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-5}^{-2} e^{(-9\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{9}\,e^{(-9\,x)}\right]_{-5}^{-2} = \frac{1}{9}\,e^{45} - \frac{1}{9}\,e^{18}$, donc finalement :

$$I_n = \frac{n!}{9^n} \left[\frac{1}{9}\,e^{45} - \frac{1}{9}\,e^{18} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left((-5)^k\,e^{45} - (-2)^k\,e^{18}\right) 9^k}{9\,k!}\right)\right].$$

Corrigé 72. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 8

$$\int_0^{\pi} x \cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} x e^{((2i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{\pi} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{2}{5}i+\frac{1}{5}\right)\pi e^{(-\pi)} - \left(\frac{4}{25}i-\frac{3}{25}\right)e^{(-\pi)} + \frac{4}{25}i - \frac{3}{25}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{\pi} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\pi e^{(-\pi)} + \frac{3}{25}e^{(-\pi)} - \frac{3}{25}.$$

Corrigé 73. ← page 8

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto \frac{\ln(x)^n}{x^3}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées :
$$x^2\cdot\frac{\ln(x)^n}{x^3} = \frac{\ln(x)^n}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $\frac{\ln(x)^n}{x^3} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge parce que son exposant est $2>1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_2^{+\infty}\frac{\ln(x)^n}{x^3}\mathrm{d}x$ converge, d'où le résultat.
2. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x\mapsto\ln(x)^n$ et en intégrant $x\mapsto\frac{1}{x^3}$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\int_2^{+\infty} -\frac{n\ln(x)^{n-1}}{2\,x^3}\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln(x)^n}{x^3}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)^n}{2\,x^2}\right]_2^{+\infty} - \int_2^{+\infty} -\frac{n\ln(x)^{n-1}}{2\,x^3}\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = \frac{1}{8}\ln(2)^n + \frac{1}{2}nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - \frac{1}{2}kI_{k-1} = \frac{1}{8}\ln(2)^k.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{2^k}{k!}$. On a alors :
$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{2^k}{k!}I_k - \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1} = \frac{2^k\ln(2)^k}{8\,k!}.$$
On somme cette égalité de $k=1$ à $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{2^n}{n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k\ln(2)^k}{8\,k!}\right),$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = \frac{n!}{2^n}\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k\ln(2)^k}{8\,k!}\right)\right].$$
Or : $I_0 = \int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2\,x^2}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{8}$, donc finalement :
$$I_n = \frac{n!}{2^n}\left[\frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k\ln(2)^k}{8\,k!}\right)\right].$$

Corrigé 74. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. ← page 8

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $[2{,}3]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto x^2 - 3x + 8$ est continue sur $[2{,}3]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \left(x^2 - 3x + 8\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{6}\left(2x^3 - 9x^2 + 48x\right)\ln(x)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^3 - 9x^2 + 48x}{6x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{39}{2}\ln(3) - \frac{38}{3}\ln(2) - \int_2^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 8\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_2^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 8\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 8x\right]_2^3 = \frac{229}{36}$. On conclut :

$$\int_2^3 \left(x^2 - 3x + 8\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{39}{2}\ln(3) - \frac{38}{3}\ln(2) - \frac{229}{36}.$$

Corrigé 75. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. Une seule dérivation ne suffit pas, parce que la dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$: il reste un logarithme. ← page 8

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^1 sur $[4{,}7]$, de dérivée $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$, tandis que $x \mapsto x$ est continue sur $[4{,}7]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_4^7 x\ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)^2\right]_4^7 - \int_4^7 x\ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{49}{2}\ln(7)^2 - 32\ln(2)^2 - \int_4^7 (x\ln(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $[4{,}7]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto x$ est continue sur $[4{,}7]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_4^7 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_4^7 - \int_4^7 \frac{1}{2}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{49}{2}\ln(7) - 16\ln(2) - \int_4^7 \left(\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_4^7 \left(\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_4^7 = \frac{33}{4}$. On conclut :

$$\int_4^7 x\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{49}{2}\ln(7)^2 - 32\ln(2)^2 - \frac{49}{2}\ln(7) + 16\ln(2) + \frac{33}{4}.$$

Corrigé 76. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 9

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2 - x$ est de classe C^1 sur $[-7, -2]$, de dérivée $x \mapsto 2x - 1$, tandis que $x \mapsto e^x$ est continue sur $[-7, -2]$, et une primitive est $x \mapsto e^x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-7}^{-2} (x^2 - x)e^x\mathrm{d}x &= \left[(x^2 - x)e^x\right]_{-7}^{-2} - \int_{-7}^{-2} (2x - 1)e^x\mathrm{d}x \\ &= 6\,e^{(-2)} - 56\,e^{(-7)} - \int_{-7}^{-2} ((2x - 1)e^x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 2\,x - 1$ est de classe C^1 sur $[-7,-2]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto e^x$ est continue sur $[-7,-2]$, et une primitive est $x \mapsto e^x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-7}^{-2} (2\,x-1)e^x \mathrm{d}x &= [(2\,x-1)e^x]_{-7}^{-2} - \int_{-7}^{-2} 2\,e^x \mathrm{d}x \\ &= -5\,e^{(-2)} + 15\,e^{(-7)} - \int_{-7}^{-2} (2\,e^x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-7}^{-2} (2\,e^x)\,\mathrm{d}x = [2\,e^x]_{-7}^{-2} = 2\,e^{(-2)} - 2\,e^{(-7)}$. On conclut :

$$\int_{-7}^{-2} \left(x^2 - x\right)e^x \mathrm{d}x = 13\,e^{(-2)} - 73\,e^{(-7)}.$$

Corrigé 77. ← page 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto \ln(x)^n$ est continue sur $]0{,}1]$. Pour tout x au voisinage de 0, on a par croissances comparées :
$$\sqrt{x}\cdot|\ln(x)|^n = \sqrt{x}|\ln(x)|^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $|\ln(x)|^n \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge parce que son exposant est $\frac{1}{2} < 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\ln(x)|^n \mathrm{d}x$ converge absolument donc converge, d'où le résultat.
2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto \ln(x)^n$ et en intégrant $x \mapsto 1$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\displaystyle\int_0^1 n\ln(x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_0^1 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)^n]_0^1 - \int_0^1 n\ln(x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = -nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k + kI_{k-1} = 0.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{(-1)^k}{k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{(-1)^k}{k!}I_k - \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1} = 0.$$
On somme cette égalité de $k=1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{(-1)^n}{n!}I_n - I_0 = 0,$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = \frac{n!}{(-1)^n}I_0.$$
Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$, donc finalement :
$$I_n = \frac{n!}{(-1)^n}1.$$

Corrigé 78. ← page 9

1. L'application $x \mapsto x\cos(x)\,e^{(-7\,x)}$ est continue sur $[\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{4}\,\pi, +\infty[$, on a :
$$\left|x\cos(x)\,e^{(-7\,x)}\right| \leqslant xe^{(-7\,x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-7\,x)} = x^3 e^{(-7\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-7\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} xe^{((i-7)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{50}i + \frac{3}{200}\right)\sqrt{2}\pi e^{\left(-\frac{7}{4}\,\pi\right)} + \left(\frac{31}{2500}i + \frac{17}{2500}\right)\sqrt{2}e^{\left(-\frac{7}{4}\,\pi\right)}\right),$$
et donc :
$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \frac{3}{200}\sqrt{2}\pi e^{\left(-\frac{7}{4}\,\pi\right)} + \frac{17}{2500}\sqrt{2}e^{\left(-\frac{7}{4}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 79. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 9
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}\,\pi}\left(-\frac{1}{2}\,x(\cos(2\,x)-1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{((2i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{5}i + \frac{1}{10}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)} + \left(\frac{4}{25}i - \frac{3}{25}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)} + \frac{4}{25}i - \frac{3}{25}\right),$$
et donc :
$$\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} x\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\pi e^{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \frac{3}{25}e^{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \frac{3}{25}.$$
On calcule de même $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\pi+2)e^{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)} + 1$. On peut conclure :
$$\int_0^{\frac{1}{2}\,\pi} xe^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{50}(15\,\pi + 22)e^{\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)} + \frac{14}{25}.$$

Corrigé 80. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 9

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 7\,x+2$ est de classe C^1 sur $[-1{,}1]$, de dérivée $x \mapsto 7$, tandis que $x \mapsto e^x$ est continue sur $[-1{,}1]$, et une primitive est $x \mapsto e^x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (7\,x+2)e^x \mathrm{d}x &= [(7\,x+2)e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 7\,e^x \mathrm{d}x \\ &= 9\,e + 5\,e^{(-1)} - \int_{-1}^{1} (7\,e^x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-1}^{1} (7\,e^x)\,\mathrm{d}x = [7\,e^x]_{-1}^{1} = 7\,e - 7\,e^{(-1)}$. On conclut :

$$\int_{-1}^{1} (7\,x+2)e^x \mathrm{d}x = 2\,e + 12\,e^{(-1)}.$$

Corrigé 81. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(2\,x)^2\,e^{(3\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} \left(\frac{1}{2}\,x(\cos(4\,x)+1)e^{(3\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(3\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} xe^{(3\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} xe^{((4i+3)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{50}i+\frac{2}{75}\right)\sqrt{3}\pi e^{\pi} + \left(\frac{2}{75}i-\frac{1}{50}\right)\pi e^{\pi} - \left(\frac{7}{1250}i-\frac{12}{625}\right)\sqrt{3}e^{\pi} - \left(\frac{12}{625}i+\frac{7}{1250}\right)e^{\pi} - \frac{24}{625}i -$$

et donc :

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(3\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{2}{75}\sqrt{3}\pi e^{\pi} - \frac{1}{50}\pi e^{\pi} + \frac{12}{625}\sqrt{3}e^{\pi} - \frac{7}{1250}e^{\pi} - \frac{7}{625}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} xe^{(3\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} xe^{(3\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\pi e^{\pi} - \frac{1}{9}e^{\pi} + \frac{1}{9}$. On peut conclure :

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} x\cos(2\,x)^2\,e^{(3\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{900}\pi\left(12\sqrt{3}-41\right)e^{\pi} + \frac{1}{22500}\left(216\sqrt{3}-1313\right)e^{\pi} + \frac{281}{5625}.$$

Corrigé 82. ← page 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(2i\,x)}$. On en déduit :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{3\pi} x^n e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}i\,x^n e^{(2i\,x)}\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{3\pi} - \int_{\frac{1}{4}\pi}^{3\pi} -\frac{1}{2}i\,nx^{n-1}e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire, après simplifications :

$$I_n = -\frac{1}{2}i\,(3\,\pi)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi\right)^n + \frac{1}{2}inI_{n-1}.$$

D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - \frac{1}{2} ikI_{k-1} = -\frac{1}{2} i\,(3\,\pi)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)^k.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{2^k}{i^k k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{2^k}{i^k k!} I_k - \frac{2^{k-1}}{i^{k-1}(k-1)!} I_{k-1} = -\frac{2^k\left(i\,(3\,\pi)^k + \left(\frac14\,\pi\right)^k\right)}{2\,i^k k!}.$$
On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{2^n}{i^n n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2^k\left(i\,(3\,\pi)^k + \left(\frac14\,\pi\right)^k\right)}{2\,i^k k!}\right),$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = \frac{i^n n!}{2^n}\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2^k\left(i\,(3\,\pi)^k + \left(\frac14\,\pi\right)^k\right)}{2\,i^k k!}\right)\right].$$
Or : $I_0 = \displaystyle\int_{\frac14\,\pi}^{3\,\pi} e^{(2i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2} i\,e^{(2i\,x)}\right]_{\frac14\,\pi}^{3\,\pi} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}$, donc finalement :
$$I_n = \frac{i^n n!}{2^n}\left[-\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2^k\left(i\,(3\,\pi)^k + \left(\frac14\,\pi\right)^k\right)}{2\,i^k k!}\right)\right].$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{ki\pi}{2}}$, et : $i = e^{\frac12 i\,\pi}$, $1 = e^{6i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a, après calculs :
$$\int_{\frac14\,\pi}^{3\,\pi} x^n \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2^n}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\left((3\,\pi)^{k-1}\cos\left(-\frac12\,\pi k + \frac12\,\pi n\right) + \left(\frac14\,\pi\right)^{k-1}\sin\left(-\frac12\,\pi k +\right.\right.}{k!}\right.\right.$$

Corrigé 83. ← page 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(i\,x)}$. On en déduit :
$$\int_0^{\frac13\,\pi} x^n e^{(i\,x)}\mathrm{d}x = \left[-i\,x^n e^{(i\,x)}\right]_0^{\frac13\,\pi} - \int_0^{\frac13\,\pi} -i\,nx^{n-1}e^{(i\,x)}\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^n\left(\sqrt{3} - i\right) + inI_{n-1}.$$
D'où le résultat.

2. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - ikI_{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k\left(\sqrt{3} - i\right).$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\dfrac{1}{i^k k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{1}{i^k k!} I_k - \frac{1}{i^{k-1}(k-1)!} I_{k-1} = \frac{\left(\frac13\,\pi\right)^k\left(\sqrt{3} - i\right)}{2\,i^k k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{i^n n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k \left(\sqrt{3} - i\right)}{2\, i^k k!} \right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = i^n n! \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k \left(\sqrt{3} - i\right)}{2\, i^k k!} \right) \right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\,\pi} e^{(i\,x)} \mathrm{d}x = \left[-i\, e^{(i\,x)} \right]_0^{\frac{1}{3}\,\pi} = \frac{1}{2}\,\sqrt{3} + \frac{1}{2} i$, donc finalement :

$$I_n = i^n n! \left[\frac{1}{2}\,\sqrt{3} + \frac{1}{2} i + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^k \left(\sqrt{3} - i\right)}{2\, i^k k!} \right) \right].$$

3. Il suffit de prendre la partie réelle dans l'expression de la question précédente. On y parvient en développant le produit du membre de droite, et en mettant sous forme exponentielle le terme général de la somme. Souvenons-nous que : $\forall k \in \mathbb{N},\ i^k = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k = e^{\frac{k i \pi}{2}}$, et : $\frac{1}{2} i\,\sqrt{3} + \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{3} i\,\pi}$, de sorte que finalement on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, après calculs :

$$\int_0^{\frac{1}{3}\,\pi} x^n \cos(x)\, \mathrm{d}x = n! \left[\cos\left(-\frac{1}{6}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n \right) - \sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)^{k-1} \cos\left(-\frac{1}{6}\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi k + \frac{1}{2}\,\pi n\right)}{k!} \right) \right].$$

Corrigé 84. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 9

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 9\,x + 2$ est de classe C^1 sur $[-1{,}13]$, de dérivée $x \mapsto 9$, tandis que $x \mapsto e^{(7\,x)}$ est continue sur $[-1{,}13]$, et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{7}\, e^{(7\,x)}$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{13} (9\,x + 2) e^{(7\,x)} \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{7}\,(9\,x + 2) e^{(7\,x)} \right]_{-1}^{13} - \int_{-1}^{13} \frac{9}{7}\, e^{(7\,x)} \mathrm{d}x \\ &= 17\, e^{91} + e^{(-7)} - \int_{-1}^{13} \left(\frac{9}{7}\, e^{(7\,x)} \right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_{-1}^{13} \left(\frac{9}{7}\, e^{(7\,x)} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{9}{49}\, e^{(7\,x)} \right]_{-1}^{13} = \frac{9}{49}\, e^{91} - \frac{9}{49}\, e^{(-7)}$. On conclut :

$$\int_{-1}^{13} (9\,x + 2) e^{(7\,x)} \mathrm{d}x = \frac{824}{49}\, e^{91} + \frac{58}{49}\, e^{(-7)}.$$

Corrigé 85. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{8}{3}\,\pi}^{\frac{5}{2}\,\pi} x e^x \sin(x)^2\, \mathrm{d}x &= \int_{-\frac{8}{3}\,\pi}^{\frac{5}{2}\,\pi} \left(-\frac{1}{2}\, x(\cos(2\,x) - 1) e^x \right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{8}{3}\,\pi}^{\frac{5}{2}\,\pi} x \cos(2\,x)\, e^x \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{8}{3}\,\pi}^{\frac{5}{2}\,\pi} x e^x \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{8}{3}\,\pi}^{\frac{5}{2}\,\pi} x \cos(2\,x)\, e^x \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{8}{3}\,\pi}^{\frac{5}{2}\,\pi} x e^{((2i+1)\,x)} \mathrm{d}x \right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{8}{3}\,\pi}^{\frac{5}{2}\,\pi} x \cos(2\,x)\, e^x \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\Bigg(\left(\frac{4}{15} i + \frac{8}{15} \right) \sqrt{3} \pi e^{\left(-\frac{8}{3}\,\pi\right)} + \left(i - \frac{1}{2} \right) \pi e^{\left(\frac{5}{2}\,\pi\right)} + \left(\frac{8}{15} i - \frac{4}{15} \right) \pi e^{\left(-\frac{8}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{3}{50} i - \frac{2}{25} \right) \sqrt{3} e^{\left(-\frac{8}{3}\,\pi\right)} - \Bigg($$

et donc :

$$\int_{-\frac{8}{3}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} x\cos(2\,x)\,e^x \mathrm{d}x = \frac{8}{15}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{8}{3}\pi\right)} - \frac{1}{2}\pi e^{\left(\frac{5}{2}\pi\right)} - \frac{4}{15}\pi e^{\left(-\frac{8}{3}\pi\right)} + \frac{2}{25}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{8}{3}\pi\right)} - \frac{3}{25}e^{\left(\frac{5}{2}\pi\right)} + \frac{3}{50}e^{\left(-\frac{8}{3}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{8}{3}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} xe^x \mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{8}{3}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} xe^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(5\,\pi-2)e^{\left(\frac{5}{2}\pi\right)} + \frac{1}{3}(8\,\pi+3)e^{\left(-\frac{8}{3}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{8}{3}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} xe^x \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{50}(75\,\pi-22)e^{\left(\frac{5}{2}\pi\right)} - \frac{1}{300}\left(40\,\pi\left(2\sqrt{3}-11\right)+12\sqrt{3}-141\right)e^{\left(-\frac{8}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 86. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 10

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 3\,x^2+47$ est de classe C^1 sur $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$, de dérivée $x \mapsto 6\,x$, tandis que $x \mapsto \sin(3\,x)$ est continue sur $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(3\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(3\,x^2+47\right)\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3}\left(3\,x^2+47\right)\cos(3\,x)\right]_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} - \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} -2\,x\cos(3\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{96}\sqrt{2}\left(3\,\pi^2+752\right) - \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(-2\,x\cos(3\,x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 6\,x$ est de classe C^1 sur $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$, de dérivée $x \mapsto 6$, tandis que $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(3\,x)$ est continue sur $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{9}\sin(3\,x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} -2\,x\cos(3\,x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{3}x\sin(3\,x)\right]_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} - \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} -\frac{2}{3}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{9}\pi - \frac{1}{12}\sqrt{2}\pi - \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(-\frac{2}{3}\sin(3\,x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(-\frac{2}{3}\sin(3\,x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{9}\cos(3\,x)\right]_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = -\frac{1}{9}\sqrt{2}$. On conclut :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(3\,x^2+47\right)\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}\pi + \frac{1}{12}\sqrt{2}\pi + \frac{1}{96}\sqrt{2}\left(3\,\pi^2+752\right) - \frac{1}{9}\sqrt{2}.$$

Corrigé 87. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. Une seule dérivation ne suffit pas, parce que la dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$: il reste un logarithme. ← page 10

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^1 sur $[1{,}17]$, de dérivée $x \mapsto \frac{2\,\ln(x)}{x}$, tandis que $x \mapsto 2\,x$ est continue sur $[1{,}17]$, et une primitive est $x \mapsto x^2$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{17} 2\,x\ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\ln(x)^2\right]_1^{17} - \int_1^{17} 2\,x\ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 289\,\ln(17)^2 - \int_1^{17} \left(2\,x\ln(x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $[1{,}17]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto 2\,x$ est continue sur $[1{,}17]$, et une primitive est $x \mapsto x^2$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{17} 2\,x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\ln(x)\right]_1^{17} - \int_1^{17} x\mathrm{d}x \\ &= 289\,\ln(17) - \int_1^{17} (x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_1^{17} (x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_1^{17} = 144$. On conclut :

$$\int_1^{17} 2\,x\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = 289\,\ln(17)^2 - 289\,\ln(17) + 144.$$

Corrigé 88. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 10

$$\int_{-\pi}^{0} xe^{(5\,x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{0} xe^{((i+5)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\pi}^{0} xe^{(5\,x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{26}i - \frac{5}{26}\right)\pi e^{(-5\,\pi)} + \left(\frac{5}{338}i - \frac{6}{169}\right)e^{(-5\,\pi)} + \frac{5}{338}i - \frac{6}{169}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} xe^{(5\,x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{26}\,\pi e^{(-5\,\pi)} + \frac{5}{338}\,e^{(-5\,\pi)} + \frac{5}{338}.$$

Corrigé 89. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 10

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x+2$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, de dérivée $x \mapsto 1$, tandis que $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $[0,\pi]$, et une primitive est $x \mapsto -\cos(x)$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (x+2)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-(x+2)\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \pi + 4 - \int_0^{\pi} (-\cos(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_0^{\pi} (-\cos(x))\,\mathrm{d}x = [-\sin(x)]_0^{\pi} = 0$. On conclut :

$$\int_0^{\pi} (x+2)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \pi + 4.$$

Corrigé 90. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 10

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto 2\,x^2 - 3$ est de classe C^1 sur [2,5], de dérivée $x \mapsto 4\,x$, tandis que $x \mapsto e^x$ est continue sur [2,5], et une primitive est $x \mapsto e^x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_2^{5} \left(2\,x^2 - 3\right)e^x\mathrm{d}x &= \left[\left(2\,x^2 - 3\right)e^x\right]_2^5 - \int_2^5 4\,xe^x\mathrm{d}x\\ &= 47\,e^5 - 5\,e^2 - \int_2^5 (4\,xe^x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On recommence : l'application $x \mapsto 4\,x$ est de classe C^1 sur [2,5], de dérivée $x \mapsto 4$, tandis que $x \mapsto e^x$ est continue sur [2,5], et une primitive est $x \mapsto e^x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_2^5 4\,xe^x\mathrm{d}x &= [4\,xe^x]_2^5 - \int_2^5 4\,e^x\mathrm{d}x\\ &= 20\,e^5 - 8\,e^2 - \int_2^5 (4\,e^x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\int_2^5 (4\,e^x)\,\mathrm{d}x = [4\,e^x]_2^5 = 4\,e^5 - 4\,e^2$. On conclut :

$$\int_2^5 \left(2\,x^2 - 3\right)e^x \mathrm{d}x = 31\,e^5 - e^2.$$

Corrigé 91. ← page 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n e^{(-x)}$ est continue sur $[-7, +\infty[$. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées :
$$x^2 \cdot x^n e^{(-x)} = x^2 x^n e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $x^n e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_{-7}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge parce que son exposant est $2 > 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-7}^{+\infty} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, d'où le résultat.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(-x)}$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\int_{-7}^{+\infty} -nx^{n-1}e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_{-7}^{+\infty} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x = \left[-x^n e^{(-x)}\right]_{-7}^{+\infty} - \int_{-7}^{+\infty} -nx^{n-1}e^{(-x)}\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = (-7)^n\,e^7 + nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.
3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :
$$I_k - kI_{k-1} = (-7)^k\,e^7.$$
Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{1}{k!}$. On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{k!}I_k - \frac{1}{(k-1)!}I_{k-1} = \frac{(-7)^k\,e^7}{k!}.$$
On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{1}{n!}I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-7)^k\,e^7}{k!}\right),$$
et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :
$$I_n = n!\left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-7)^k\,e^7}{k!}\right)\right].$$
Or : $I_0 = \int_{-7}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x = \left[-e^{(-x)}\right]_{-7}^{+\infty} = e^7$, donc finalement :
$$I_n = n!\left[e^7 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-7)^k\,e^7}{k!}\right)\right].$$

Corrigé 92. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 10

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(13\,x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{((i+13)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(13\,x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{1}{2040}i-\frac{13}{2040}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{13}{6}\pi\right)}-\left(\frac{13}{2040}i+\frac{1}{2040}\right)\pi e^{\left(-\frac{13}{6}\pi\right)}-\left(\frac{13}{28900}i-\frac{21}{7225}\right)\sqrt{3}e^{\left(-\frac{13}{6}\pi\right)}-\left(\right.\right.$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} xe^{(13\,x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2040}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{13}{6}\pi\right)}-\frac{13}{2040}\pi e^{\left(-\frac{13}{6}\pi\right)}-\frac{13}{28900}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{13}{6}\pi\right)}-\frac{21}{7225}e^{\left(-\frac{13}{6}\pi\right)}+\frac{13}{14450}.$$

Corrigé 93. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties une fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme logarithmique, ce qu'on obtiendra par dérivation. ← page 10

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur [1,3], de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, tandis que $x \mapsto x-8$ est continue sur [1,3], et une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 8\,x$. D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^3 (x-8)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(x^2-16\,x\right)\ln(x)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2-16\,x}{2\,x}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{39}{2}\ln(3) - \int_1^3\left(\frac{1}{2}x-8\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\int_1^3\left(\frac{1}{2}x-8\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2-8\,x\right]_1^3 = -14$. On conclut :

$$\int_1^3 (x-8)\ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{39}{2}\ln(3)+14.$$

Corrigé 94. ← page 10

1. L'application $x \mapsto x^2e^{(-6\,x)}\sin(x)^2$ est continue sur $[\frac{1}{4}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{4}\pi, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant x^2e^{(-6\,x)}\sin(x)^2 \leqslant x^2e^{(-6\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-6\,x)} = x^4e^{(-6\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2e^{(-6\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-6\,x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-6\,x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2(\cos(2\,x)-1)e^{(-6\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2\cos(2\,x)\,e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2\cos(2\,x)\,e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2e^{((2i-6)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-6x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{3}{320}i - \frac{1}{320}\right)\pi^2 e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} + \left(\frac{1}{100}i - \frac{3}{400}\right)\pi e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} + \left(\frac{9}{2000}i - \frac{13}{2000}\right)e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-6x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{320}\pi^2 e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} - \frac{3}{400}\pi e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} - \frac{13}{2000}e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-6x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-6x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{864}\left(12\pi + 9\pi^2 + 8\right)e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-6x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{432000}\left(4620\pi + 2925\pi^2 + 3404\right)e^{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

Corrigé 95. ← page 10

1. L'application $x \mapsto x^2\cos(6x)\,e^{(-6x)}$ est continue sur $[-\frac{1}{2}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x^2\cos(6x)\,e^{(-6x)}\right| \leqslant x^2 e^{(-6x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-6x)} = x^4 e^{(-6x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-6x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-6x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-6x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\frac{1}{2}\pi, 1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2\cos(6x)\,e^{(-6x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2\cos(6x)\,e^{(-6x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2 e^{((6i-6)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2\cos(6x)\,e^{(-6x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{48}i + \frac{1}{48}\right)\pi^2 e^{(3\pi)} + \frac{1}{72}i\,\pi e^{(3\pi)} - \left(\frac{1}{432}i - \frac{1}{432}\right)e^{(3\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2\cos(6x)\,e^{(-6x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{48}\pi^2 e^{(3\pi)} + \frac{1}{432}e^{(3\pi)}.$$

Corrigé 96. ← page 10

1. L'application $x \mapsto x\cos(x)^2\,e^{(-17x)}$ est continue sur $[-\frac{1}{4}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{4}\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x\cos(x)^2\,e^{(-17x)}\right| \leqslant |x|e^{(-17x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot |x|e^{(-17\,x)} = x^2|x|e^{(-17\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$|x|e^{(-17\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |x|e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} |x|e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\frac{1}{4}\,\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos{(x)}^2\, e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos{(x)}^2\, e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\,x(\cos{(2\,x)}+1)e^{(-17\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos{(2\,x)}\, e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-17\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos{(2\,x)}\, e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} xe^{((2i-17)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos{(2\,x)}\, e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{17}{1172}i - \frac{1}{586}\right)\pi e^{\left(\frac{17}{4}\,\pi\right)} - \left(\frac{285}{85849}i - \frac{68}{85849}\right) e^{\left(\frac{17}{4}\,\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos{(2\,x)}\, e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{586}\,\pi e^{\left(\frac{17}{4}\,\pi\right)} + \frac{68}{85849}\, e^{\left(\frac{17}{4}\,\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-17\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-17\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{1156}\,(17\,\pi - 4)e^{\left(\frac{17}{4}\,\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{+\infty} x\cos{(x)}^2\, e^{(-17\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{327}{39848}\,\pi e^{\left(\frac{17}{4}\,\pi\right)} + \frac{105501}{49620722}\, e^{\left(\frac{17}{4}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 97. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{7\,\pi} xe^{(3\,x)}\sin{(6\,x)}^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{7\,\pi} \left(-\frac{1}{2}\,x(\cos{(12\,x)}-1)e^{(3\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{7\,\pi} x\cos{(12\,x)}\, e^{(3\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{7\,\pi} xe^{(3\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{7\,\pi} x\cos{(12\,x)}\, e^{(3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{7\,\pi} xe^{((12i+3)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{4}\,\pi}^{7\,\pi} x\cos{(12\,x)}\, e^{(3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{28}{51}i - \frac{7}{51}\right)\pi e^{(21\,\pi)} - \left(\frac{1}{51}i - \frac{1}{204}\right)\pi e^{\left(\frac{3}{4}\,\pi\right)} + \left(\frac{8}{2601}i + \frac{5}{867}\right) e^{(21\,\pi)} + \left(\frac{8}{2601}i + \frac{5}{867}\right) e^{\left(\frac{3}{4}\,\pi\right)}\right.$$

et donc :
$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} x\cos(12x)\,e^{(3x)}\mathrm{d}x = \frac{7}{51}\,\pi e^{(21\pi)} + \frac{1}{204}\,\pi e^{\left(\frac{3}{4}\pi\right)} + \frac{5}{867}\,e^{(21\pi)} + \frac{5}{867}\,e^{\left(\frac{3}{4}\pi\right)}.$$
On calcule de même $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} xe^{(3x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} xe^{(3x)}\mathrm{d}x = \frac{7}{3}\,\pi e^{(21\pi)} - \frac{1}{36}\,(3\pi-4)e^{\left(\frac{3}{4}\pi\right)} - \frac{1}{9}\,e^{(21\pi)}$. On peut conclure :
$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} xe^{(3x)}\sin(6x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{56}{51}\,\pi e^{(21\pi)} - \frac{1}{10404}\,(459\pi-548)e^{\left(\frac{3}{4}\pi\right)} - \frac{152}{2601}\,e^{(21\pi)}.$$

Corrigé 98. Nous allons calculer cette intégrale en utilisant la formule de l'intégration par parties deux fois : l'objectif est de se ramener à une intégrale sans le terme gênant, c'est-à-dire sans terme polynomial : pour cela, nous allons le dériver autant de fois que son degré, jusqu'à obtenir un terme constant. ← page 10

Mettons cela en œuvre : l'application $x \mapsto x^2-4$ est de classe C^1 sur $[-1{,}1]$, de dérivée $x \mapsto 2x$, tandis que $x \mapsto e^x$ est continue sur $[-1{,}1]$, et une primitive est $x \mapsto e^x$. D'après la formule de l'intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \left(x^2-4\right)e^x\mathrm{d}x &= \left[\left(x^2-4\right)e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2\,xe^x\mathrm{d}x\\ &= -3\,e + 3\,e^{(-1)} - \int_{-1}^{1} (2\,xe^x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On recommence : l'application $x \mapsto 2x$ est de classe C^1 sur $[-1{,}1]$, de dérivée $x \mapsto 2$, tandis que $x \mapsto e^x$ est continue sur $[-1{,}1]$, et une primitive est $x \mapsto e^x$. D'après la formule de l'intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 2\,xe^x\mathrm{d}x &= \left[2\,xe^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2\,e^x\mathrm{d}x\\ &= 2\,e + 2\,e^{(-1)} - \int_{-1}^{1} (2\,e^x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Or : $\int_{-1}^{1} (2\,e^x)\,\mathrm{d}x = \left[2\,e^x\right]_{-1}^{1} = 2\,e - 2\,e^{(-1)}$. On conclut :
$$\int_{-1}^{1} \left(x^2-4\right)e^x\mathrm{d}x = -3\,e - e^{(-1)}.$$

Corrigé 99. ← page 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n e^{(-x)}$ est continue sur $[-5,+\infty[$. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées :
$$x^2 \cdot x^n e^{(-x)} = x^2 x^n e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc : $x^n e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_{-5}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge parce que son exposant est $2>1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-5}^{+\infty} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, d'où le résultat.
2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On intègre par parties I_n, en dérivant $x \mapsto x^n$ et en intégrant $x \mapsto e^{(-x)}$. Le lecteur en exercice prendra bien garde à vérifier l'existence du terme entre crochets, par un calcul de limite aux extrémités (il trouvera une limite nulle, par croissances comparées, à l'extrémité problématique). L'intégration par parties conserve la nature des intégrales, donc $\int_{-5}^{+\infty} -nx^{n-1}e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge également et on en déduit :
$$\int_{-5}^{+\infty} x^n e^{(-x)}\mathrm{d}x = \left[-x^n e^{(-x)}\right]_{-5}^{+\infty} - \int_{-5}^{+\infty} -nx^{n-1}e^{(-x)}\mathrm{d}x.$$
C'est-à-dire, après simplifications :
$$I_n = (-5)^n\,e^5 + nI_{n-1}.$$
D'où le résultat.

3. La relation de la question précédente peut également s'écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k - kI_{k-1} = (-5)^k \, e^5.$$

Nous n'avons pas une différence de termes consécutifs. On y remédie en multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{1}{k!}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{k!} I_k - \frac{1}{(k-1)!} I_{k-1} = \frac{(-5)^k \, e^5}{k!}.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on simplifie le membre de gauche en remarquant que nous avons une somme télescopique. On a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n!} I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-5)^k \, e^5}{k!} \right),$$

et il suffit d'isoler I_n pour avoir le résultat voulu :

$$I_n = n! \left[I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-5)^k \, e^5}{k!} \right) \right].$$

Or : $I_0 = \displaystyle\int_{-5}^{+\infty} e^{(-x)} \mathrm{d}x = \left[-e^{(-x)} \right]_{-5}^{+\infty} = e^5$, donc finalement :

$$I_n = n! \left[e^5 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-5)^k \, e^5}{k!} \right) \right].$$

Corrigé 100. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 11

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{2\pi} x e^{(-4x)} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \left(\int_{\frac{1}{3}\pi}^{2\pi} x e^{((i-4)x)} \mathrm{d}x \right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{2\pi} x e^{(-4x)} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \left(\left(\frac{2}{51} i - \frac{1}{102} \right) \sqrt{3} \pi e^{\left(-\frac{4}{3}\pi\right)} + \left(\frac{1}{102} i + \frac{2}{51} \right) \pi e^{\left(-\frac{4}{3}\pi\right)} - \left(\frac{2}{17} i + \frac{8}{17} \right) \pi e^{(-8\pi)} + \left(\frac{15}{578} i - \frac{4}{289} \right) \sqrt{3} e^{(-$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{2\pi} x e^{(-4x)} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{51} \sqrt{3} \pi e^{\left(-\frac{4}{3}\pi\right)} + \frac{1}{102} \pi e^{\left(-\frac{4}{3}\pi\right)} - \frac{2}{17} \pi e^{(-8\pi)} + \frac{15}{578} \sqrt{3} e^{\left(-\frac{4}{3}\pi\right)} + \frac{4}{289} e^{\left(-\frac{4}{3}\pi\right)} - \frac{8}{289} e^{(-8\pi)}.$$