Équations différentielles linéaires tordues

Ces exercices vous confrontent à des équations qui ne sont pas tout à fait différentielles au sens classique (présence d'évaluations en $-x$). Vous devez vous ramener à des équations différentielles que vous savez résoudre en utilisant avec pertinence la parité des fonctions.

Exercice 1. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 9

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3f'(-x) + f(x) = \cos(x). \tag{E}$$

Exercice 2. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 10

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - 5f(x) = e^{(-16\,x)}. \tag{E}$$

Exercice 3. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 11

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -8f'(-x) - 5f(x) = \sin(2\,x). \tag{E}$$

Exercice 4. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 12

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - f(x) = e^{x}. \tag{E}$$

Exercice 5. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 13

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -18f''(-x) - f(x) = \cos(x). \tag{E}$$

Exercice 6. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 14

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4f''(-x) + 3f(x) = \sin(x). \tag{E}$$

Exercice 7. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 15

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 9f'(-x) + f(x) = e^{x}. \tag{E}$$

Exercice 8. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 16

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 8f'(-x) + 2f(x) = \cos(x). \tag{E}$$

Exercice 9. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 17

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + 18f(x) = e^{(2\,x)}. \tag{E}$$

Exercice 10. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 18

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - f(x) = -2. \tag{E}$$

Exercice 11. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 19

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - f(x) = 1. \tag{E}$$

Exercice 12. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 20

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) - f(x) = 1. \qquad (E)$$

Exercice 13. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 20

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5f'(-x) - f(x) = x^2 + x + 6. \qquad (E)$$

Exercice 14. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 22

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - 3f(x) = e^{(2\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 15. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 23

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) + 3f(x) = -3\,x^2 - 7\,x - 1. \qquad (E)$$

Exercice 16. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 24

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -3f''(-x) + 2f(x) = \sin(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 17. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 25

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x) - f(x) = \cos(2\,x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 18. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 26

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5f''(-x) - f(x) = \sin(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 19. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 27

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = \sin(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 20. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 28

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(-x) + 2f(x) = \cos(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 21. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 30

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -4f''(-x) + 2f(x) = e^{(14\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 22. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 30

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - f(x) = e^{x}. \qquad (E)$$

Exercice 23. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 32

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + 3f(x) = e^{(3\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 24. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 32

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = \cos(4\,x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 25. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 33

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 5f'(-x) + 4f(x) = e^{(3\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 26. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 34

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x) + f(x) = \sin(x). \qquad (E)$$

Exercice 27. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 36

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -39f'(-x) + f(x) = \sin(x). \qquad (E)$$

Exercice 28. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 37

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - 13f(x) = e^{(3\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 29. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 38

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -7f''(-x) + 3f(x) = x. \qquad (E)$$

Exercice 30. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 38

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x) + f(x) = \sin(x). \qquad (E)$$

Exercice 31. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 40

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -6f'(-x) + 2f(x) = e^{(2\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 32. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 41

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = \cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 33. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 42

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - f(x) = \cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 34. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 43

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) - 6f(x) = \cos(5\,x). \qquad (E)$$

Exercice 35. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 44

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) - f(x) = -1. \qquad (E)$$

Exercice 36. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 45

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - f(x) = \sin(x). \qquad (E)$$

Exercice 37. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 46

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) + f(x) = \sin(11\,x). \qquad (E)$$

Exercice 38. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 47

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - 4f(x) = \cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 39. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 48

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = \sin(4\,x). \qquad (E)$$

Exercice 40. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 49

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - f(x) = x^2 + x + 1. \qquad (E)$$

Exercice 41. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 49

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -15f''(-x) + f(x) = e^{(-2\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 42. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 50

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = 3. \qquad (E)$$

Exercice 43. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 51

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 9f'(-x) - 9f(x) = 2. \qquad (E)$$

Exercice 44. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 52

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5f'(-x) + f(x) = \sin(124\,x). \qquad (E)$$

Exercice 45. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 53

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -3f'(-x) + 8f(x) = e^{(2\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 46. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 55

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) + 3f(x) = 14\,x - 2. \qquad (E)$$

Exercice 47. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 55

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = -x^2 - x. \qquad (E)$$

Exercice 48. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 56

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - f(x) = -1. \qquad (E)$$

Exercice 49. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 57

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 33f'(-x) - 4f(x) = e^{(5\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 50. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 58

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - f(x) = e^{(-9\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 51. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 59

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - f(x) = \sin(x). \tag{E}$$

Exercice 52. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 60

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) + f(x) = \cos(3x). \tag{E}$$

Exercice 53. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 61

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) - 24f(x) = \cos(x). \tag{E}$$

Exercice 54. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 62

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + 2f(x) = e^{(-3x)}. \tag{E}$$

Exercice 55. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 63

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + 3f(x) = -2x^2 - x + 1. \tag{E}$$

Exercice 56. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 65

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3f'(-x) + f(x) = 1. \tag{E}$$

Exercice 57. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 66

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - f(x) = \sin(x). \tag{E}$$

Exercice 58. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 67

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) + 5f(x) = x - 3. \tag{E}$$

Exercice 59. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 67

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5f''(-x) - 3f(x) = \sin(x). \tag{E}$$

Exercice 60. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 68

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(-x) - 3f(x) = \sin(2x). \tag{E}$$

Exercice 61. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 69

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = e^{(13x)}. \tag{E}$$

Exercice 62. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 71

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5f''(-x) - f(x) = \cos(3x). \tag{E}$$

Exercice 63. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 71

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -7f''(-x) - 2f(x) = \sin(x). \tag{E}$$

Exercice 64. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 72

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) + f(x) = -x^2 - 2\,x. \tag{E}$$

Exercice 65. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 73

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = \cos(x)\,. \tag{E}$$

Exercice 66. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 74

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - 13f(x) = -1. \tag{E}$$

Exercice 67. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 75

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = \sin(x)\,. \tag{E}$$

Exercice 68. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 75

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + 6f(x) = e^{(13\,x)}. \tag{E}$$

Exercice 69. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 76

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x) - f(x) = \sin(x)\,. \tag{E}$$

Exercice 70. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 77

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) + 4f(x) = \sin(2\,x)\,. \tag{E}$$

Exercice 71. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 79

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 9f''(-x) - f(x) = \cos(2\,x)\,. \tag{E}$$

Exercice 72. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 80

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) + 2f(x) = \cos(2\,x)\,. \tag{E}$$

Exercice 73. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 80

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) - 3f(x) = e^{(-x)}. \tag{E}$$

Exercice 74. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 81

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - f(x) = \cos(37\,x)\,. \tag{E}$$

Exercice 75. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 82

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + 3f(x) = \cos(2\,x)\,. \tag{E}$$

Exercice 76. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 83

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 6f''(-x) + 2f(x) = \cos(4\,x)\,. \tag{E}$$

Exercice 77. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 84

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + 4f(x) = \sin(2\,x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 78. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 85

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3f'(-x) - f(x) = e^{x}. \qquad (E)$$

Exercice 79. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 86

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -4f''(-x) + 9f(x) = e^{(15\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 80. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 87

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) + 4f(x) = \sin(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 81. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 88

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - 10f(x) = \sin(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 82. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 89

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - 3f(x) = \cos(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 83. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 90

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 20f''(-x) - f(x) = \cos(6\,x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 84. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 91

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) + 3f(x) = e^{(9\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 85. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 92

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - f(x) = \sin(x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 86. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 93

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + 9f(x) = e^{(-x)}. \qquad (E)$$

Exercice 87. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 95

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4f'(-x) + 2f(x) = -3\,x^2 + x - 20. \qquad (E)$$

Exercice 88. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 96

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3f''(-x) + 6f(x) = \sin(4\,x)\,. \qquad (E)$$

Exercice 89. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 97

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) + 10f(x) = 1. \qquad (E)$$

Exercice 90. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 97

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -6f''(-x) + f(x) = e^{(2\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 91. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 98

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - 2f(x) = e^{x}. \qquad (E)$$

Exercice 92. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 99

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - f(x) = -x^2 - x. \qquad (E)$$

Exercice 93. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 99

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1087f''(-x) + f(x) = \cos(3\,x). \qquad (E)$$

Exercice 94. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 100

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x) + f(x) = e^{(-3\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 95. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 101

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = -7\,x^2 + x + 5. \qquad (E)$$

Exercice 96. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 102

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 5f''(-x) - 3f(x) = \sin(x). \qquad (E)$$

Exercice 97. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 103

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - f(x) = \cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 98. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 104

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -16f'(-x) - f(x) = \cos(2\,x). \qquad (E)$$

Exercice 99. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 105

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) + f(x) = \cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 100. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 106

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) - f(x) = \cos(x). \qquad (E)$$

Corrigé 1. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad 3f'(-x)+f(x)=\cos(x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad 3\left(g'(-x)+h'(-x)\right)+(g(x)+h(x))=\cos(x)\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(3h'(x)+g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-3g'(x)+h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} 3h'(x)+g(x) &=& \cos(x)\\ -3g'(x)+h(x) &=& 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\cos(x)\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\cos(x)\end{pmatrix}\\
&=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\cos(x)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}i\cos(x)\\ \frac{1}{6}i\cos(x)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}i\,z_1(x)\\ -\frac{1}{3}i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}i\cos(x)\\ \frac{1}{6}i\cos(x)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& \frac{1}{3}i\,z_1(x)-\frac{1}{6}i\cos(x)\\ z_2'(x) &=& -\frac{1}{3}i\,z_2(x)+\frac{1}{6}i\cos(x)\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{3}i\,x\right)}-\frac{1}{16}\cos(x)-\frac{3}{16}i\sin(x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{\left(-\frac{1}{3}i\,x\right)}-\frac{1}{16}\cos(x)+\frac{3}{16}i\sin(x),$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{3}i\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}i\,x\right)}-\frac{1}{8}\cos(x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{3}i\,x\right)}-i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{3}i\,x\right)}+\frac{3}{8}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 3f'(-x) + f(x) = \cos(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\,x\right) - \frac{1}{8}\,\cos(x)\,,\quad h(x) = -2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\,x\right) + \frac{3}{8}\,\sin(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\,x\right) - 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\,x\right) - \frac{1}{8}\,\cos(x) + \frac{3}{8}\,\sin(x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\,x\right) - 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\,x\right) - \frac{1}{8}\,\cos(x) + \frac{3}{8}\,\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 2. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad -f''(-x) - 5f(x) = e^{(-16\,x)} &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad -\big(g''(-x) + h''(-x)\big) - 5\,(g(x) + h(x)) = e^{(-16\,x)}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\big(-g''(x) - 5g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(h''(x) - 5h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(16\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-16\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2}\,e^{(16\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-16\,x)}}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} -g''(x) - 5g(x) &= \frac{1}{2}\,e^{(16\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-16\,x)} \\ h''(x) - 5h(x) &= -\frac{1}{2}\,e^{(16\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-16\,x)} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \beta \cos\left(\sqrt{5}x\right) + \alpha \sin\left(\sqrt{5}x\right) - \frac{1}{522}\,e^{(16\,x)} - \frac{1}{522}\,e^{(-16\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)} + \delta e^{\left(-\sqrt{5}x\right)} - \frac{1}{502}\,e^{(16\,x)} + \frac{1}{502}\,e^{(-16\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) - 5f(x) = e^{(-16\,x)}\\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta \cos\left(\sqrt{5}x\right) - \frac{1}{522}\,e^{(16\,x)} - \frac{1}{522}\,e^{(-16\,x)},\quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{5}x\right)} - \frac{1}{502}\,e^{(16\,x)} + \frac{1}{502}\,e^{(-1}\\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta \cos\left(\sqrt{5}x\right) + \gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{5}x\right)} - \frac{256}{65511}\,e^{(16\,x)} + \frac{5}{65511}\,e^{(-16\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta \cos\left(\sqrt{5}x\right) + \gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{5}x\right)} - \frac{256}{65511}\,e^{(16\,x)} + \frac{5}{65511}\,e^{(-16\,x)} \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 3. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -8f'(-x)-5f(x)=\sin(2\,x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad -8\left(g'(-x)+h'(-x)\right)-5\left(g(x)+h(x)\right)=\sin(2\,x)\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-8h'(x)-5g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(8g'(x)-5h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(2\,x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}-8h'(x)-5g(x)&=&0\\ 8g'(x)-5h(x)&=&\sin(2\,x)\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&\frac58\\-\frac58&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}\frac18\sin(2\,x)\\0\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}\frac58 i&0\\0&-\frac58 i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12 i\\\frac12&\frac12 i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac18\sin(2\,x)\\0\end{pmatrix}\\ &=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac18\sin(2\,x)\\0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac58 i&0\\0&-\frac58 i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\frac1{16}\sin(2\,x)\\\frac1{16}\sin(2\,x)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac58 i\,z_1(x)\\-\frac58 i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac1{16}\sin(2\,x)\\\frac1{16}\sin(2\,x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\left\{\begin{array}{rcl}z_1'(x)&=&\frac58 i\,z_1(x)+\frac1{16}\sin(2\,x)\\ z_2'(x)&=&-\frac58 i\,z_2(x)+\frac1{16}\sin(2\,x)\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{\left(\frac58 i\,x\right)}-\frac{8}{231}\cos(2\,x)-\frac{5}{462}i\,\sin(2\,x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{\left(-\frac58 i\,x\right)}-\frac{8}{231}\cos(2\,x)+\frac{5}{462}i\,\sin(2\,x),$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac58 i\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac58 i\,x\right)}-\frac{16}{231}\cos(2\,x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=i\,\alpha e^{\left(\frac58 i\,x\right)}-i\,\beta e^{\left(-\frac58 i\,x\right)}+\frac{5}{231}\sin(2\,x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -8f'(-x) - 5f(x) = \sin(2\,x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{5}{8}\,x\right) - \frac{16}{231}\,\cos(2\,x)\,,\quad h(x) = -2\,\alpha\sin\left(\frac{5}{8}\,x\right) + \frac{5}{231}\,\sin(2\,x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{5}{8}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{5}{8}\,x\right) - \frac{16}{231}\,\cos(2\,x) + \frac{5}{231}\,\sin(2\,x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos\left(\frac{5}{8}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{5}{8}\,x\right) - \frac{16}{231}\,\cos(2\,x) + \frac{5}{231}\,\sin(2\,x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 4. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(-x) - f(x) = e^x \Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R},\quad \big(g'(-x) + h'(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = e^x\\
\Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\big(h'(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-g'(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x}_{\text{impaire}}\\
\Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} h'(x) - g(x) & = \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \\ -g'(x) - h(x) & = -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x \\ \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x \\ \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \end{pmatrix}\\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x \\ \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^x \\ -\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^x \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} i\,z_1(x) \\ -i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^x \\ -\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^x \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\, z_1(x) + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right) e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right) e^{x} \\ z_2'(x) &= -i\, z_2(x) - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right) e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right) e^{x} \end{cases}$$
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4}\, e^{(-x)} - \frac{1}{4}\, e^{x},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4}\, e^{(-x)} - \frac{1}{4}\, e^{x},$$
avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{2}\, e^{(-x)} - \frac{1}{2}\, e^{x},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\, \alpha e^{(i\,x)} + i\, \beta e^{(-i\,x)}.$$
Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :
$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) - f(x) = e^{x} \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\, \alpha \cos(x) - \frac{1}{2}\, e^{(-x)} - \frac{1}{2}\, e^{x}, \quad h(x) = 2\, \alpha \sin(x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\, \alpha \cos(x) + 2\, \alpha \sin(x) - \frac{1}{2}\, e^{(-x)} - \frac{1}{2}\, e^{x}. \end{aligned}$$
Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :
$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\, \alpha \cos(x) + 2\, \alpha \sin(x) - \frac{1}{2}\, e^{(-x)} - \frac{1}{2}\, e^{x} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 5. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$
et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$
autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -18 f''(-x) - f(x) = \cos(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -18\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - (g(x) + h(x)) = \cos(x) \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-18 g''(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(18 h''(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -18 g''(x) - g(x) &= \cos(x) \\ 18 h''(x) - h(x) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$
où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta \cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right) + \alpha \sin\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{17}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)} + \delta e^{\left(-\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -18f''(-x) - f(x) = \cos(x) \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{17}\cos(x), \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)} \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)} + \frac{1}{17}\cos(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta\cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{6}\sqrt{2}x\right)} + \frac{1}{17}\cos(x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 6. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4f''(-x) + 3f(x) = \sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 4\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + 3\left(g(x) + h(x)\right) = \sin(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(4g''(x) + 3g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-4h''(x) + 3h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 4g''(x) + 3g(x) &= 0 \\ -4h''(x) + 3h(x) &= \sin(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} + \delta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} + \frac{1}{7}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 4f''(-x) + 3f(x) = \sin(x) \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right), \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} + \frac{1}{7}\sin(x) \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} + \frac{1}{7}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)} + \frac{1}{7}\sin(x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 7. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad 9f'(-x)+f(x)=e^x &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad 9\left(g'(-x)+h'(-x)\right)+(g(x)+h(x))=e^x\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(9h'(x)+g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-9g'(x)+h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(-x)}+\frac{1}{2}\,e^x}_{\text{paire}}+\underbrace{-\frac{1}{2}\,e^{(-x)}+\frac{1}{2}\,e^x}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} 9h'(x)+g(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(-x)}+\frac{1}{2}\,e^x\\ -9g'(x)+h(x) &=& -\frac{1}{2}\,e^{(-x)}+\frac{1}{2}\,e^x\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{9} & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}\frac{1}{18}\,e^{(-x)}-\frac{1}{18}\,e^x\\ \frac{1}{18}\,e^{(-x)}+\frac{1}{18}\,e^x\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{9}i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{18}\,e^{(-x)}-\frac{1}{18}\,e^x\\ \frac{1}{18}\,e^{(-x)}+\frac{1}{18}\,e^x\end{pmatrix}\\ &=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{18}\,e^{(-x)}-\frac{1}{18}\,e^x\\ \frac{1}{18}\,e^{(-x)}+\frac{1}{18}\,e^x\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{9}i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}-\left(\frac{1}{36}i-\frac{1}{36}\right)\,e^{(-x)}-\left(\frac{1}{36}i+\frac{1}{36}\right)\,e^x\\ \left(\frac{1}{36}i+\frac{1}{36}\right)\,e^{(-x)}+\left(\frac{1}{36}i-\frac{1}{36}\right)\,e^x\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}i\,z_1(x)\\ -\frac{1}{9}i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\left(\frac{1}{36}i-\frac{1}{36}\right)\,e^{(-x)}-\left(\frac{1}{36}i+\frac{1}{36}\right)\,e^x\\ \left(\frac{1}{36}i+\frac{1}{36}\right)\,e^{(-x)}+\left(\frac{1}{36}i-\frac{1}{36}\right)\,e^x\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& \frac{1}{9}i\,z_1(x)-\left(\frac{1}{36}i-\frac{1}{36}\right)\,e^{(-x)}-\left(\frac{1}{36}i+\frac{1}{36}\right)\,e^x\\ z_2'(x) &=& -\frac{1}{9}i\,z_2(x)+\left(\frac{1}{36}i+\frac{1}{36}\right)\,e^{(-x)}+\left(\frac{1}{36}i-\frac{1}{36}\right)\,e^x\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{9}i\,x\right)}+\left(\frac{5}{164}i-\frac{1}{41}\right)\,e^{(-x)}-\left(\frac{5}{164}i+\frac{1}{41}\right)\,e^x,$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{\left(-\frac{1}{9}i\,x\right)}-\left(\frac{5}{164}i+\frac{1}{41}\right)\,e^{(-x)}+\left(\frac{5}{164}i-\frac{1}{41}\right)\,e^x,$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{9}i\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{9}i\,x\right)}-\frac{2}{41}\,e^{(-x)}-\frac{2}{41}\,e^x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{9}i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{9}i\,x\right)} - \frac{5}{82}\,e^{(-x)} + \frac{5}{82}\,e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 9f'(-x) + f(x) = e^{x} \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{9}\,x\right) - \frac{2}{41}\,e^{(-x)} - \frac{2}{41}\,e^{x}, \quad h(x) = -2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{9}\,x\right) - \frac{5}{82}\,e^{(-x)} + \frac{5}{82}\,e^{x} \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{9}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{9}\,x\right) - \frac{9}{82}\,e^{(-x)} + \frac{1}{82}\,e^{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{9}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{9}\,x\right) - \frac{9}{82}\,e^{(-x)} + \frac{1}{82}\,e^{x} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 8. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 8f'(-x) + 2f(x) = \cos(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 8\left(g'(-x) + h'(-x)\right) + 2\,(g(x) + h(x)) = \cos(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(8h'(x) + 2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-8g'(x) + 2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 8h'(x) + 2g(x) & = & \cos(x) \\ -8g'(x) + 2h(x) & = & 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8}\,\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8}\,\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8}\,\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{16}i\,\cos(x) \\ \frac{1}{16}i\,\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}i\,z_1(x) \\ -\frac{1}{4}i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{16}i\,\cos(x) \\ \frac{1}{16}i\,\cos(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & \frac{1}{4}i\,z_1(x)-\frac{1}{16}i\,\cos(x)\\ z_2'(x) & = & -\frac{1}{4}i\,z_2(x)+\frac{1}{16}i\,\cos(x)\end{array}\right.$$
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{4}i\,x\right)}-\frac{1}{60}\cos(x)-\frac{1}{15}i\,\sin(x)\,,$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{\left(-\frac{1}{4}i\,x\right)}-\frac{1}{60}\cos(x)+\frac{1}{15}i\,\sin(x)\,,$$
avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\ i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{4}i\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{4}i\,x\right)}-\frac{1}{30}\cos(x)\,,$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{4}i\,x\right)}-i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{4}i\,x\right)}+\frac{2}{15}\sin(x)\,.$$
Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :
$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ 8f'(-x)+2f(x)=\cos(x)\\ \iff&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{4}\,x\right)-\frac{1}{30}\cos(x)\,,\quad h(x)=-2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{4}\,x\right)+\frac{2}{15}\sin(x)\\ \iff&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{4}\,x\right)-2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{4}\,x\right)-\frac{1}{30}\cos(x)+\frac{2}{15}\sin(x)\,.\end{aligned}$$
Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :
$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\quad\mathbb{R}\\ x&\mapsto\quad 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{4}\,x\right)-2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{4}\,x\right)-\frac{1}{30}\cos(x)+\frac{2}{15}\sin(x)\end{cases}\mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$
(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 9. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$
et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$
autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(-x)+18f(x)=e^{(2\,x)}&\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad \big(g'(-x)+h'(-x)\big)+18\,(g(x)+h(x))=e^{(2\,x)}\\ &\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(h'(x)+18g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(-g'(x)+18h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{paire}}+\underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{impaire}}\\ &\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}h'(x)+18g(x)&=&\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\\ -g'(x)+18h(x)&=&\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\end{array}\right.\end{aligned}$$
où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&18\\ -18&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$.
Le système ci-dessus équivaut alors à :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\\ \frac{1}{2}e^{(2\,x)}+\frac{1}{2}e^{(-2\,x)}\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 18i & 0 \\ 0 & -18i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 18i & 0 \\ 0 & -18i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 18i\,z_1(x) \\ -18i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= 18i\,z_1(x) - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ z_2'(x) &= -18i\,z_2(x) + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(18i\,x)} - \left(\frac{5}{328}i - \frac{1}{82}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{5}{328}i + \frac{1}{82}\right)\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-18i\,x)} + \left(\frac{5}{328}i + \frac{1}{82}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{5}{328}i - \frac{1}{82}\right)\,e^{(-2\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(18i\,x)} + \beta e^{(-18i\,x)} + \frac{1}{41}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{41}\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(18i\,x)} - i\,\beta e^{(-18i\,x)} + \frac{5}{164}\,e^{(2\,x)} - \frac{5}{164}\,e^{(-2\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + 18f(x) = e^{(2\,x)} \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(18\,x) + \frac{1}{41}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{41}\,e^{(-2\,x)}, \quad h(x) = -2\,\alpha\sin(18\,x) + \frac{5}{164}\,e^{(2\,x)} - \frac{5}{164}\,e^{(-2\,x)} \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(18\,x) - 2\,\alpha\sin(18\,x) + \frac{9}{164}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{164}\,e^{(-2\,x)}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(18\,x) - 2\,\alpha\sin(18\,x) + \frac{9}{164}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{164}\,e^{(-2\,x)} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 10. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - f(x) = -2 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g''(-x) + h''(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = -2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-g''(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(h''(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-2}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -g''(x) - g(x) &= -2 \\ h''(x) - h(x) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta \cos(x) + \alpha \sin(x) + 2,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta e^{(-x)} + \gamma e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) - f(x) = -2 \\ \iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta \cos(x) + 2, \quad h(x) = -\gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} \\ \iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta \cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta \cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} + 2 \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 11. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - f(x) = 1 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g''(-x) + h''(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-g''(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(h''(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{1}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -g''(x) - g(x) &= 1 \\ h''(x) - h(x) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta \cos(x) + \alpha \sin(x) - 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta e^{(-x)} + \gamma e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) - f(x) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos(x) - 1, \quad h(x) = -\gamma e^{(-x)} + \gamma e^x \\ \Longleftrightarrow & \exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^x - 1. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^x - 1 \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 12. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) - f(x) = 1 & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - (g(x) + h(x)) = 1 \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2g''(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{1}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -2g''(x) - g(x) & = \quad 1 \\ 2h''(x) - h(x) & = \quad 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \delta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ -2f''(-x) - f(x) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - 1, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} \\ \Longleftrightarrow & \exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 1. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 1 \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 13. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5f'(-x) - f(x) = x^2 + x + 6 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -5\left(g'(-x) + h'(-x)\right) - (g(x) + h(x)) = x^2 + x + 6 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-5h'(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(5g'(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{x^2 + 6}_{\text{paire}} + \underbrace{x}_{\text{impaire}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -5h'(x) - g(x) &=& x^2 + 6 \\ 5g'(x) - h(x) &=& x \end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\,x \\ -\frac{1}{5}\,x^2 - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\,x \\ -\frac{1}{5}\,x^2 - \frac{6}{5} \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\,x \\ -\frac{1}{5}\,x^2 - \frac{6}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{10}i\,x^2 + \frac{1}{10}\,x + \frac{3}{5}i \\ -\frac{1}{10}i\,x^2 + \frac{1}{10}\,x - \frac{3}{5}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}i\,z_1(x) \\ -\frac{1}{5}i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{10}i\,x^2 + \frac{1}{10}\,x + \frac{3}{5}i \\ -\frac{1}{10}i\,x^2 + \frac{1}{10}\,x - \frac{3}{5}i \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& \frac{1}{5}i\,z_1(x) + \frac{1}{10}i\,x^2 + \frac{1}{10}\,x + \frac{3}{5}i \\ z_2'(x) &=& -\frac{1}{5}i\,z_2(x) - \frac{1}{10}i\,x^2 + \frac{1}{10}\,x - \frac{3}{5}i \end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + \alpha e^{\left(\frac{1}{5}i\,x\right)} + \frac{11}{2}i\,x + \frac{49}{2},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + \beta e^{\left(-\frac{1}{5}i\,x\right)} - \frac{11}{2}i\,x + \frac{49}{2},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -x^2 + \alpha e^{\left(\frac{1}{5}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{5}i\,x\right)} + 49,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{5}i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{5}i\,x\right)} - 11\,x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ -5f'(-x) - f(x) = x^2 + x + 6 \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right) + 49, \quad h(x) = -2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\,x\right) - 11\,x \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = -x^2 + 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\,x\right) - 11\,x + 49.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 + 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\,x\right) - 11\,x + 49 \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 14. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - 3f(x) = e^{(2\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\left(g'(-x) + h'(-x)\right) - 3\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(2\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-h'(x) - 3g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(g'(x) - 3h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -h'(x) - 3g(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ g'(x) - 3h(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ -\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ -\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ -\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ -\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i\,z_1(x) \\ -3i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ -\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) & = & 3i\,z_1(x) + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ z_2'(x) & = & -3i\,z_2(x) - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(3i\,x)} + \left(\frac{5}{52}i - \frac{1}{52}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{5}{52}i + \frac{1}{52}\right)\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-3i\,x)} - \left(\frac{5}{52}i + \frac{1}{52}\right) e^{(2\,x)} + \left(\frac{5}{52}i - \frac{1}{52}\right) e^{(-2\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(3i\,x)} + \beta e^{(-3i\,x)} - \frac{1}{26}\, e^{(2\,x)} - \frac{1}{26}\, e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(3i\,x)} - i\,\beta e^{(-3i\,x)} - \frac{5}{26}\, e^{(2\,x)} + \frac{5}{26}\, e^{(-2\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) - 3f(x) = e^{(2\,x)} \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos(3\,x) - \frac{1}{26}\, e^{(2\,x)} - \frac{1}{26}\, e^{(-2\,x)}, \quad h(x) = -2\,\alpha \sin(3\,x) - \frac{5}{26}\, e^{(2\,x)} + \frac{5}{26}\, e^{(-2\,x)} \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos(3\,x) - 2\,\alpha \sin(3\,x) - \frac{3}{13}\, e^{(2\,x)} + \frac{2}{13}\, e^{(-2\,x)}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha \cos(3\,x) - 2\,\alpha \sin(3\,x) - \frac{3}{13}\, e^{(2\,x)} + \frac{2}{13}\, e^{(-2\,x)} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 15. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) + 3f(x) = -3\,x^2 - 7\,x - 1 & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g'(-x) + h'(-x)\big) + 3\,(g(x) + h(x)) = -3\,x^2 - 7\,x - 1 \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-h'(x) + 3g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(g'(x) + 3h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-3\,x^2 - 1}_{\text{paire}} + \underbrace{-7\,x}_{\text{impaire}} \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -h'(x) + 3g(x) & = \quad -3\,x^2 - 1 \\ g'(x) + 3h(x) & = \quad -7\,x \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -7\,x \\ 3\,x^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.

En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}-7\,x\\3\,x^2+1\end{pmatrix}\\&=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}-7\,x\\3\,x^2+1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3i&0\\0&-3i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}i\,x^2-\frac{7}{2}\,x+\frac{1}{2}i\\-\frac{3}{2}i\,x^2-\frac{7}{2}\,x-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3i\,z_1(x)\\-3i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}i\,x^2-\frac{7}{2}\,x+\frac{1}{2}i\\-\frac{3}{2}i\,x^2-\frac{7}{2}\,x-\frac{1}{2}i\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\left\{\begin{array}{lcl}z_1'(x)&=&3i\,z_1(x)+\frac{3}{2}i\,x^2-\frac{7}{2}\,x+\frac{1}{2}i\\z_2'(x)&=&-3i\,z_2(x)-\frac{3}{2}i\,x^2-\frac{7}{2}\,x-\frac{1}{2}i\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=-\frac{1}{2}\,x^2+\alpha e^{(3i\,x)}-\frac{5}{6}i\,x-\frac{4}{9},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=-\frac{1}{2}\,x^2+\beta e^{(-3i\,x)}+\frac{5}{6}i\,x-\frac{4}{9},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=-x^2+\alpha e^{(3i\,x)}+\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{8}{9},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=-i\,\alpha e^{(3i\,x)}+i\,\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{5}{3}\,x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ -f'(-x)+3f(x)=-3\,x^2-7\,x-1\\\Longleftrightarrow&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-x^2+2\,\alpha\cos(3\,x)-\frac{8}{9},\quad h(x)=2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{5}{3}\,x\\\Longleftrightarrow&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=-x^2+2\,\alpha\cos(3\,x)+2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{5}{3}\,x-\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&-x^2+2\,\alpha\cos(3\,x)+2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{5}{3}\,x-\frac{8}{9}\end{array}\right.\mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 16. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad\text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad -3f''(-x)+2f(x)=\sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad -3\left(g''(-x)+h''(-x)\right)+2\left(g(x)+h(x)\right)=\sin(x)\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-3g''(x)+2g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(3h''(x)+2h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} -3g''(x)+2g(x) &=& 0\\ 3h''(x)+2h(x) &=& \sin(x)\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)+\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)-\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ -3f''(-x)+2f(x)=\sin(x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)},\quad h(x)=\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)-\sin(x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)-\sin(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\beta e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)-\sin(x)\end{array}\right.\ \mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 17. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad -2f'(-x)-f(x)=\cos(2x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad -2\left(g'(-x)+h'(-x)\right)-\left(g(x)+h(x)\right)=\cos(2x)\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-2h'(x)-g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(2g'(x)-h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(2x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} -2h'(x)-g(x) &=& \cos(2x)\\ 2g'(x)-h(x) &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\cos(2x)\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}i\cos(2x) \\ -\frac{1}{4}i\cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\, z_1(x) \\ -\frac{1}{2}i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}i\cos(2x) \\ -\frac{1}{4}i\cos(2x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) = \frac{1}{2}i\, z_1(x) + \frac{1}{4}i\cos(2x) \\ z_2'(x) = -\frac{1}{2}i\, z_2(x) - \frac{1}{4}i\cos(2x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} + \frac{1}{30}\cos(2x) + \frac{2}{15}i\sin(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} + \frac{1}{30}\cos(2x) - \frac{2}{15}i\sin(2x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} + \frac{1}{15}\cos(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} - \frac{4}{15}\sin(2x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \ -2f'(-x) - f(x) = \cos(2x) \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = 2\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{15}\cos(2x), \quad h(x) = -2\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{4}{15}\sin(2x) \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x) + h(x) = 2\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 2\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{15}\cos(2x) - \frac{4}{15}\sin(2x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 2\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{15}\cos(2x) - \frac{4}{15}\sin(2x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 18. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x), \ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -5f''(-x)-f(x)=\sin(x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad -5\left(g''(-x)+h''(-x)\right)-(g(x)+h(x))=\sin(x)\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-5g''(x)-g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(5h''(x)-h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}-5g''(x)-g(x)&=&0\\ 5h''(x)-h(x)&=&\sin(x)\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}+\delta e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\frac{1}{6}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ -5f''(-x)-f(x)=\sin(x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right),\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\frac{1}{6}\sin(x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\frac{1}{6}\sin(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\quad\mathbb{R}\\ x&\mapsto\quad\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\frac{1}{6}\sin(x)\end{cases}\ \mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 19. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(-x)+f(x)=\sin(x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left(g'(-x)+h'(-x)\right)+(g(x)+h(x))=\sin(x)\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(h'(x)+g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-g'(x)+h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}h'(x)+g(x)&=&0\\ -g'(x)+h(x)&=&\sin(x)\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}-\sin(x)\\0\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(x) \\ -\frac{1}{2}\sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\, z_1(x) \\ -i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(x) \\ -\frac{1}{2}\sin(x) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\, z_1(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \\ z_2'(x) &= -i\, z_2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4} i\, x e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4} i\, x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4} i\, x e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4} i\, x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4}\, x e^{(i\,x)} - i\,\beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4}\, x e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8} i\, e^{(i\,x)} + \frac{1}{8} i\, e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + f(x) = \sin(x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(x) - \frac{1}{2}\, x\sin(x) + \frac{1}{4}\,\cos(x), \quad h(x) = -\frac{1}{2}\, x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(x) - \frac{1}{2}\, x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\, x\sin(x) + \frac{1}{4}\,\cos(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(x) - \frac{1}{2}\, x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\, x\sin(x) + \frac{1}{4}\,\cos(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 20. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad 2f'(-x)+2f(x)=\cos(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad 2\left(g'(-x)+h'(-x)\right)+2\left(g(x)+h(x)\right)=\cos(x)\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(2h'(x)+2g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-2g'(x)+2h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}2h'(x)+2g(x)&=&\cos(x)\\ -2g'(x)+2h(x)&=&0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\cos(x)\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\cos(x)\end{pmatrix}\\ &=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\cos(x)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}i\cos(x)\\ \frac{1}{4}i\cos(x)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}i\,z_1(x)\\-i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}i\cos(x)\\ \frac{1}{4}i\cos(x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}z_1'(x)&=&i\,z_1(x)-\frac{1}{4}i\cos(x)\\ z_2'(x)&=&-i\,z_2(x)+\frac{1}{4}i\cos(x)\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{(i\,x)}-\frac{1}{8}i\,xe^{(i\,x)}+\frac{1}{16}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{(-i\,x)}+\frac{1}{8}i\,xe^{(-i\,x)}+\frac{1}{16}\,e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{(i\,x)}-\frac{1}{8}i\,xe^{(i\,x)}+\beta e^{(-i\,x)}+\frac{1}{8}i\,xe^{(-i\,x)}+\frac{1}{16}\,e^{(i\,x)}+\frac{1}{16}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x)=i\,\alpha e^{(i\,x)}+\frac{1}{8}\,xe^{(i\,x)}-i\,\beta e^{(-i\,x)}+\frac{1}{8}\,xe^{(-i\,x)}-\frac{1}{16}i\,e^{(i\,x)}+\frac{1}{16}i\,e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(-x)+2f(x)=\cos(x)\\ \Longleftrightarrow&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos(x)+\frac{1}{4}\,x\sin(x)+\frac{1}{8}\,\cos(x),\quad h(x)=\frac{1}{4}\,x\cos(x)-2\,\alpha\sin(x)+\frac{1}{8}\,\sin(x)\\ \Longleftrightarrow&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos(x)+\frac{1}{4}\,x\cos(x)-2\,\alpha\sin(x)+\frac{1}{4}\,x\sin(x)+\frac{1}{8}\,\cos(x)+\frac{1}{8}\,\sin(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&2\,\alpha\cos(x)+\frac{1}{4}\,x\cos(x)-2\,\alpha\sin(x)+\frac{1}{4}\,x\sin(x)+\frac{1}{8}\,\cos(x)+\frac{1}{8}\,\sin(x)\end{array}\right.\ \Big|\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 21. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -4f''(-x) + 2f(x) = e^{(14\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -4\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + 2\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(14\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-4g''(x) + 2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(4h''(x) + 2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(14\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-14\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(14\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-14\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} -4g''(x) + 2g(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(14\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-14\,x)} \\ 4h''(x) + 2h(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(14\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-14\,x)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{1564}\,e^{(14\,x)} - \frac{1}{1564}\,e^{(-14\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{1572}\,e^{(14\,x)} - \frac{1}{1572}\,e^{(-14\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -4f''(-x) + 2f(x) = e^{(14\,x)} \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{1564}\,e^{(14\,x)} - \frac{1}{1564}\,e^{(-14\,x)}, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{1572}\,e^{(14\,x)} - \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{307326}\,e^{(14\,x)} - \frac{196}{153663}\,e^{(-14\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{307326}\,e^{(14\,x)} - \frac{196}{153663}\,e^{(-14\,x)} \end{array}\right. \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 22. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - f(x) = e^x &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g'(-x) + h'(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = e^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-h'(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(g'(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x}_{\text{impaire}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -h'(x) - g(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \\ g'(x) - h(x) &=& -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \\ -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \\ -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^x \\ -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^x \\ -\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\,z_1(x) \\ -i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^x \\ -\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^x \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& i\,z_1(x) + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^x \\ z_2'(x) &=& -i\,z_2(x) - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^x \end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4} i\, e^{(-x)} + \frac{1}{4} i\, e^x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4} i\, e^{(-x)} - \frac{1}{4} i\, e^x,$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(i\,x)} - i\,\beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) - f(x) = e^x \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos(x), \quad h(x) = -2\,\alpha \sin(x) + \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos(x) - 2\,\alpha \sin(x) + \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^x.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^{x} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 23. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + 3f(x) = e^{(3\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + 3\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(3\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2g''(x) + 3g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x) + 3h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -2g''(x) + 3g(x) &= \frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} \\ 2h''(x) + 3h(x) &= \frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} - \frac{1}{30}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{30}\,e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right) + \gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right) + \frac{1}{42}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{42}\,e^{(-3\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -2f''(-x) + 3f(x) = e^{(3\,x)} \\
\iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} - \frac{1}{30}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{30}\,e^{(-3\,x)}, \quad h(x) = \gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right) + \frac{1}{42}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{42}\,e^{(-3\,x)} \\
\iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} + \gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right) - \frac{1}{105}\,e^{(3\,x)} - \frac{2}{35}\,e^{(-3\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)} + \gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right) - \frac{1}{105}\,e^{(3\,x)} - \frac{2}{35}\,e^{(-3\,x)} \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 24. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad f''(-x) + f(x) = \cos(4x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(g''(-x) + h''(-x)\big) + (g(x) + h(x)) = \cos(4x)\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\big(g''(x) + g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-h''(x) + h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(4x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} g''(x) + g(x) & = & \cos(4x)\\ -h''(x) + h(x) & = & 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \beta\cos(x) + \alpha\sin(x) - \frac{1}{15}\cos(4x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \delta e^{(-x)} + \gamma e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) + f(x) = \cos(4x)\\ \Longleftrightarrow\ &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos(x) - \frac{1}{15}\cos(4x),\quad h(x) = -\gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x}\\ \Longleftrightarrow\ &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} - \frac{1}{15}\cos(4x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} - \frac{1}{15}\cos(4x)\end{array}\right. \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 25. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad 5f'(-x) + 4f(x) = e^{(3x)} &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad 5\big(g'(-x) + h'(-x)\big) + 4(g(x) + h(x)) = e^{(3x)}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\big(5h'(x) + 4g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-5g'(x) + 4h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}e^{(3x)} + \frac{1}{2}e^{(-3x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{(3x)} - \frac{1}{2}e^{(-3x)}}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} 5h'(x) + 4g(x) & = & \frac{1}{2}e^{(3x)} + \frac{1}{2}e^{(-3x)}\\ -5g'(x) + 4h(x) & = & \frac{1}{2}e^{(3x)} - \frac{1}{2}e^{(-3x)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}e^{(3x)} + \frac{1}{10}e^{(-3x)}\\ \frac{1}{10}e^{(3x)} + \frac{1}{10}e^{(-3x)}\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}i & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{10}\,e^{(-3\,x)} \\ \frac{1}{10}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{10}\,e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{10}\,e^{(-3\,x)} \\ \frac{1}{10}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{10}\,e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}i & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{20}i + \frac{1}{20}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{20}i - \frac{1}{20}\right) e^{(-3\,x)} \\ \left(\frac{1}{20}i - \frac{1}{20}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{20}i + \frac{1}{20}\right) e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}i\,z_1(x) \\ -\frac{4}{5}i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{20}i + \frac{1}{20}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{20}i - \frac{1}{20}\right) e^{(-3\,x)} \\ \left(\frac{1}{20}i - \frac{1}{20}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{20}i + \frac{1}{20}\right) e^{(-3\,x)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) = \frac{4}{5}i\,z_1(x) - \left(\frac{1}{20}i + \frac{1}{20}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{20}i - \frac{1}{20}\right) e^{(-3\,x)} \\ z_2'(x) = -\frac{4}{5}i\,z_2(x) + \left(\frac{1}{20}i - \frac{1}{20}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{20}i + \frac{1}{20}\right) e^{(-3\,x)} \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{4}{5}i\,x\right)} - \left(\frac{19}{964}i + \frac{11}{964}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{19}{964}i - \frac{11}{964}\right) e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{4}{5}i\,x\right)} + \left(\frac{19}{964}i - \frac{11}{964}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{19}{964}i + \frac{11}{964}\right) e^{(-3\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{4}{5}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{4}{5}i\,x\right)} - \frac{11}{482}\,e^{(3\,x)} - \frac{11}{482}\,e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{4}{5}i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{4}{5}i\,x\right)} + \frac{19}{482}\,e^{(3\,x)} - \frac{19}{482}\,e^{(-3\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 5f'(-x) + 4f(x) = e^{(3\,x)} \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{4}{5}\,x\right) - \frac{11}{482}\,e^{(3\,x)} - \frac{11}{482}\,e^{(-3\,x)}, \quad h(x) = -2\,\alpha\sin\left(\frac{4}{5}\,x\right) + \frac{19}{482}\,e^{(3\,x)} - \frac{19}{482}\,e^{(-3\,x)} \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{4}{5}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{4}{5}\,x\right) + \frac{4}{241}\,e^{(3\,x)} - \frac{15}{241}\,e^{(-3\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\,\alpha\cos\left(\frac{4}{5}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{4}{5}\,x\right) + \frac{4}{241}\,e^{(3\,x)} - \frac{15}{241}\,e^{(-3\,x)} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 26. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x)+f(x)=\sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g'(-x)+h'(-x)\right)+(g(x)+h(x))=\sin(x)\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2h'(x)+g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(2g'(x)+h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} -2h'(x)+g(x) &=& 0\\ 2g'(x)+h(x) &=& \sin(x)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin(x)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin(x)\\ 0\end{pmatrix}\\
&= DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin(x)\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\sin(x)\\ \frac{1}{4}\sin(x)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}i\,z_1(x)\\ -\frac{1}{2}i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\sin(x)\\ \frac{1}{4}\sin(x)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} z_1'(x) &=& \frac{1}{2}i\,z_1(x)+\frac{1}{4}\sin(x)\\ z_2'(x) &=& -\frac{1}{2}i\,z_2(x)+\frac{1}{4}\sin(x)\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{1}{3}\cos(x)-\frac{1}{6}i\sin(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x)=\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{1}{3}\cos(x)+\frac{1}{6}i\sin(x),$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{2}{3}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x)=-i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)}+i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{1}{3}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -2f'(-x)+f(x)=\sin(x)\\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{2}{3}\cos(x), \quad h(x)=2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{3}\sin(x)\\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{2}{3}\cos(x)-\frac{1}{3}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{2}{3}\,\cos(x) - \frac{1}{3}\,\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 27. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \; h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -39f'(-x) + f(x) = \sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -39\left(g'(-x) + h'(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = \sin(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-39h'(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(39g'(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -39h'(x) + g(x) & = & 0 \\ 39g'(x) + h(x) & = & \sin(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{39} \\ \frac{1}{39} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$.
Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{39}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{39}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{39}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{39}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{39}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{39}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{39}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{78}\sin(x) \\ \frac{1}{78}\sin(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{39}i\,z_1(x) \\ -\frac{1}{39}i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{78}\sin(x) \\ \frac{1}{78}\sin(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) & = & \frac{1}{39}i\,z_1(x) + \frac{1}{78}\sin(x) \\ z_2'(x) & = & -\frac{1}{39}i\,z_2(x) + \frac{1}{78}\sin(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{39}i\,x\right)} - \frac{39}{3040}\cos(x) - \frac{1}{3040}i\sin(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{39}i\,x\right)} - \frac{39}{3040}\cos(x) + \frac{1}{3040}i\sin(x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{39} i\, x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{39} i\, x\right)} - \frac{39}{1520} \cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\, \alpha e^{\left(\frac{1}{39} i\, x\right)} + i\, \beta e^{\left(-\frac{1}{39} i\, x\right)} - \frac{1}{1520} \sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ -39 f'(-x) + f(x) = \sin(x) \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{39}\, x\right) - \frac{39}{1520} \cos(x), \quad h(x) = 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{39}\, x\right) - \frac{1}{1520} \sin(x) \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{39}\, x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{39}\, x\right) - \frac{39}{1520} \cos(x) - \frac{1}{1520} \sin(x). \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{39}\, x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{39}\, x\right) - \frac{39}{1520} \cos(x) - \frac{1}{1520} \sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 28. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - 13 f(x) = e^{(3\,x)} & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(g''(-x) + h''(-x)\right) - 13\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(3\,x)} \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(g''(x) - 13 g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-h''(x) - 13 h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{(3\,x)} + \frac{1}{2} e^{(-3\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{(3\,x)} - \frac{1}{2} e^{(-3\,x)}}_{\text{impaire}} \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) - 13 g(x) & = \frac{1}{2} e^{(3\,x)} + \frac{1}{2} e^{(-3\,x)} \\ -h''(x) - 13 h(x) & = \frac{1}{2} e^{(3\,x)} - \frac{1}{2} e^{(-3\,x)} \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\sqrt{13} x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{13} x\right)} - \frac{1}{8} e^{(3\,x)} - \frac{1}{8} e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\sqrt{13} x\right) + \gamma \sin\left(\sqrt{13} x\right) - \frac{1}{44} e^{(3\,x)} + \frac{1}{44} e^{(-3\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) - 13 f(x) = e^{(3\,x)} \\ \Longleftrightarrow & \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\sqrt{13} x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{13} x\right)} - \frac{1}{8} e^{(3\,x)} - \frac{1}{8} e^{(-3\,x)}, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\sqrt{13} x\right) - \frac{1}{44} e^{(3\,x)} + \frac{1}{44} e^{(-3\,x)} \\ \Longleftrightarrow & \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\sqrt{13} x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{13} x\right)} + \gamma \sin\left(\sqrt{13} x\right) - \frac{13}{88} e^{(3\,x)} - \frac{9}{88} e^{(-3\,x)}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\sqrt{13}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{13}x\right)} + \gamma \sin\left(\sqrt{13}x\right) - \frac{13}{88}\, e^{(3\,x)} - \frac{9}{88}\, e^{(-3\,x)} \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 29. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \ h'(x) = h'(-x), \quad \text{ et : } \quad g''(x) = g''(-x), \ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -7f''(-x) + 3f(x) = x &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -7\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + 3\left(g(x) + h(x)\right) = x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-7g''(x) + 3g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(7h''(x) + 3h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{x}_{\text{impaire}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -7g''(x) + 3g(x) & = & 0 \\ 7h''(x) + 3h(x) & = & x \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right) + \gamma \sin\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{3}x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, \ -7f''(-x) + 3f(x) = x \\ \iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)}, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{3}x \\ \iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{3}x. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{3}x \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 30. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x)+f(x)=\sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g'(-x)+h'(-x)\right)+(g(x)+h(x))=\sin(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2h'(x)+g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(2g'(x)+h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2h'(x)+g(x) &=& 0 \\ 2g'(x)+h(x) &=& \sin(x) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} Z(x)+\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) \\ \frac{1}{4}\sin(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\, z_1(x) \\ -\frac{1}{2}i\, z_2(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) \\ \frac{1}{4}\sin(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& \frac{1}{2}i\, z_1(x)+\frac{1}{4}\sin(x) \\ z_2'(x) &=& -\frac{1}{2}i\, z_2(x)+\frac{1}{4}\sin(x) \end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{1}{3}\cos(x)-\frac{1}{6}i\sin(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x)=\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{1}{3}\cos(x)+\frac{1}{6}i\sin(x),$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{2}{3}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x)=-i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)}+i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)}-\frac{1}{3}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \ -2f'(-x)+f(x)=\sin(x) \\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{2}{3}\cos(x), \quad h(x)=2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{3}\sin(x) \\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{2}{3}\cos(x)-\frac{1}{3}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) + 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{2}{3}\,\cos(x) - \frac{1}{3}\,\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 31. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -6f'(-x) + 2f(x) = e^{(2\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -6\left(g'(-x) + h'(-x)\right) + 2\,(g(x)+h(x)) = e^{(2\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-6h'(x)+2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(6g'(x)+2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -6h'(x)+2g(x) &= \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ 6g'(x)+2h(x) &= \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{12}\,e^{(-2\,x)} \\ -\frac{1}{12}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{12}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{12}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{12}\,e^{(-2\,x)} \\ -\frac{1}{12}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{12}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{12}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{12}\,e^{(-2\,x)} \\ -\frac{1}{12}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{12}\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{24}i - \frac{1}{24}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{24}i + \frac{1}{24}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ \left(\frac{1}{24}i + \frac{1}{24}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{24}i - \frac{1}{24}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i\,z_1(x) \\ -\frac{1}{3}i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{24}i - \frac{1}{24}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{24}i + \frac{1}{24}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ \left(\frac{1}{24}i + \frac{1}{24}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{24}i - \frac{1}{24}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= \frac{1}{3}i\,z_1(x) - \left(\frac{1}{24}i - \frac{1}{24}\right)\,e^{(2\,x)} - \left(\frac{1}{24}i + \frac{1}{24}\right)\,e^{(-2\,x)} \\ z_2'(x) &= -\frac{1}{3}i\,z_2(x) + \left(\frac{1}{24}i + \frac{1}{24}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{1}{24}i - \frac{1}{24}\right)\,e^{(-2\,x)} \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{3}i\,x\right)} - \left(\frac{5}{296}i - \frac{7}{296}\right)\,e^{(2\,x)} + \left(\frac{5}{296}i + \frac{7}{296}\right)\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} + \left(\frac{5}{296} i + \frac{7}{296}\right) e^{(2\,x)} - \left(\frac{5}{296} i - \frac{7}{296}\right) e^{(-2\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{3} i\, x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} + \frac{7}{148}\, e^{(2\,x)} + \frac{7}{148}\, e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\, \alpha e^{\left(\frac{1}{3} i\, x\right)} + i\, \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} - \frac{5}{148}\, e^{(2\,x)} + \frac{5}{148}\, e^{(-2\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ -6f'(-x) + 2f(x) = e^{(2\,x)} \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\, x\right) + \frac{7}{148}\, e^{(2\,x)} + \frac{7}{148}\, e^{(-2\,x)}, \quad h(x) = 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\, x\right) - \frac{5}{148}\, e^{(2\,x)} + \frac{5}{148}\, e^{(-2\,x)} \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\, x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\, x\right) + \frac{1}{74}\, e^{(2\,x)} + \frac{3}{37}\, e^{(-2\,x)}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\, x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\, x\right) + \frac{1}{74}\, e^{(2\,x)} + \frac{3}{37}\, e^{(-2\,x)} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 32. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = \cos(x) \Longleftrightarrow & \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(g'(-x) + h'(-x)\right) + \left(g(x) + h(x)\right) = \cos(x) \\ \Longleftrightarrow & \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(h'(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-g'(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\ \Longleftrightarrow & \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} h'(x) + g(x) & = & \cos(x) \\ -g'(x) + h(x) & = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \cos(x)\end{pmatrix}\\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \cos(x)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}i\cos(x)\\ \frac{1}{2}i\cos(x)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} i\,z_1(x)\\ -i\,z_2(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}i\cos(x)\\ \frac{1}{2}i\cos(x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} z_1'(x) &=& i\,z_1(x) - \frac{1}{2}i\cos(x)\\ z_2'(x) &=& -i\,z_2(x) + \frac{1}{2}i\cos(x)\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4}i\,xe^{(i\,x)} + \frac{1}{8}e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}i\,xe^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4}i\,xe^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}i\,xe^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}xe^{(i\,x)} - i\,\beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}xe^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}i\,e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}i\,e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + f(x) = \cos(x)\\ \Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(x), \quad h(x) = \frac{1}{2}x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(x)\\ \Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x)\end{array}\right. \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 33. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - f(x) = \cos(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g'(-x) + h'(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = \cos(x)\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(h'(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-g'(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} h'(x) - g(x) &=& \cos(x)\\ -g'(x) - h(x) &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\cos(x) \\ -\frac{1}{2}i\cos(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\,z_1(x) \\ -i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\cos(x) \\ -\frac{1}{2}i\cos(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\,z_1(x) + \frac{1}{2}i\cos(x) \\ z_2'(x) &= -i\,z_2(x) - \frac{1}{2}i\cos(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}i\,xe^{(i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4}i\,xe^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}i\,xe^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4}i\,xe^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}\,xe^{(i\,x)} + i\,\beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}\,xe^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}i\,e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}i\,e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) - f(x) = \cos(x) \\ \Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x)\,, \quad h(x) = \frac{1}{2}\,x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x) \\ \Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\,x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x)\,. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\,x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 34. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions ← page 3

telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) - 6f(x) = \cos(5\,x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - 6\left(g(x) + h(x)\right) = \cos(5\,x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(2g''(x) - 6g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-2h''(x) - 6h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(5\,x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2g''(x) - 6g(x) & = & \cos(5\,x) \\ -2h''(x) - 6h(x) & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} - \frac{1}{56}\cos(5\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\sqrt{3}x\right) + \gamma \sin\left(\sqrt{3}x\right).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 2f''(-x) - 6f(x) = \cos(5\,x) \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} - \frac{1}{56}\cos(5\,x), \quad h(x) = \gamma \sin\left(\sqrt{3}x\right) \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} + \gamma \sin\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{1}{56}\cos(5\,x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} + \gamma \sin\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{1}{56}\cos(5\,x) \end{array} \right. \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 35. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(-x) - f(x) = -1 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - \left(g(x) + h(x)\right) = -1 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(2g''(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-2h''(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-1}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2g''(x) - g(x) & = & -1 \\ -2h''(x) - h(x) & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+1,$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ 2f''(-x)-f(x)=-1\\ \Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+1,\quad h(x)=\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)\\ \Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+1.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\quad\mathbb{R}\\ x&\mapsto\quad\beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+1\end{cases}\mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 36. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(-x)-f(x)=\sin(x)&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \big(g'(-x)+h'(-x)\big)-(g(x)+h(x))=\sin(x)\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(h'(x)-g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(-g'(x)-h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}h'(x)-g(x)&=\ 0\\ -g'(x)-h(x)&=\ \sin(x)\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}-\sin(x)\\0\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}-\sin(x)\\0\end{pmatrix}\\ &=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}-\sin(x)\\0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sin(x)\\-\frac{1}{2}\sin(x)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}i\,z_1(x)\\-i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sin(x)\\-\frac{1}{2}\sin(x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& i\,z_1(x)-\frac{1}{2}\,\sin(x)\\ z_2'(x) &=& -i\,z_2(x)-\frac{1}{2}\,\sin(x)\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{(i\,x)}+\frac{1}{4}i\,xe^{(i\,x)}+\frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{(-i\,x)}-\frac{1}{4}i\,xe^{(-i\,x)}+\frac{1}{8}\,e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{(i\,x)}+\frac{1}{4}i\,xe^{(i\,x)}+\beta e^{(-i\,x)}-\frac{1}{4}i\,xe^{(-i\,x)}+\frac{1}{8}\,e^{(i\,x)}+\frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=-i\,\alpha e^{(i\,x)}+\frac{1}{4}\,xe^{(i\,x)}+i\,\beta e^{(-i\,x)}+\frac{1}{4}\,xe^{(-i\,x)}+\frac{1}{8}i\,e^{(i\,x)}-\frac{1}{8}i\,e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ f'(-x)-f(x)=\sin(x)\\
\Longleftrightarrow\ &\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos(x)-\frac{1}{2}\,x\sin(x)+\frac{1}{4}\,\cos(x)\,,\quad h(x)=\frac{1}{2}\,x\cos(x)+2\,\alpha\sin(x)-\frac{1}{4}\,\sin(x)\\
\Longleftrightarrow\ &\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos(x)+\frac{1}{2}\,x\cos(x)+2\,\alpha\sin(x)-\frac{1}{2}\,x\sin(x)+\frac{1}{4}\,\cos(x)-\frac{1}{4}\,\sin(x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&2\,\alpha\cos(x)+\frac{1}{2}\,x\cos(x)+2\,\alpha\sin(x)-\frac{1}{2}\,x\sin(x)+\frac{1}{4}\,\cos(x)-\frac{1}{4}\,\sin(x)\end{array}\right.\ \mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 37. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad\text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad -f''(-x)+f(x)=\sin(11\,x)\Longleftrightarrow&\ \forall x\in\mathbb{R},\quad -\big(g''(-x)+h''(-x)\big)+(g(x)+h(x))=\sin(11\,x)\\
\Longleftrightarrow&\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(-g''(x)+g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(h''(x)+h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(11\,x)}_{\text{impaire}}\\
\Longleftrightarrow&\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}-g''(x)+g(x)&=&0\\ h''(x)+h(x)&=&\sin(11\,x)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\beta e^{(-x)}+\alpha e^{x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos(x) + \gamma \sin(x) - \frac{1}{120} \sin(11\,x)\,.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) + f(x) = \sin(11\,x) \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{(-x)} + \beta e^{x}, \quad h(x) = \gamma \sin(x) - \frac{1}{120} \sin(11\,x) \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) - \frac{1}{120} \sin(11\,x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) - \frac{1}{120} \sin(11\,x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 38. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) - 4f(x) = \cos(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g'(-x) + h'(-x)\big) - 4\,(g(x) + h(x)) = \cos(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-h'(x) - 4g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(g'(x) - 4h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -h'(x) - 4g(x) & = & \cos(x) \\ g'(x) - 4h(x) & = & 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 4i & 0 \\ 0 & -4i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4i & 0 \\ 0 & -4i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\,\cos(x) \\ -\frac{1}{2}i\,\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4i\,z_1(x) \\ -4i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\,\cos(x) \\ -\frac{1}{2}i\,\cos(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) & = & 4i\,z_1(x) + \frac{1}{2}i\,\cos(x) \\ z_2'(x) & = & -4i\,z_2(x) - \frac{1}{2}i\,\cos(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(4i\,x)} - \frac{2}{15}\cos(x) - \frac{1}{30} i \sin(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-4i\,x)} - \frac{2}{15}\cos(x) + \frac{1}{30} i \sin(x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(4i\,x)} + \beta e^{(-4i\,x)} - \frac{4}{15}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(4i\,x)} - i\,\beta e^{(-4i\,x)} + \frac{1}{15}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) - 4f(x) = \cos(x) \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(4\,x) - \frac{4}{15}\cos(x), \quad h(x) = -2\,\alpha \sin(4\,x) + \frac{1}{15}\sin(x) \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(4\,x) - 2\,\alpha\sin(4\,x) - \frac{4}{15}\cos(x) + \frac{1}{15}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(4\,x) - 2\,\alpha\sin(4\,x) - \frac{4}{15}\cos(x) + \frac{1}{15}\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 39. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = \sin(4\,x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g''(-x) + h''(-x)\big) + (g(x) + h(x)) = \sin(4\,x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(g''(x) + g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-h''(x) + h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(4\,x)}_{\text{impaire}} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) + g(x) &= 0 \\ -h''(x) + h(x) &= \sin(4\,x) \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta\cos(x) + \alpha\sin(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta e^{(-x)} + \gamma e^{x} + \frac{1}{17}\sin(4\,x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) + f(x) = \sin(4\,x)\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos(x)\,,\quad h(x) = -\gamma e^{(-x)} + \gamma e^x + \frac{1}{17}\sin(4\,x)\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^x + \frac{1}{17}\sin(4\,x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^x + \frac{1}{17}\sin(4\,x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 40. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad -f''(-x) - f(x) = x^2 + x + 1 &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad -\big(g''(-x) + h''(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = x^2 + x + 1\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\big(-g''(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(h''(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{x^2+1}_{\text{paire}} + \underbrace{x}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} -g''(x) - g(x) & = & x^2 + 1 \\ h''(x) - h(x) & = & x \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = -x^2 + \beta\cos(x) + \alpha\sin(x) + 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \delta e^{(-x)} + \gamma e^x - x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) - f(x) = x^2 + x + 1\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + \beta\cos(x) + 1,\quad h(x) = -\gamma e^{(-x)} + \gamma e^x - x\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = -x^2 + \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^x - x + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 + \beta\cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^x - x + 1 \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 41. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -15f''(-x) + f(x) = e^{(-2\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -15\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = e^{(-2\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-15g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(15h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -15g''(x) + g(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ 15h''(x) + h(x) & = & -\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} - \frac{1}{118}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{118}\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta\cos\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right) + \gamma\sin\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right) - \frac{1}{122}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{122}\,e^{(-2\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -15f''(-x) + f(x) = e^{(-2\,x)} \\
\iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} - \frac{1}{118}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{118}\,e^{(-2\,x)}, \quad h(x) = \gamma\sin\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right) - \frac{1}{122}\,e^{(2\,x)} + \\
\iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} + \gamma\sin\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right) - \frac{60}{3599}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{3599}\,e^{(-2\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right)} + \gamma\sin\left(\frac{1}{15}\sqrt{15}x\right) - \frac{60}{3599}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{3599}\,e^{(-2\,x)} \end{array}\right. \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 42. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = 3 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = 3 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{3}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2g''(x) + g(x) & = & 3 \\ 2h''(x) + h(x) & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+3,$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ -2f''(-x)+f(x)=3\\
\iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+3,\quad h(x)=\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)\\
\iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+3.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\ \mathbb{R}\\ x&\mapsto\ \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+3\end{cases}\ \middle|\ (\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 43. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad 9f'(-x)-9f(x)=2\iff&\forall x\in\mathbb{R},\quad 9\left(g'(-x)+h'(-x)\right)-9\left(g(x)+h(x)\right)=2\\
\iff&\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(9h'(x)-9g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-9g'(x)-9h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{2}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\
\iff&\forall x\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}9h'(x)-9g(x)&=\ 2\\-9g'(x)-9h(x)&=\ 0\end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{9}\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{9}\end{pmatrix}\\
&=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{9}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\frac{1}{9}i\\-\frac{1}{9}i\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}i\,z_1(x)\\-i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{9}i\\-\frac{1}{9}i\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & i\, z_1(x) + \frac{1}{9} i \\ z_2'(x) & = & -i\, z_2(x) - \frac{1}{9} i \end{array} \right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{9},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{9},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} - \frac{2}{9},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{(i\,x)} + i\,\beta e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ 9f'(-x) - 9f(x) = 2 \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos(x) - \frac{2}{9}, \quad h(x) = 2\,\alpha \sin(x) \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos(x) + 2\,\alpha \sin(x) - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha \cos(x) + 2\,\alpha \sin(x) - \frac{2}{9} \end{array} \right. \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 44. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -5f'(-x) + f(x) = \sin(124\,x) & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -5\left(g'(-x) + h'(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = \sin(124\,x) \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-5h'(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(5g'(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(124\,x)}_{\text{impaire}} \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -5h'(x) + g(x) & = & 0 \\ 5g'(x) + h(x) & = & \sin(124\,x) \end{array} \right. \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \sin(124\,x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sin(124\,x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sin(124\,x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sin(124\,x) \\ \frac{1}{10}\sin(124\,x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}i\,z_1(x) \\ -\frac{1}{5}i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sin(124\,x) \\ \frac{1}{10}\sin(124\,x) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) = \frac{1}{5}i\,z_1(x) + \frac{1}{10}\sin(124\,x) \\ z_2'(x) = -\frac{1}{5}i\,z_2(x) + \frac{1}{10}\sin(124\,x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{5}i\,x\right)} - \frac{310}{384399}\cos(124\,x) - \frac{1}{768798}i\sin(124\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{5}i\,x\right)} - \frac{310}{384399}\cos(124\,x) + \frac{1}{768798}i\sin(124\,x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{5}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{5}i\,x\right)} - \frac{620}{384399}\cos(124\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{5}i\,x\right)} + i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{5}i\,x\right)} - \frac{1}{384399}\sin(124\,x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R}, \ -5f'(-x) + f(x) = \sin(124\,x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{620}{384399}\cos(124\,x), \quad h(x) = 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{1}{384399}\sin(124\,x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right) + 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{620}{384399}\cos(124\,x) - \frac{1}{384399}\sin(124\,x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right) + 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{620}{384399}\cos(124\,x) - \frac{1}{384399}\sin(124\,x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 45. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -3f'(-x)+8f(x)=e^{(2\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -3\left(g'(-x)+h'(-x)\right)+8\left(g(x)+h(x)\right)=e^{(2\,x)}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-3h'(x)+8g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(3g'(x)+8h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{paire}}+\underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{impaire}}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -3h'(x)+8g(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\\ 3g'(x)+8h(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{3}\\ \frac{8}{3} & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{6}\,e^{(-2\,x)}\\ -\frac{1}{6}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{6}\,e^{(-2\,x)}\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix} \frac{8}{3}i & 0\\ 0 & -\frac{8}{3}i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{6}\,e^{(-2\,x)}\\ -\frac{1}{6}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{6}\,e^{(-2\,x)}\end{pmatrix}\\
&=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{6}\,e^{(-2\,x)}\\ -\frac{1}{6}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{6}\,e^{(-2\,x)}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \frac{8}{3}i & 0\\ 0 & -\frac{8}{3}i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)\,e^{(2\,x)}-\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)\,e^{(-2\,x)}\\ \left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)\,e^{(2\,x)}+\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)\,e^{(-2\,x)}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \frac{8}{3}i\,z_1(x)\\ -\frac{8}{3}i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)\,e^{(2\,x)}-\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)\,e^{(-2\,x)}\\ \left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)\,e^{(2\,x)}+\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)\,e^{(-2\,x)}\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& \frac{8}{3}i\,z_1(x)-\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)\,e^{(2\,x)}-\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)\,e^{(-2\,x)}\\ z_2'(x) &=& -\frac{8}{3}i\,z_2(x)+\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)\,e^{(2\,x)}+\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)\,e^{(-2\,x)}\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x)=\alpha e^{\left(\frac{8}{3}i\,x\right)}+\left(\frac{1}{200}i+\frac{7}{200}\right)\,e^{(2\,x)}-\left(\frac{1}{200}i-\frac{7}{200}\right)\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x)=\beta e^{\left(-\frac{8}{3}i\,x\right)}-\left(\frac{1}{200}i-\frac{7}{200}\right)\,e^{(2\,x)}+\left(\frac{1}{200}i+\frac{7}{200}\right)\,e^{(-2\,x)},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{8}{3}i\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{8}{3}i\,x\right)}+\frac{7}{100}\,e^{(2\,x)}+\frac{7}{100}\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x)=-i\,\alpha e^{\left(\frac{8}{3}i\,x\right)}+i\,\beta e^{\left(-\frac{8}{3}i\,x\right)}+\frac{1}{100}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{100}\,e^{(-2\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -3f'(-x)+8f(x)=e^{(2\,x)}\\
\iff&\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{8}{3}\,x\right)+\frac{7}{100}\,e^{(2\,x)}+\frac{7}{100}\,e^{(-2\,x)}, \quad h(x)=2\,\alpha\sin\left(\frac{8}{3}\,x\right)+\frac{1}{100}\,e^{(2\,x)}-\frac{1}{100}\,e^{(-2\,x)}\\
\iff&\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos\left(\frac{8}{3}\,x\right)+2\,\alpha\sin\left(\frac{8}{3}\,x\right)+\frac{2}{25}\,e^{(2\,x)}+\frac{3}{50}\,e^{(-2\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos\left(\frac{8}{3}\,x\right) + 2\,\alpha\sin\left(\frac{8}{3}\,x\right) + \frac{2}{25}\,e^{(2\,x)} + \frac{3}{50}\,e^{(-2\,x)} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 46. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) + 3f(x) = 14\,x - 2 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g''(-x) + h''(-x)\big) + 3\,(g(x) + h(x)) = 14\,x - 2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-g''(x) + 3g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(h''(x) + 3h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-2}_{\text{paire}} + \underbrace{14\,x}_{\text{impaire}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -g''(x) + 3g(x) = -2 \\ h''(x) + 3h(x) = 14\,x \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} - \frac{2}{3},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \gamma\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{14}{3}\,x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) + 3f(x) = 14\,x - 2 \\ \iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} - \frac{2}{3}, \quad h(x) = \gamma\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{14}{3}\,x \\ \iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} + \gamma\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{14}{3}\,x - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\sqrt{3}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{3}x\right)} + \gamma\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{14}{3}\,x - \frac{2}{3} \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 47. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = -x^2 - x &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = -x^2 - x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-x^2}_{\text{paire}} + \underbrace{-x}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -2g''(x) + g(x) &= -x^2 \\ 2h''(x) + h(x) &= -x \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -x^2 + \alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 4,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \ -2f''(-x) + f(x) = -x^2 - x \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = -x^2 + \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 4, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - x \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x) + h(x) = -x^2 + \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - x - 4.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 + \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - x - 4 \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 48. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x), \ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - f(x) = -1 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(g''(-x) + h''(-x)\right) - (g(x) + h(x)) = -1 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(g''(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-h''(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-1}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) - g(x) &= -1 \\ -h''(x) - h(x) &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta e^{(-x)} + \alpha e^{x} + 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos(x) + \gamma \sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) - f(x) = -1\\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + 1, \quad h(x) = \gamma \sin(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) + 1 \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 49. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 33 f'(-x) - 4 f(x) = e^{(5\,x)} &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 33\left(g'(-x) + h'(-x)\right) - 4\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(5\,x)}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(33 h'(x) - 4 g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-33 g'(x) - 4 h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-5\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(5\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-5\,x)}}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 33 h'(x) - 4 g(x) &= \frac{1}{2}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-5\,x)} \\ -33 g'(x) - 4 h(x) &= \frac{1}{2}\,e^{(5\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-5\,x)} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{33} \\ \frac{4}{33} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$.

Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{66}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{66}\,e^{(-5\,x)} \\ \frac{1}{66}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{66}\,e^{(-5\,x)} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{4}{33} i & 0 \\ 0 & -\frac{4}{33} i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1} Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} i \end{pmatrix}$.

En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1} A Y(x) + P^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{66}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{66}\,e^{(-5\,x)} \\ \frac{1}{66}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{66}\,e^{(-5\,x)} \end{pmatrix}\\
&= D P^{-1} Y(x) + P^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{66}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{66}\,e^{(-5\,x)} \\ \frac{1}{66}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{66}\,e^{(-5\,x)} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{33} i & 0 \\ 0 & -\frac{4}{33} i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{132} i - \frac{1}{132}\right) e^{(5\,x)} + \left(\frac{1}{132} i + \frac{1}{132}\right) e^{(-5\,x)} \\ -\left(\frac{1}{132} i + \frac{1}{132}\right) e^{(5\,x)} - \left(\frac{1}{132} i - \frac{1}{132}\right) e^{(-5\,x)} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{33} i\, z_1(x) \\ -\frac{4}{33} i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{132} i - \frac{1}{132}\right) e^{(5\,x)} + \left(\frac{1}{132} i + \frac{1}{132}\right) e^{(-5\,x)} \\ -\left(\frac{1}{132} i + \frac{1}{132}\right) e^{(5\,x)} - \left(\frac{1}{132} i - \frac{1}{132}\right) e^{(-5\,x)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= \frac{4}{33} i\, z_1(x) + \left(\frac{1}{132} i - \frac{1}{132}\right) e^{(5\,x)} + \left(\frac{1}{132} i + \frac{1}{132}\right) e^{(-5\,x)} \\ z_2'(x) &= -\frac{4}{33} i\, z_2(x) - \left(\frac{1}{132} i + \frac{1}{132}\right) e^{(5\,x)} - \left(\frac{1}{132} i - \frac{1}{132}\right) e^{(-5\,x)} \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{4}{33} i\, x\right)} + \left(\frac{161}{108964} i - \frac{169}{108964}\right) e^{(5\, x)} - \left(\frac{161}{108964} i + \frac{169}{108964}\right) e^{(-5\, x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{4}{33} i\, x\right)} - \left(\frac{161}{108964} i + \frac{169}{108964}\right) e^{(5\, x)} + \left(\frac{161}{108964} i - \frac{169}{108964}\right) e^{(-5\, x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{4}{33} i\, x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{4}{33} i\, x\right)} - \frac{169}{54482} e^{(5\, x)} - \frac{169}{54482} e^{(-5\, x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\, \alpha e^{\left(\frac{4}{33} i\, x\right)} + i\, \beta e^{\left(-\frac{4}{33} i\, x\right)} + \frac{161}{54482} e^{(5\, x)} - \frac{161}{54482} e^{(-5\, x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R},\ 33 f'(-x) - 4 f(x) = e^{(5\, x)} \\
\Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\, \alpha \cos\left(\frac{4}{33}\, x\right) - \frac{169}{54482} e^{(5\, x)} - \frac{169}{54482} e^{(-5\, x)}, \quad h(x) = 2\, \alpha \sin\left(\frac{4}{33}\, x\right) + \frac{161}{54482} e^{(5\, x)} - \frac{161}{54482} e^{(-5\, x)} \\
\Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\, \alpha \cos\left(\frac{4}{33}\, x\right) + 2\, \alpha \sin\left(\frac{4}{33}\, x\right) - \frac{4}{27241} e^{(5\, x)} - \frac{165}{27241} e^{(-5\, x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\, \alpha \cos\left(\frac{4}{33}\, x\right) + 2\, \alpha \sin\left(\frac{4}{33}\, x\right) - \frac{4}{27241} e^{(5\, x)} - \frac{165}{27241} e^{(-5\, x)} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 50. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - f(x) = e^{(-9\, x)} & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g''(-x) + h''(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = e^{(-9\, x)} \\
& \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(g''(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-h''(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{(9\, x)} + \frac{1}{2} e^{(-9\, x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2} e^{(9\, x)} + \frac{1}{2} e^{(-9\, x)}}_{\text{impaire}} \\
& \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) - g(x) & = \frac{1}{2} e^{(9\, x)} + \frac{1}{2} e^{(-9\, x)} \\ -h''(x) - h(x) & = -\frac{1}{2} e^{(9\, x)} + \frac{1}{2} e^{(-9\, x)} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta e^{(-x)} + \alpha e^{x} + \frac{1}{160} e^{(9\, x)} + \frac{1}{160} e^{(-9\, x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta\cos(x) + \gamma\sin(x) + \frac{1}{164}\,e^{(9\,x)} - \frac{1}{164}\,e^{(-9\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) - f(x) = e^{(-9\,x)}\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \frac{1}{160}\,e^{(9\,x)} + \frac{1}{160}\,e^{(-9\,x)}, \quad h(x) = \gamma\sin(x) + \frac{1}{164}\,e^{(9\,x)} - \frac{1}{164}\,e^{(-9\,x)}\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma\sin(x) + \frac{81}{6560}\,e^{(9\,x)} + \frac{1}{6560}\,e^{(-9\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma\sin(x) + \frac{81}{6560}\,e^{(9\,x)} + \frac{1}{6560}\,e^{(-9\,x)} \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 51. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - f(x) = \sin(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g'(-x) + h'(-x)\big) - (g(x)+h(x)) = \sin(x)\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(h'(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-g'(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} h'(x) - g(x) &= 0 \\ -g'(x) - h(x) &= \sin(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}\\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(x) \\ -\frac{1}{2}\sin(x) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} i\,z_1(x) \\ -i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(x) \\ -\frac{1}{2}\sin(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\,z_1(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \\ z_2'(x) &= -i\,z_2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4} i\, x e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4} i\, x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4} i\, x e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4} i\, x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}\, x e^{(i\,x)} + i\,\beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}\, x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8} i\, e^{(i\,x)} - \frac{1}{8} i\, e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) - f(x) = \sin(x) \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos(x) - \frac{1}{2}\, x \sin(x) + \frac{1}{4}\cos(x), \quad h(x) = \frac{1}{2}\, x\cos(x) + 2\,\alpha \sin(x) - \frac{1}{4}\sin(x) \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\, x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\, x\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\, x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\, x\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 52. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) + f(x) = \cos(3\,x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g'(-x) + h'(-x)\big) + (g(x) + h(x)) = \cos(3\,x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-h'(x) + g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(g'(x) + h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(3\,x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -h'(x) + g(x) & = \quad \cos(3\,x) \\ g'(x) + h(x) & = \quad 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(3\,x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(3\,x) \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(3\,x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\,\cos(3\,x) \\ \frac{1}{2}i\,\cos(3\,x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\,z_1(x) \\ -i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\,\cos(3\,x) \\ \frac{1}{2}i\,\cos(3\,x) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\,z_1(x) - \frac{1}{2}i\,\cos(3\,x) \\ z_2'(x) &= -i\,z_2(x) + \frac{1}{2}i\,\cos(3\,x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{16}\cos(3\,x) - \frac{3}{16}i\,\sin(3\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{16}\cos(3\,x) + \frac{3}{16}i\,\sin(3\,x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}\cos(3\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{(i\,x)} + i\,\beta e^{(-i\,x)} - \frac{3}{8}\sin(3\,x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) + f(x) = \cos(3\,x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(x) - \frac{1}{8}\cos(3\,x), \quad h(x) = 2\,\alpha\sin(x) - \frac{3}{8}\sin(3\,x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{8}\cos(3\,x) - \frac{3}{8}\sin(3\,x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{8}\cos(3\,x) - \frac{3}{8}\sin(3\,x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 53. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad -2f''(-x) - 24f(x) = \cos(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad -2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - 24\left(g(x) + h(x)\right) = \cos(x)\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-2g''(x) - 24g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x) - 24h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} -2g''(x) - 24g(x) &=& \cos(x)\\ 2h''(x) - 24h(x) &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \beta\cos\left(2\sqrt{3}x\right) + \alpha\sin\left(2\sqrt{3}x\right) - \frac{1}{22}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \gamma e^{\left(2\sqrt{3}x\right)} + \delta e^{\left(-2\sqrt{3}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ -2f''(-x) - 24f(x) = \cos(x)\\ \Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(2\sqrt{3}x\right) - \frac{1}{22}\cos(x),\quad h(x) = \gamma e^{\left(2\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-2\sqrt{3}x\right)}\\ \Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos\left(2\sqrt{3}x\right) + \gamma e^{\left(2\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-2\sqrt{3}x\right)} - \frac{1}{22}\cos(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \beta\cos\left(2\sqrt{3}x\right) + \gamma e^{\left(2\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-2\sqrt{3}x\right)} - \frac{1}{22}\cos(x)\end{array}\right. \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 54. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(-x) + 2f(x) = e^{(-3x)} &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \left(g'(-x) + h'(-x)\right) + 2\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(-3x)}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(h'(x) + 2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-g'(x) + 2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}e^{(3x)} + \frac{1}{2}e^{(-3x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2}e^{(3x)} + \frac{1}{2}e^{(-3x)}}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} h'(x) + 2g(x) &=& \frac{1}{2}e^{(3x)} + \frac{1}{2}e^{(-3x)}\\ -g'(x) + 2h(x) &=& -\frac{1}{2}e^{(3x)} + \frac{1}{2}e^{(-3x)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{(3x)} - \frac{1}{2}e^{(-3x)}\\ \frac{1}{2}e^{(3x)} + \frac{1}{2}e^{(-3x)}\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} \\ \frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} \\ \frac{1}{2}\,e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-3\,x)} \\ \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i\,z_1(x) \\ -2i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-3\,x)} \\ \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-3\,x)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} z_1'(x) & = & 2i\,z_1(x) - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-3\,x)} \\ z_2'(x) & = & -2i\,z_2(x) + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-3\,x)} \end{array} \right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(2i\,x)} - \left(\frac{1}{52}i - \frac{5}{52}\right)\,e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{52}i + \frac{5}{52}\right)\,e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-2i\,x)} + \left(\frac{1}{52}i + \frac{5}{52}\right)\,e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{52}i - \frac{5}{52}\right)\,e^{(-3\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(2i\,x)} + \beta e^{(-2i\,x)} + \frac{5}{26}\,e^{(3\,x)} + \frac{5}{26}\,e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(2i\,x)} - i\,\beta e^{(-2i\,x)} + \frac{1}{26}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{26}\,e^{(-3\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + 2f(x) = e^{(-3\,x)} \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(2\,x) + \frac{5}{26}\,e^{(3\,x)} + \frac{5}{26}\,e^{(-3\,x)}, \quad h(x) = -2\,\alpha\sin(2\,x) + \frac{1}{26}\,e^{(3\,x)} - \frac{1}{26}\,e^{(-3\,x)} \\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(2\,x) - 2\,\alpha\sin(2\,x) + \frac{3}{13}\,e^{(3\,x)} + \frac{2}{13}\,e^{(-3\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos(2\,x) - 2\,\alpha\sin(2\,x) + \frac{3}{13}\,e^{(3\,x)} + \frac{2}{13}\,e^{(-3\,x)} \end{array} \right. \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 55. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x)+3f(x) = -2\,x^2-x+1 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g'(-x)+h'(-x)\big)+3\,(g(x)+h(x)) = -2\,x^2-x+1\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(h'(x)+3g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(-g'(x)+3h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-2\,x^2+1}_{\text{paire}}+\underbrace{-x}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} h'(x)+3g(x) &=& -2\,x^2+1\\ -g'(x)+3h(x) &=& -x\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x)+\begin{pmatrix} x\\ -2\,x^2+1\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 3i & 0\\ 0 & -3i\end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} x\\ -2\,x^2+1\end{pmatrix}\\ &= DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} x\\ -2\,x^2+1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 3i & 0\\ 0 & -3i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix} i\,x^2+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}i\\ -i\,x^2+\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 3i\,z_1(x)\\ -3i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} i\,x^2+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}i\\ -i\,x^2+\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}i\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& 3i\,z_1(x)+i\,x^2+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}i\\ z_2'(x) &=& -3i\,z_2(x)-i\,x^2+\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}i\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = -\frac{1}{3}\,x^2+\alpha e^{(3i\,x)}+\frac{7}{18}i\,x+\frac{8}{27},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = -\frac{1}{3}\,x^2+\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{7}{18}i\,x+\frac{8}{27},$$

avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -\frac{2}{3}\,x^2+\alpha e^{(3i\,x)}+\beta e^{(-3i\,x)}+\frac{16}{27},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(3i\,x)}-i\,\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{7}{9}\,x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x)+3f(x) = -2\,x^2-x+1\\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -\frac{2}{3}\,x^2+2\,\alpha\cos(3\,x)+\frac{16}{27}, \quad h(x) = -2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{7}{9}\,x\\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)+h(x) = -\frac{2}{3}\,x^2+2\,\alpha\cos(3\,x)-2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{7}{9}\,x+\frac{16}{27}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & -\frac{2}{3}\,x^2+2\,\alpha\cos(3\,x)-2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{7}{9}\,x+\frac{16}{27}\end{array}\right. \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 56. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3f'(-x) + f(x) = 1 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3\left(g'(-x) + h'(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = 1 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(3h'(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-3g'(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{1}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3h'(x) + g(x) & = & 1 \\ -3g'(x) + h(x) & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}i \\ \frac{1}{6}i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i\, z_1(x) \\ -\frac{1}{3}i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}i \\ \frac{1}{6}i \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & \frac{1}{3}i\, z_1(x) - \frac{1}{6}i \\ z_2'(x) & = & -\frac{1}{3}i\, z_2(x) + \frac{1}{6}i \end{array} \right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{3} i\, x\right)} + \frac{1}{2},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} + \frac{1}{2},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{3} i\, x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} + 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{3}i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{3}i\,x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 3f'(-x) + f(x) = 1\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\,x\right) + 1, \quad h(x) = -2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\,x\right)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\,x\right) - 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\,x\right) + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\,x\right) - 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\,x\right) + 1 \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 57. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - f(x) = \sin(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g''(-x) + h''(-x)\big) - (g(x) + h(x)) = \sin(x)\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-g''(x) - g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(h''(x) - h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -g''(x) - g(x) & = & 0 \\ h''(x) - h(x) & = & \sin(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta \cos(x) + \alpha \sin(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta e^{(-x)} + \gamma e^{x} - \frac{1}{2}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) - f(x) = \sin(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta \cos(x), \quad h(x) = -\gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} - \frac{1}{2}\sin(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta \cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} - \frac{1}{2}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta \cos(x) - \gamma e^{(-x)} + \gamma e^{x} - \frac{1}{2}\sin(x) \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 58. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et} :\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -f''(-x)+5f(x)=x-3 &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad -\left(g''(-x)+h''(-x)\right)+5\left(g(x)+h(x)\right)=x-3\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-g''(x)+5g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(h''(x)+5h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{-3}_{\text{paire}}+\underbrace{x}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}-g''(x)+5g(x)&=&-3\\ h''(x)+5h(x)&=&x\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}-\frac{3}{5},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\sqrt{5}x\right)+\gamma\sin\left(\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{5}\,x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ -f''(-x)+5f(x)=x-3\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}-\frac{3}{5},\quad h(x)=\gamma\sin\left(\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{5}\,x\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}+\gamma\sin\left(\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{5}\,x-\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{ccl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\beta e^{\left(\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}+\gamma\sin\left(\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{5}\,x-\frac{3}{5}\end{array}\right.\ \mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 59. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et} :\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -5f''(-x)-3f(x)=\sin(x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad -5\left(g''(-x)+h''(-x)\right)-3\left(g(x)+h(x)\right)=\sin(x)\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-5g''(x)-3g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(5h''(x)-3h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}-5g''(x)-3g(x)&=&0\\ 5h''(x)-3h(x)&=&\sin(x)\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}+\delta e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}-\frac{1}{8}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ -5f''(-x)-3f(x)=\sin(x)\\
\iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right),\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}-\frac{1}{8}\sin(x)\\
\iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}-\frac{1}{8}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}-\frac{1}{8}\sin(x)\end{cases}\ \mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 60. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad 2f'(-x)-3f(x)=\sin(2\,x)&\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad 2\left(g'(-x)+h'(-x)\right)-3\left(g(x)+h(x)\right)=\sin(2\,x)\\
&\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(2h'(x)-3g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-2g'(x)-3h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(2\,x)}_{\text{impaire}}\\
&\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}2h'(x)-3g(x) & = \quad 0\\ -2g'(x)-3h(x) & = \quad \sin(2\,x)\end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sin(2\,x)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}i & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$.

En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sin(2x) \\ -\frac{1}{4}\sin(2x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}i\, z_1(x) \\ -\frac{3}{2}i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sin(2x) \\ -\frac{1}{4}\sin(2x) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} z_1'(x) & = & \frac{3}{2}i\, z_1(x) - \frac{1}{4}\sin(2x) \\ z_2'(x) & = & -\frac{3}{2}i\, z_2(x) - \frac{1}{4}\sin(2x) \end{array} \right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{3}{2}i\,x\right)} + \frac{2}{7}\cos(2x) + \frac{3}{14}i\sin(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{3}{2}i\,x\right)} + \frac{2}{7}\cos(2x) - \frac{3}{14}i\sin(2x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{3}{2}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{3}{2}i\,x\right)} + \frac{4}{7}\cos(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{\left(\frac{3}{2}i\,x\right)} + i\,\beta e^{\left(-\frac{3}{2}i\,x\right)} + \frac{3}{7}\sin(2x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(-x) - 3f(x) = \sin(2x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{4}{7}\cos(2x), \quad h(x) = 2\,\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{7}\sin(2x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 2\,\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{4}{7}\cos(2x) + \frac{3}{7}\sin(2x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 2\,\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{4}{7}\cos(2x) + \frac{3}{7}\sin(2x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 61. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x)+f(x)=e^{(13\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g'(-x)+h'(-x)\big)+(g(x)+h(x))=e^{(13\,x)}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(h'(x)+g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(-g'(x)+h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}}_{\text{paire}}+\underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}-\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}}_{\text{impaire}}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} h'(x)+g(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\\ -g'(x)+h(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}-\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\\ \frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\\ \frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\end{pmatrix}\\
&= DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\\ \frac{1}{2}\,e^{(13\,x)}+\frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\,e^{(13\,x)}-\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\,e^{(-13\,x)}\\ \left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\,e^{(13\,x)}+\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\,e^{(-13\,x)}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} i\,z_1(x)\\ -i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\,e^{(13\,x)}-\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\,e^{(-13\,x)}\\ \left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\,e^{(13\,x)}+\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\,e^{(-13\,x)}\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& i\,z_1(x)-\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\,e^{(13\,x)}-\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\,e^{(-13\,x)}\\ z_2'(x) &=& -i\,z_2(x)+\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\,e^{(13\,x)}+\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\,e^{(-13\,x)}\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x)=\alpha e^{(i\,x)}-\left(\frac{7}{340}i+\frac{3}{170}\right)\,e^{(13\,x)}+\left(\frac{7}{340}i-\frac{3}{170}\right)\,e^{(-13\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x)=\beta e^{(-i\,x)}+\left(\frac{7}{340}i-\frac{3}{170}\right)\,e^{(13\,x)}-\left(\frac{7}{340}i+\frac{3}{170}\right)\,e^{(-13\,x)},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\alpha e^{(i\,x)}+\beta e^{(-i\,x)}-\frac{3}{85}\,e^{(13\,x)}-\frac{3}{85}\,e^{(-13\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x)=i\,\alpha e^{(i\,x)}-i\,\beta e^{(-i\,x)}+\frac{7}{170}\,e^{(13\,x)}-\frac{7}{170}\,e^{(-13\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(-x)+f(x)=e^{(13\,x)}\\
\iff& \exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x)=2\,\alpha\cos(x)-\frac{3}{85}\,e^{(13\,x)}-\frac{3}{85}\,e^{(-13\,x)}, \quad h(x)=-2\,\alpha\sin(x)+\frac{7}{170}\,e^{(13\,x)}-\frac{7}{170}\,e^{(-13\,x)}\\
\iff& \exists \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos(x)-2\,\alpha\sin(x)+\frac{1}{170}\,e^{(13\,x)}-\frac{13}{170}\,e^{(-13\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos(x)-2\,\alpha\sin(x)+\frac{1}{170}\,e^{(13\,x)}-\frac{13}{170}\,e^{(-13\,x)}\end{cases}\mid \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 62. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -5f''(-x)-f(x)=\cos(3\,x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad -5\left(g''(-x)+h''(-x)\right)-(g(x)+h(x))=\cos(3\,x)\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-5g''(x)-g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(5h''(x)-h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(3\,x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}-5g''(x)-g(x) & = & \cos(3\,x)\\ 5h''(x)-h(x) & = & 0\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{44}\cos(3\,x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}+\delta e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ -5f''(-x)-f(x)=\cos(3\,x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{44}\cos(3\,x),\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}+\frac{1}{44}\cos(3\,x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \beta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x\right)}+\frac{1}{44}\cos(3\,x)\end{cases}\mid (\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 63. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad -7f''(-x)-2f(x)=\sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad -7\left(g''(-x)+h''(-x)\right)-2\left(g(x)+h(x)\right)=\sin(x)\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-7g''(x)-2g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(7h''(x)-2h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}-7g''(x)-2g(x)&=&0\\ 7h''(x)-2h(x)&=&\sin(x)\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}+\delta e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}-\frac{1}{9}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ -7f''(-x)-2f(x)=\sin(x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right),\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}-\frac{1}{9}\sin(x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}-\frac{1}{9}\sin(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\beta\cos\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{7}\sqrt{7}\sqrt{2}x\right)}-\frac{1}{9}\sin(x)\end{array}\right.\ \mid (\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 64. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad 2f''(-x)+f(x)=-x^2-2x &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2\left(g''(-x)+h''(-x)\right)+\left(g(x)+h(x)\right)=-x^2-2x\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(2g''(x)+g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-2h''(x)+h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{-x^2}_{\text{paire}}+\underbrace{-2x}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}2g''(x)+g(x)&=&-x^2\\ -2h''(x)+h(x)&=&-2x\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x)=-x^2+\beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)+4,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \delta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 2\,x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 2f''(-x) + f(x) = -x^2 - 2\,x \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + 4, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 2\,x \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = -x^2 + \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 2\,x + 4.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -x^2 + \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 2\,x + 4 \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 65. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = \cos(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g'(-x) + h'(-x)\big) + (g(x) + h(x)) = \cos(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(h'(x) + g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-g'(x) + h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} h'(x) + g(x) & = \cos(x) \\ -g'(x) + h(x) & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\,\cos(x) \\ \frac{1}{2}i\,\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i\,z_1(x) \\ -i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\,\cos(x) \\ \frac{1}{2}i\,\cos(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) & = \quad i\,z_1(x) - \frac{1}{2}i\,\cos(x) \\ z_2'(x) & = \quad -i\,z_2(x) + \frac{1}{2}i\,\cos(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4} i\, x e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4} i\, x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4} i\, x e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4} i\, x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(i\,x)} + \frac{1}{8}\, e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}\, x e^{(i\,x)} - i\,\beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}\, x e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8} i\, e^{(i\,x)} + \frac{1}{8} i\, e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + f(x) = \cos(x) \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos(x) + \frac{1}{2}\, x \sin(x) + \frac{1}{4}\, \cos(x), \quad h(x) = \frac{1}{2}\, x \cos(x) - 2\,\alpha \sin(x) + \frac{1}{4}\, \sin(x) \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos(x) + \frac{1}{2}\, x \cos(x) - 2\,\alpha \sin(x) + \frac{1}{2}\, x \sin(x) + \frac{1}{4}\, \cos(x) + \frac{1}{4}\, \sin(x). \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha \cos(x) + \frac{1}{2}\, x \cos(x) - 2\,\alpha \sin(x) + \frac{1}{2}\, x \sin(x) + \frac{1}{4}\, \cos(x) + \frac{1}{4}\, \sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 66. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) - 13 f(x) = -1 & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - 13\,(g(x) + h(x)) = -1 \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-g''(x) - 13 g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(h''(x) - 13 h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-1}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -g''(x) - 13 g(x) & = & -1 \\ h''(x) - 13 h(x) & = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta \cos\left(\sqrt{13} x\right) + \alpha \sin\left(\sqrt{13} x\right) + \frac{1}{13},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{13}x\right)} + \delta e^{\left(-\sqrt{13}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) - 13f(x) = -1 \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta \cos\left(\sqrt{13}x\right) + \frac{1}{13}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{13}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{13}x\right)} \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta \cos\left(\sqrt{13}x\right) + \gamma e^{\left(\sqrt{13}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{13}x\right)} + \frac{1}{13}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta \cos\left(\sqrt{13}x\right) + \gamma e^{\left(\sqrt{13}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{13}x\right)} + \frac{1}{13} \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 67. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{ et : } \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = \sin(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = \sin(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -2g''(x) + g(x) &= 0 \\ 2h''(x) + h(x) &= \sin(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -2f''(-x) + f(x) = \sin(x) \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \sin(x) \\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \sin(x) \end{cases} \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 68. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions ← page 6

telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \qquad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + 6f(x) = e^{(13\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(g''(-x) + h''(-x)\right) + 6\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(13\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(g''(x) + 6g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-h''(x) + 6h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(13\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(13\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} g''(x) + 6g(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(13\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)} \\ -h''(x) + 6h(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(13\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-13\,x)} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta \cos\left(\sqrt{6}x\right) + \alpha \sin\left(\sqrt{6}x\right) + \frac{1}{350}\,e^{(13\,x)} + \frac{1}{350}\,e^{(-13\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{6}x\right)} + \delta e^{\left(-\sqrt{6}x\right)} - \frac{1}{326}\,e^{(13\,x)} + \frac{1}{326}\,e^{(-13\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) + 6f(x) = e^{(13\,x)} \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta \cos\left(\sqrt{6}x\right) + \frac{1}{350}\,e^{(13\,x)} + \frac{1}{350}\,e^{(-13\,x)}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{6}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{6}x\right)} - \frac{1}{326}\,e^{(13\,x)} + \frac{1}{326}\,e^{(-13\,x)} \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta \cos\left(\sqrt{6}x\right) + \gamma e^{\left(\sqrt{6}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{6}x\right)} - \frac{6}{28525}\,e^{(13\,x)} + \frac{169}{28525}\,e^{(-13\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta \cos\left(\sqrt{6}x\right) + \gamma e^{\left(\sqrt{6}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{6}x\right)} - \frac{6}{28525}\,e^{(13\,x)} + \frac{169}{28525}\,e^{(-13\,x)} \end{array} \right. \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 69. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x) - f(x) = \sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g'(-x) + h'(-x)\right) - \left(g(x) + h(x)\right) = \sin(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2h'(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2g'(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -2h'(x) - g(x) & = & 0 \\ 2g'(x) - h(x) & = & \sin(x) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) \\ \frac{1}{4}\sin(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\, z_1(x) \\ -\frac{1}{2}i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) \\ \frac{1}{4}\sin(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= \frac{1}{2}i\, z_1(x) + \frac{1}{4}\sin(x) \\ z_2'(x) &= -\frac{1}{2}i\, z_2(x) + \frac{1}{4}\sin(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} - \frac{1}{3}\cos(x) - \frac{1}{6}i\sin(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} - \frac{1}{3}\cos(x) + \frac{1}{6}i\sin(x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} - \frac{2}{3}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} + \frac{1}{3}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -2f'(-x) - f(x) = \sin(x) \\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{2}{3}\cos(x), \quad h(x) = -2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{3}\sin(x) \\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{2}{3}\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{2}{3}\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 70. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions ← page 6

telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \; h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) + 4f(x) = \sin(2x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\big(g'(-x) + h'(-x)\big) + 4\,(g(x) + h(x)) = \sin(2x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(-h'(x) + 4g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(g'(x) + 4h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(2x)}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -h'(x) + 4g(x) & = & 0 \\ g'(x) + 4h(x) & = & \sin(2x) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 4i & 0 \\ 0 & -4i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4i & 0 \\ 0 & -4i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(2x) \\ \frac{1}{2}\sin(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4i\, z_1(x) \\ -4i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(2x) \\ \frac{1}{2}\sin(2x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & 4i\, z_1(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \\ z_2'(x) & = & -4i\, z_2(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \end{array} \right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(4i\,x)} + \frac{1}{12}\cos(2x) + \frac{1}{6}i\sin(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-4i\,x)} + \frac{1}{12}\cos(2x) - \frac{1}{6}i\sin(2x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(4i\,x)} + \beta e^{(-4i\,x)} + \frac{1}{6}\cos(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{(4i\,x)} + i\,\beta e^{(-4i\,x)} + \frac{1}{3}\sin(2x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x)+4f(x)=\sin(2\,x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos(4\,x)+\frac{1}{6}\cos(2\,x)\,,\quad h(x)=2\,\alpha\sin(4\,x)+\frac{1}{3}\sin(2\,x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos(4\,x)+2\,\alpha\sin(4\,x)+\frac{1}{6}\cos(2\,x)+\frac{1}{3}\sin(2\,x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(4\,x)+2\,\alpha\sin(4\,x)+\frac{1}{6}\cos(2\,x)+\frac{1}{3}\sin(2\,x)\end{cases}\mid \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 71. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad 9f''(-x)-f(x)=\cos(2\,x) &\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad 9\left(g''(-x)+h''(-x)\right)-(g(x)+h(x))=\cos(2\,x)\\
&\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(9g''(x)-g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-9h''(x)-h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(2\,x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}9g''(x)-g(x) & = \cos(2\,x)\\ -9h''(x)-h(x) & = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{3}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\,x\right)}-\frac{1}{37}\cos(2\,x)\,,$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\frac{1}{3}\,x\right)+\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\,x\right).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ 9f''(-x)-f(x)=\cos(2\,x)\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{3}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\,x\right)}-\frac{1}{37}\cos(2\,x)\,,\quad h(x)=\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\,x\right)\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{3}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\,x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\,x\right)-\frac{1}{37}\cos(2\,x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \beta e^{\left(\frac{1}{3}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{3}\,x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{3}\,x\right)-\frac{1}{37}\cos(2\,x)\end{cases}\mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 72. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) + 2f(x) = \cos(2x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\left(g''(-x)+h''(-x)\right) + 2\left(g(x)+h(x)\right) = \cos(2x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-g''(x)+2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(h''(x)+2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(2x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -g''(x)+2g(x) &= \cos(2x) \\ h''(x)+2h(x) &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \frac{1}{6}\cos(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta\cos\left(\sqrt{2}x\right) + \gamma\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(-x) + 2f(x) = \cos(2x) \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \frac{1}{6}\cos(2x), \quad h(x) = \gamma\sin\left(\sqrt{2}x\right) \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)+h(x) = \beta e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \gamma\sin\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{6}\cos(2x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \gamma\sin\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{6}\cos(2x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 73. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) - 3f(x) = e^{(-x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g''(-x)+h''(-x)\right) - 3\left(g(x)+h(x)\right) = e^{(-x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2g''(x)-3g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x)-3h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}e^{(-x)} + \frac{1}{2}e^{x}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{(-x)} - \frac{1}{2}e^{x}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -2g''(x)-3g(x) &= \frac{1}{2}e^{(-x)} + \frac{1}{2}e^{x} \\ 2h''(x)-3h(x) &= \frac{1}{2}e^{(-x)} - \frac{1}{2}e^{x} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)-\frac{1}{10}\,e^{(-x)}-\frac{1}{10}\,e^{x},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}+\delta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}-\frac{1}{2}\,e^{(-x)}+\frac{1}{2}\,e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ -2f''(-x)-3f(x)=e^{(-x)}\\ \Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)-\frac{1}{10}\,e^{(-x)}-\frac{1}{10}\,e^{x},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}-\frac{1}{2}\,e^{(-x)}+\frac{1}{2}\,e^{x}\\ \Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}-\frac{3}{5}\,e^{(-x)}+\frac{2}{5}\,e^{x}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\quad\mathbb{R}\\ x&\mapsto\quad\beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)+\gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}-\gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x\right)}-\frac{3}{5}\,e^{(-x)}+\frac{2}{5}\,e^{x}\end{cases}\ \middle|\ (\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 74. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -f'(-x)-f(x)=\cos(37\,x)&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad -\left(g'(-x)+h'(-x)\right)-(g(x)+h(x))=\cos(37\,x)\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-h'(x)-g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(g'(x)-h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(37\,x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}-h'(x)-g(x)&=&\cos(37\,x)\\ g'(x)-h(x)&=&0\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}0\\-\cos(37\,x)\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ -\cos(37\,x)\end{pmatrix}\\ &= DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ -\cos(37\,x)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\frac12 i\cos(37\,x)\\ -\frac12 i\cos(37\,x)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}i\,z_1(x)\\ -i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac12 i\cos(37\,x)\\ -\frac12 i\cos(37\,x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\,z_1(x)+\frac12 i\cos(37\,x)\\ z_2'(x) &= -i\,z_2(x)-\frac12 i\cos(37\,x)\end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{(i\,x)}+\frac{1}{2736}\cos(37\,x)+\frac{37}{2736}i\sin(37\,x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{(-i\,x)}+\frac{1}{2736}\cos(37\,x)-\frac{37}{2736}i\sin(37\,x),$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{(i\,x)}+\beta e^{(-i\,x)}+\frac{1}{1368}\cos(37\,x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=i\,\alpha e^{(i\,x)}-i\,\beta e^{(-i\,x)}-\frac{37}{1368}\sin(37\,x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ -f'(-x)-f(x)=\cos(37\,x)\\ \Longleftrightarrow &\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos(x)+\frac{1}{1368}\cos(37\,x),\quad h(x)=-2\,\alpha\sin(x)-\frac{37}{1368}\sin(37\,x)\\ \Longleftrightarrow &\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos(x)-2\,\alpha\sin(x)+\frac{1}{1368}\cos(37\,x)-\frac{37}{1368}\sin(37\,x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\ \mathbb{R}\\ x&\mapsto\ 2\,\alpha\cos(x)-2\,\alpha\sin(x)+\frac{1}{1368}\cos(37\,x)-\frac{37}{1368}\sin(37\,x)\end{cases}\ \middle|\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 75. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 6

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(-x)+3f(x)=\cos(2\,x)&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \big(g'(-x)+h'(-x)\big)+3\,(g(x)+h(x))=\cos(2\,x)\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(h'(x)+3g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(-g'(x)+3h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(2\,x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}h'(x)+3g(x)&=\cos(2\,x)\\ -g'(x)+3h(x)&=0\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\,x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\,x) \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\,x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\,\cos(2\,x) \\ \frac{1}{2}i\,\cos(2\,x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3i\,z_1(x) \\ -3i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\,\cos(2\,x) \\ \frac{1}{2}i\,\cos(2\,x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= 3i\,z_1(x) - \frac{1}{2}i\,\cos(2\,x) \\ z_2'(x) &= -3i\,z_2(x) + \frac{1}{2}i\,\cos(2\,x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(3i\,x)} + \frac{3}{10}\cos(2\,x) + \frac{1}{5}i\,\sin(2\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-3i\,x)} + \frac{3}{10}\cos(2\,x) - \frac{1}{5}i\,\sin(2\,x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(3i\,x)} + \beta e^{(-3i\,x)} + \frac{3}{5}\cos(2\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(3i\,x)} - i\,\beta e^{(-3i\,x)} - \frac{2}{5}\sin(2\,x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + 3f(x) = \cos(2\,x) \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(3\,x) + \frac{3}{5}\cos(2\,x), \quad h(x) = -2\,\alpha\sin(3\,x) - \frac{2}{5}\sin(2\,x) \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(3\,x) - 2\,\alpha\sin(3\,x) + \frac{3}{5}\cos(2\,x) - \frac{2}{5}\sin(2\,x). \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2\,\alpha\cos(3\,x) - 2\,\alpha\sin(3\,x) + \frac{3}{5}\cos(2\,x) - \frac{2}{5}\sin(2\,x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 76. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions ← page 6

telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 6f''(-x)+2f(x) = \cos(4\,x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 6\left(g''(-x)+h''(-x)\right)+2\left(g(x)+h(x)\right) = \cos(4\,x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(6g''(x)+2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-6h''(x)+2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(4\,x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 6g''(x)+2g(x) &= \cos(4\,x) \\ -6h''(x)+2h(x) &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta \cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right) + \alpha \sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right) - \frac{1}{94}\cos(4\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)} + \delta e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 6f''(-x)+2f(x) = \cos(4\,x) \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right) - \frac{1}{94}\cos(4\,x), \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)} \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)+h(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)} - \frac{1}{94}\cos(4\,x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}x\right)} - \frac{1}{94}\cos(4\,x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 77. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions ← page 6
telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x)+4f(x) = \sin(2\,x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(g''(-x)+h''(-x)\right)+4\left(g(x)+h(x)\right) = \sin(2\,x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(g''(x)+4g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-h''(x)+4h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(2\,x)}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x)+4g(x) &= 0 \\ -h''(x)+4h(x) &= \sin(2\,x) \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\beta\cos(2\,x)+\alpha\sin(2\,x)\,,$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\gamma e^{(2\,x)}+\delta e^{(-2\,x)}+\frac{1}{8}\sin(2\,x)\,.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ f''(-x)+4f(x)=\sin(2\,x)\\
\Longleftrightarrow\ &\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta\cos(2\,x),\quad h(x)=\gamma e^{(2\,x)}-\gamma e^{(-2\,x)}+\frac{1}{8}\sin(2\,x)\\
\Longleftrightarrow\ &\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta\cos(2\,x)+\gamma e^{(2\,x)}-\gamma e^{(-2\,x)}+\frac{1}{8}\sin(2\,x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to\quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto\quad \beta\cos(2\,x)+\gamma e^{(2\,x)}-\gamma e^{(-2\,x)}+\frac{1}{8}\sin(2\,x)\end{cases}\ \middle|\ (\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 78. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad 3f'(-x)-f(x)=e^x &\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad 3\left(g'(-x)+h'(-x)\right)-(g(x)+h(x))=e^x\\
&\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(3h'(x)-g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-3g'(x)-h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\frac{1}{2}e^{(-x)}+\frac{1}{2}e^x}_{\text{paire}}+\underbrace{-\frac{1}{2}e^{(-x)}+\frac{1}{2}e^x}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl}3h'(x)-g(x)&=&\frac{1}{2}e^{(-x)}+\frac{1}{2}e^x\\ -3g'(x)-h(x)&=&-\frac{1}{2}e^{(-x)}+\frac{1}{2}e^x\end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}\frac{1}{6}e^{(-x)}-\frac{1}{6}e^x\\ \frac{1}{6}e^{(-x)}+\frac{1}{6}e^x\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}e^{(-x)}-\frac{1}{6}e^x\\ \frac{1}{6}e^{(-x)}+\frac{1}{6}e^x\end{pmatrix}\\
&=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}e^{(-x)}-\frac{1}{6}e^x\\ \frac{1}{6}e^{(-x)}+\frac{1}{6}e^x\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)e^{(-x)}+\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)e^x\\ -\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)e^{(-x)}-\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)e^x\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}i\,z_1(x)\\ -\frac{1}{3}i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)e^{(-x)}+\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)e^x\\ -\left(\frac{1}{12}i-\frac{1}{12}\right)e^{(-x)}-\left(\frac{1}{12}i+\frac{1}{12}\right)e^x\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= \frac{1}{3} i\, z_1(x) + \left(\frac{1}{12} i + \frac{1}{12}\right) e^{(-x)} + \left(\frac{1}{12} i - \frac{1}{12}\right) e^{x} \\ z_2'(x) &= -\frac{1}{3} i\, z_2(x) - \left(\frac{1}{12} i - \frac{1}{12}\right) e^{(-x)} - \left(\frac{1}{12} i + \frac{1}{12}\right) e^{x} \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{3} i\, x\right)} - \left(\frac{1}{20} i + \frac{1}{10}\right) e^{(-x)} + \left(\frac{1}{20} i - \frac{1}{10}\right) e^{x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} + \left(\frac{1}{20} i - \frac{1}{10}\right) e^{(-x)} - \left(\frac{1}{20} i + \frac{1}{10}\right) e^{x},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{3} i\, x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} - \frac{1}{5} e^{(-x)} - \frac{1}{5} e^{x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\, \alpha e^{\left(\frac{1}{3} i\, x\right)} + i\, \beta e^{\left(-\frac{1}{3} i\, x\right)} - \frac{1}{10} e^{(-x)} + \frac{1}{10} e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ 3f'(-x) - f(x) = e^{x} \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\, x\right) - \frac{1}{5} e^{(-x)} - \frac{1}{5} e^{x}, \quad h(x) = 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\, x\right) - \frac{1}{10} e^{(-x)} + \frac{1}{10} e^{x} \\ \Longleftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\, x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\, x\right) - \frac{3}{10} e^{(-x)} - \frac{1}{10} e^{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{3}\, x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{3}\, x\right) - \frac{3}{10} e^{(-x)} - \frac{1}{10} e^{x} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 79. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -4f''(-x) + 9f(x) = e^{(15\,x)} & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -4\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + 9\left(g(x) + h(x)\right) = e^{(15\,x)} \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-4g''(x) + 9g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(4h''(x) + 9h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{(15\,x)} + \frac{1}{2} e^{(-15\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{(15\,x)} - \frac{1}{2} e^{(-15\,x)}}_{\text{impaire}} \\ & \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -4g''(x) + 9g(x) &= \frac{1}{2} e^{(15\,x)} + \frac{1}{2} e^{(-15\,x)} \\ 4h''(x) + 9h(x) &= \frac{1}{2} e^{(15\,x)} - \frac{1}{2} e^{(-15\,x)} \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{3}{2}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{3}{2}\,x\right)}-\frac{1}{1782}\,e^{(15\,x)}-\frac{1}{1782}\,e^{(-15\,x)},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\frac{3}{2}\,x\right)+\gamma\sin\left(\frac{3}{2}\,x\right)+\frac{1}{1818}\,e^{(15\,x)}-\frac{1}{1818}\,e^{(-15\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ -4f''(-x)+9f(x)=e^{(15\,x)}\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\frac{3}{2}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{3}{2}\,x\right)}-\frac{1}{1782}\,e^{(15\,x)}-\frac{1}{1782}\,e^{(-15\,x)},\quad h(x)=\gamma\sin\left(\frac{3}{2}\,x\right)+\frac{1}{1818}\,e^{(15\,x)}-\frac{1}{1818}\,e\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\frac{3}{2}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{3}{2}\,x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{3}{2}\,x\right)-\frac{1}{89991}\,e^{(15\,x)}-\frac{100}{89991}\,e^{(-15\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \beta e^{\left(\frac{3}{2}\,x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{3}{2}\,x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{3}{2}\,x\right)-\frac{1}{89991}\,e^{(15\,x)}-\frac{100}{89991}\,e^{(-15\,x)}\end{cases}\ \Big|\ (\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 80. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et :}\qquad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad -f''(-x)+4f(x)=\sin(x)&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad -\left(g''(-x)+h''(-x)\right)+4\left(g(x)+h(x)\right)=\sin(x)\\
&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(-g''(x)+4g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(h''(x)+4h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}-g''(x)+4g(x) &= 0\\ h''(x)+4h(x) &= \sin(x)\end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{(2\,x)}+\beta e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos(2\,x)+\gamma\sin(2\,x)+\frac{1}{3}\,\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ -f''(-x)+4f(x)=\sin(x)\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{(2\,x)}+\beta e^{(-2\,x)},\quad h(x)=\gamma\sin(2\,x)+\frac{1}{3}\,\sin(x)\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{(2\,x)}+\beta e^{(-2\,x)}+\gamma\sin(2\,x)+\frac{1}{3}\,\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \beta e^{(2\,x)}+\beta e^{(-2\,x)}+\gamma\sin(2\,x)+\frac{1}{3}\sin(x)\end{cases}\mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 81. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -f'(-x)-10f(x)=\sin(x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad -\big(g'(-x)+h'(-x)\big)-10\,(g(x)+h(x))=\sin(x)\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(-h'(x)-10g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(g'(x)-10h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}-h'(x)-10g(x) &=& 0\\ g'(x)-10h(x) &=& \sin(x)\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&10\\-10&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$.
Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}\sin(x)\\0\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}10i&0\\0&-10i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12 i\\\frac12&\frac12 i\end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\sin(x)\\0\end{pmatrix}\\ &=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\sin(x)\\0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}10i&0\\0&-10i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\frac12\sin(x)\\\frac12\sin(x)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}10i\,z_1(x)\\-10i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac12\sin(x)\\\frac12\sin(x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}z_1'(x) &=& 10i\,z_1(x)+\frac12\sin(x)\\ z_2'(x) &=& -10i\,z_2(x)+\frac12\sin(x)\end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{(10i\,x)}+\frac{1}{198}\cos(x)+\frac{5}{99}i\sin(x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{(-10i\,x)}+\frac{1}{198}\cos(x)-\frac{5}{99}i\sin(x),$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{(10i\,x)}+\beta e^{(-10i\,x)}+\frac{1}{99}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(10 i\, x)} - i\,\beta e^{(-10 i\, x)} - \frac{10}{99}\sin(x)\,.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) - 10f(x) = \sin(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(10\,x) + \frac{1}{99}\cos(x)\,, \quad h(x) = -2\,\alpha\sin(10\,x) - \frac{10}{99}\sin(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(10\,x) - 2\,\alpha\sin(10\,x) + \frac{1}{99}\cos(x) - \frac{10}{99}\sin(x)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(10\,x) - 2\,\alpha\sin(10\,x) + \frac{1}{99}\cos(x) - \frac{10}{99}\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 82. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) - 3f(x) = \cos(x) \Longleftrightarrow &\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(g'(-x) + h'(-x)\big) - 3\,(g(x) + h(x)) = \cos(x)\\
\Longleftrightarrow &\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\big(h'(x) - 3g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-g'(x) - 3h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}}\\
\Longleftrightarrow &\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} h'(x) - 3g(x) & = \cos(x) \\ -g'(x) - 3h(x) & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}\\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\cos(x) \\ -\frac{1}{2}i\cos(x) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 3i\,z_1(x) \\ -3i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\cos(x) \\ -\frac{1}{2}i\cos(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{lcl} z_1'(x) & = & 3i\,z_1(x)+\frac{1}{2}i\,\cos(x)\\ z_2'(x) & = & -3i\,z_2(x)-\frac{1}{2}i\,\cos(x)\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{(3i\,x)}-\frac{3}{16}\cos(x)-\frac{1}{16}i\,\sin(x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{3}{16}\cos(x)+\frac{1}{16}i\,\sin(x),$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{(3i\,x)}+\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{3}{8}\cos(x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=-i\,\alpha e^{(3i\,x)}+i\,\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{1}{8}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ f'(-x)-3f(x)=\cos(x)\\ \Longleftrightarrow\ &\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos(3\,x)-\frac{3}{8}\cos(x),\quad h(x)=2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{1}{8}\sin(x)\\ \Longleftrightarrow\ &\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos(3\,x)+2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{3}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos(3\,x)+2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{3}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\sin(x)\end{array}\right. \mid \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 83. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad\text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad 20f''(-x)-f(x)=\cos(6\,x)&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad 20\left(g''(-x)+h''(-x)\right)-(g(x)+h(x))=\cos(6\,x)\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(20g''(x)-g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-20h''(x)-h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(6\,x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad\left\{\begin{array}{lcl}20g''(x)-g(x) & = & \cos(6\,x)\\ -20h''(x)-h(x) & = & 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en

passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}-\frac{1}{721}\cos(6\,x),$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)+\gamma\sin\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ 20f''(-x)-f(x)=\cos(6\,x)\\ \Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}-\frac{1}{721}\cos(6\,x),\quad h(x)=\gamma\sin\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)\\ \Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)-\frac{1}{721}\cos(6\,x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\quad\mathbb{R}\\ x&\mapsto\quad\beta e^{\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}x\right)-\frac{1}{721}\cos(6\,x)\end{cases}\mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 84. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -f'(-x)+3f(x)=e^{(9\,x)}&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad -\big(g'(-x)+h'(-x)\big)+3\,(g(x)+h(x))=e^{(9\,x)}\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(-h'(x)+3g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(g'(x)+3h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\frac{1}{2}e^{(9\,x)}+\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}}_{\text{paire}}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}}_{\text{impaire}}\\ &\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}-h'(x)+3g(x)&=\frac{1}{2}e^{(9\,x)}+\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\\ g'(x)+3h(x)&=\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&-3\\3&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\\ -\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}3i&0\\0&-3i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\\ -\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\end{pmatrix}\\ &=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\\ -\frac{1}{2}e^{(9\,x)}-\frac{1}{2}e^{(-9\,x)}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3i&0\\0&-3i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}-\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)e^{(9\,x)}-\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)e^{(-9\,x)}\\ \left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)e^{(9\,x)}+\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)e^{(-9\,x)}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3i\,z_1(x)\\-3i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)e^{(9\,x)}-\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)e^{(-9\,x)}\\ \left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)e^{(9\,x)}+\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)e^{(-9\,x)}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{lcl} z_1'(x) & = & 3i\,z_1(x)-\left(\frac14 i-\frac14\right)e^{(9\,x)}-\left(\frac14 i+\frac14\right)e^{(-9\,x)}\\ z_2'(x) & = & -3i\,z_2(x)+\left(\frac14 i+\frac14\right)e^{(9\,x)}+\left(\frac14 i-\frac14\right)e^{(-9\,x)}\end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_1(x)=\alpha e^{(3i\,x)}-\left(\frac{1}{60}i-\frac{1}{30}\right)e^{(9\,x)}+\left(\frac{1}{60}i+\frac{1}{30}\right)e^{(-9\,x)},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad z_2(x)=\beta e^{(-3i\,x)}+\left(\frac{1}{60}i+\frac{1}{30}\right)e^{(9\,x)}-\left(\frac{1}{60}i-\frac{1}{30}\right)e^{(-9\,x)},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y=PZ=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{(3i\,x)}+\beta e^{(-3i\,x)}+\frac{1}{15}e^{(9\,x)}+\frac{1}{15}e^{(-9\,x)},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=-i\,\alpha e^{(3i\,x)}+i\,\beta e^{(-3i\,x)}-\frac{1}{30}e^{(9\,x)}+\frac{1}{30}e^{(-9\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ -f'(-x)+3f(x)=e^{(9\,x)}\\ \iff&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=2\,\alpha\cos(3\,x)+\frac{1}{15}e^{(9\,x)}+\frac{1}{15}e^{(-9\,x)},\quad h(x)=2\,\alpha\sin(3\,x)-\frac{1}{30}e^{(9\,x)}+\frac{1}{30}e^{(-9\,x)}\\ \iff&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=2\,\alpha\cos(3\,x)+2\,\alpha\sin(3\,x)+\frac{1}{30}e^{(9\,x)}+\frac{1}{10}e^{(-9\,x)}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&2\,\alpha\cos(3\,x)+2\,\alpha\sin(3\,x)+\frac{1}{30}e^{(9\,x)}+\frac{1}{10}e^{(-9\,x)}\end{array}\right.\ \middle|\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u=f+ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 85. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad -f'(-x)-f(x)=\sin(x)&\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad -\big(g'(-x)+h'(-x)\big)-(g(x)+h(x))=\sin(x)\\ &\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(-h'(x)-g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(g'(x)-h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{0}_{\text{paire}}+\underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}}\\ &\iff\forall x\in\mathbb{R},\quad\left\{\begin{array}{lcl}-h'(x)-g(x)&=&0\\ g'(x)-h(x)&=&\sin(x)\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ \frac{1}{2}\sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\,z_1(x) \\ -i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x) \\ \frac{1}{2}\sin(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\,z_1(x) + \frac{1}{2}\sin(x) \\ z_2'(x) &= -i\,z_2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4} i\,x e^{(i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4} i\,x e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} - \frac{1}{4} i\,x e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4} i\,x e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}\,x e^{(i\,x)} - i\,\beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}\,x e^{(-i\,x)} + \frac{1}{8} i\,e^{(i\,x)} - \frac{1}{8} i\,e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) - f(x) = \sin(x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x), \quad h(x) = \frac{1}{2}\,x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{4}\,\sin(x) \\ \Longleftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\,x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x) - \frac{1}{4}\,\sin(x). \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\,x\cos(x) - 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x) - \frac{1}{4}\,\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 86. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(-x) + 9f(x) = e^{(-x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(g'(-x) + h'(-x)\big) + 9\,(g(x) + h(x)) = e^{(-x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\big(h'(x) + 9g(x)\big)}_{\text{paire}} + \underbrace{\big(-g'(x) + 9h(x)\big)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^{x}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} h'(x) + 9g(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \\ -g'(x) + 9h(x) &=& \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^{x} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \\ \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 9i & 0 \\ 0 & -9i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \\ \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \\ \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9i & 0 \\ 0 & -9i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{x} \\ \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9i\,z_1(x) \\ -9i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{x} \\ \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{x} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1'(x) &=& 9i\,z_1(x) - \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{x} \\ z_2'(x) &=& -9i\,z_2(x) + \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\,e^{x} \end{array}\right.$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad z_1(x) = \alpha e^{(9i\,x)} - \left(\frac{1}{41}i - \frac{5}{164}\right)\,e^{(-x)} + \left(\frac{1}{41}i + \frac{5}{164}\right)\,e^{x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad z_2(x) = \beta e^{(-9i\,x)} + \left(\frac{1}{41}i + \frac{5}{164}\right)\,e^{(-x)} - \left(\frac{1}{41}i - \frac{5}{164}\right)\,e^{x},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \alpha e^{(9i\,x)} + \beta e^{(-9i\,x)} + \frac{5}{82}\,e^{(-x)} + \frac{5}{82}\,e^{x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = i\,\alpha e^{(9i\,x)} - i\,\beta e^{(-9i\,x)} + \frac{2}{41}\,e^{(-x)} - \frac{2}{41}\,e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + 9f(x) = e^{(-x)} \\
\iff& \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(9\,x) + \frac{5}{82}\,e^{(-x)} + \frac{5}{82}\,e^{x},\quad h(x) = -2\,\alpha\sin(9\,x) + \frac{2}{41}\,e^{(-x)} - \frac{2}{41}\,e^{x} \\
\iff& \exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(9\,x) - 2\,\alpha\sin(9\,x) + \frac{9}{82}\,e^{(-x)} + \frac{1}{82}\,e^{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha\cos(9\,x) - 2\,\alpha\sin(9\,x) + \frac{9}{82}\,e^{(-x)} + \frac{1}{82}\,e^{x} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 87. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x), \ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4f'(-x) + 2f(x) = -3\,x^2 + x - 20 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 4\left(g'(-x) + h'(-x)\right) + 2\left(g(x) + h(x)\right) = -3\,x^2 + x - 20 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(4h'(x) + 2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-4g'(x) + 2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-3\,x^2 - 20}_{\text{paire}} + \underbrace{x}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 4h'(x) + 2g(x) & = & -3\,x^2 - 20 \\ -4g'(x) + 2h(x) & = & x \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\,x \\ -\frac{3}{4}\,x^2 - 5 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.
En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\,x \\ -\frac{3}{4}\,x^2 - 5 \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\,x \\ -\frac{3}{4}\,x^2 - 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{3}{8}i\,x^2 - \frac{1}{8}\,x + \frac{5}{2}i \\ -\frac{3}{8}i\,x^2 - \frac{1}{8}\,x - \frac{5}{2}i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\,z_1(x) \\ -\frac{1}{2}i\,z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{8}i\,x^2 - \frac{1}{8}\,x + \frac{5}{2}i \\ -\frac{3}{8}i\,x^2 - \frac{1}{8}\,x - \frac{5}{2}i \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) & = & \frac{1}{2}i\,z_1(x) + \frac{3}{8}i\,x^2 - \frac{1}{8}\,x + \frac{5}{2}i \\ z_2'(x) & = & -\frac{1}{2}i\,z_2(x) - \frac{3}{8}i\,x^2 - \frac{1}{8}\,x - \frac{5}{2}i \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = -\frac{3}{4}\,x^2 + \alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} + \frac{11}{4}i\,x + \frac{1}{2},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = -\frac{3}{4}\,x^2 + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} - \frac{11}{4}i\,x + \frac{1}{2},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x) = -\frac{3}{2}\,x^2 + \alpha e^{\left(\frac{1}{2}\,i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\,i\,x\right)} + 1,$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{2}\,i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{2}\,i\,x\right)} - \frac{11}{2}\,x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ 4f'(-x)+2f(x) = -3\,x^2 + x - 20\\
\Longleftrightarrow&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = -\frac{3}{2}\,x^2 + 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right)+1,\quad h(x) = -2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{11}{2}\,x\\
\Longleftrightarrow&\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = g(x)+h(x) = -\frac{3}{2}\,x^2 + 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{11}{2}\,x + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{3}{2}\,x^2 + 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{11}{2}\,x + 1 \end{cases} \mid \alpha\in\mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 88. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),\quad \text{et :}\quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad 3f''(-x)+6f(x) = \sin(4\,x) &\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad 3\left(g''(-x)+h''(-x)\right) + 6\left(g(x)+h(x)\right) = \sin(4\,x)\\
&\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(3g''(x)+6g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-3h''(x)+6h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(4\,x)}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} 3g''(x)+6g(x) & = & 0 \\ -3h''(x)+6h(x) & = & \sin(4\,x) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x) = \beta\cos\left(\sqrt{2}x\right) + \alpha\sin\left(\sqrt{2}x\right),$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \delta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \frac{1}{54}\,\sin(4\,x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ 3f''(-x)+6f(x) = \sin(4\,x)\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(\sqrt{2}x\right),\quad h(x) = \gamma e^{\left(\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \frac{1}{54}\,\sin(4\,x)\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = g(x)+h(x) = \beta\cos\left(\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \frac{1}{54}\,\sin(4\,x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \beta\cos\left(\sqrt{2}x\right)+\gamma e^{\left(\sqrt{2}x\right)}-\gamma e^{\left(-\sqrt{2}x\right)}+\frac{1}{54}\sin(4\,x)\end{cases}\mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 89. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad 2f''(-x)+10f(x)=1 &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad 2\left(g''(-x)+h''(-x)\right)+10\left(g(x)+h(x)\right)=1\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\left(2g''(x)+10g(x)\right)}_{\text{paire}}+\underbrace{\left(-2h''(x)+10h(x)\right)}_{\text{impaire}}=\underbrace{1}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}2g''(x)+10g(x) &=& 1\\ -2h''(x)+10h(x) &=& 0\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\beta\cos\left(\sqrt{5}x\right)+\alpha\sin\left(\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{10},$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)}+\delta e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\ 2f''(-x)+10f(x)=1\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta\cos\left(\sqrt{5}x\right)+\frac{1}{10},\quad h(x)=\gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}\\ \iff&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta\cos\left(\sqrt{5}x\right)+\gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}+\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \beta\cos\left(\sqrt{5}x\right)+\gamma e^{\left(\sqrt{5}x\right)}-\gamma e^{\left(-\sqrt{5}x\right)}+\frac{1}{10}\end{cases}\mid(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 90. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 7

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),\qquad \text{et :}\quad g''(x)=g''(-x),\ h''(x)=-h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -6f''(-x) + f(x) = e^{(2\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -6\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = e^{(2\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-6g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(6h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -6g''(x) + g(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \\ 6h''(x) + h(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{46}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{46}\,e^{(-2\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right) + \gamma \sin\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{50}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{50}\,e^{(-2\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -6f''(-x) + f(x) = e^{(2\,x)} \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{46}\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{46}\,e^{(-2\,x)}, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{50}\,e^{(2\,x)} - \\
\iff &\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{575}\,e^{(2\,x)} - \frac{24}{575}\,e^{(-2\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{575}\,e^{(2\,x)} - \frac{24}{575}\,e^{(-2\,x)} \end{array}\right. \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 91. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - 2f(x) = e^{x} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(g''(-x) + h''(-x)\right) - 2\,(g(x) + h(x)) = e^{x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(g''(x) - 2g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-h''(x) - 2h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x}}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} g''(x) - 2g(x) & = & \frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \\ -h''(x) - 2h(x) & = & -\frac{1}{2}\,e^{(-x)} + \frac{1}{2}\,e^{x} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{2}\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,e^{x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\sqrt{2}x\right) + \gamma \sin\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{6}\, e^{(-x)} - \frac{1}{6}\, e^{x}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) - 2f(x) = e^{x} \\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{2}\, e^{(-x)} - \frac{1}{2}\, e^{x}, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{6}\, e^{(-x)} - \frac{1}{6}\, e^{x} \\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{3}\, e^{(-x)} - \frac{2}{3}\, e^{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \beta e^{\left(\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{3}\, e^{(-x)} - \frac{2}{3}\, e^{x} \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 92. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) - f(x) = -x^2 - x \Longleftrightarrow &\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(g''(-x) + h''(-x)\right) - \left(g(x) + h(x)\right) = -x^2 - x \\
\Longleftrightarrow &\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(g''(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-h''(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-x^2}_{\text{paire}} + \underbrace{-x}_{\text{impaire}} \\
\Longleftrightarrow &\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) - g(x) &= -x^2 \\ -h''(x) - h(x) &= -x \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + \beta e^{(-x)} + \alpha e^{x} + 2,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos(x) + \gamma \sin(x) + x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) - f(x) = -x^2 - x \\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + 2, \quad h(x) = \gamma \sin(x) + x \\
\Longleftrightarrow &\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = x^2 + \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) + x + 2.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad x^2 + \beta e^{(-x)} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) + x + 2 \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 93. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \qquad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1087f''(-x) + f(x) = \cos(3\,x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1087\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = \cos(3\,x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(1087g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-1087h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(3\,x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 1087g''(x) + g(x) &= \cos(3\,x) \\ -1087h''(x) + h(x) &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right) - \frac{1}{9782}\cos(3\,x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)} + \delta e^{\left(-\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 1087f''(-x) + f(x) = \cos(3\,x) \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right) - \frac{1}{9782}\cos(3\,x), \quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)} \\
\iff &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)} - \frac{1}{9782}\cos(3\,x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta\cos\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{1087}\sqrt{1087}x\right)} - \frac{1}{9782}\cos(3\,x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 94. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f'(-x) + f(x) = e^{(-3\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g'(-x) + h'(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = e^{(-3\,x)} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2h'(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2g'(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{1}{2}e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}e^{(-3\,x)}}_{\text{paire}} + \underbrace{-\frac{1}{2}e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}e^{(-3\,x)}}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -2h'(x) + g(x) &= \frac{1}{2}e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}e^{(-3\,x)} \\ 2g'(x) + h(x) &= -\frac{1}{2}e^{(3\,x)} + \frac{1}{2}e^{(-3\,x)} \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\, e^{(3\,x)} + \frac{1}{4}\, e^{(-3\,x)} \\ -\frac{1}{4}\, e^{(3\,x)} - \frac{1}{4}\, e^{(-3\,x)} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\, e^{(3\,x)} + \frac{1}{4}\, e^{(-3\,x)} \\ -\frac{1}{4}\, e^{(3\,x)} - \frac{1}{4}\, e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\, e^{(3\,x)} + \frac{1}{4}\, e^{(-3\,x)} \\ -\frac{1}{4}\, e^{(3\,x)} - \frac{1}{4}\, e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{8}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right) e^{(-3\,x)} \\ \left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{8}\right) e^{(-3\,x)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\, z_1(x) \\ -\frac{1}{2}i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{8}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right) e^{(-3\,x)} \\ \left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{8}\right) e^{(-3\,x)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= \frac{1}{2}i\, z_1(x) - \left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{8}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right) e^{(-3\,x)} \\ z_2'(x) &= -\frac{1}{2}i\, z_2(x) + \left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{8}\right) e^{(-3\,x)} \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} - \left(\frac{7}{148}i + \frac{5}{148}\right) e^{(3\,x)} + \left(\frac{7}{148}i - \frac{5}{148}\right) e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} + \left(\frac{7}{148}i - \frac{5}{148}\right) e^{(3\,x)} - \left(\frac{7}{148}i + \frac{5}{148}\right) e^{(-3\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} - \frac{5}{74}\, e^{(3\,x)} - \frac{5}{74}\, e^{(-3\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{2}i\,x\right)} + i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{2}i\,x\right)} - \frac{7}{74}\, e^{(3\,x)} + \frac{7}{74}\, e^{(-3\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -2f'(-x) + f(x) = e^{(-3\,x)} \\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{5}{74}\, e^{(3\,x)} - \frac{5}{74}\, e^{(-3\,x)}, \quad h(x) = 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{7}{74}\, e^{(3\,x)} + \frac{7}{74}\, e^{(-3\,x)} \\
\iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{6}{37}\, e^{(3\,x)} + \frac{1}{37}\, e^{(-3\,x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) + 2\,\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{6}{37}\, e^{(3\,x)} + \frac{1}{37}\, e^{(-3\,x)} \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 95. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions ← page 8

telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \qquad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2f''(-x) + f(x) = -7\,x^2 + x + 5 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = -7\,x^2 + x + 5 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-2g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(2h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{-7\,x^2 + 5}_{\text{paire}} + \underbrace{x}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2g''(x) + g(x) & = & -7\,x^2 + 5 \\ 2h''(x) + h(x) & = & x \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -7\,x^2 + \alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 23,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + x.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -2f''(-x) + f(x) = -7\,x^2 + x + 5 \\
\iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -7\,x^2 + \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - 23, \quad h(x) = \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + x \\
\iff &\exists(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = -7\,x^2 + \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + x - 23.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -7\,x^2 + \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + x - 23 \end{array}\right. \mid (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 96. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \qquad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 5f''(-x) - 3f(x) = \sin(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 5\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - 3\,(g(x) + h(x)) = \sin(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(5g''(x) - 3g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-5h''(x) - 3h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{0}_{\text{paire}} + \underbrace{\sin(x)}_{\text{impaire}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} 5g''(x) - 3g(x) & = & 0 \\ -5h''(x) - 3h(x) & = & \sin(x) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\alpha e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)},$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\delta\cos\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\gamma\sin\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\frac{1}{2}\sin(x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R},\ 5f''(-x)-3f(x)=\sin(x)\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)},\quad h(x)=\gamma\sin\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\frac{1}{2}\sin(x)\\
\Longleftrightarrow&\exists(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+h(x)=\beta e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\frac{1}{2}\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}&\to\ \mathbb{R}\\ x&\mapsto\ \beta e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}+\beta e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)}+\gamma\sin\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}x\right)+\frac{1}{2}\sin(x)\end{cases}\ \middle|\ (\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 97. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que : $f=g+h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-g'(-x),\ h'(x)=h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(-x)-f(x)=\cos(x)&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \big(g'(-x)+h'(-x)\big)-\big(g(x)+h(x)\big)=\cos(x)\\
&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\big(h'(x)-g(x)\big)}_{\text{paire}}+\underbrace{\big(-g'(x)-h(x)\big)}_{\text{impaire}}=\underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}}+\underbrace{0}_{\text{impaire}}\\
&\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}h'(x)-g(x)&=\cos(x)\\ -g'(x)-h(x)&=0\end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, et posons : $Y=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$. Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Y'(x)=AY(x)+\begin{pmatrix}0\\\cos(x)\end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A=PDP^{-1}$, avec : $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$, et : $D=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$. Posons : $Z=P^{-1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad Z'(x)&=P^{-1}AY(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\\cos(x)\end{pmatrix}\\
&=DP^{-1}Y(x)+P^{-1}\begin{pmatrix}0\\\cos(x)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}Z(x)+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i\cos(x)\\-\frac{1}{2}i\cos(x)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}i\,z_1(x)\\-i\,z_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i\cos(x)\\-\frac{1}{2}i\cos(x)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= i\,z_1(x) + \frac{1}{2}i\,\cos(x) \\ z_2'(x) &= -i\,z_2(x) - \frac{1}{2}i\,\cos(x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4} i\,x e^{(i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4} i\,x e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(i\,x)},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h.

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4} i\,x e^{(i\,x)} + \beta e^{(-i\,x)} - \frac{1}{4} i\,x e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(i\,x)} - \frac{1}{8}\,e^{(-i\,x)},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -i\,\alpha e^{(i\,x)} + \frac{1}{4}\,x e^{(i\,x)} + i\,\beta e^{(-i\,x)} + \frac{1}{4}\,x e^{(-i\,x)} - \frac{1}{8} i\,e^{(i\,x)} + \frac{1}{8} i\,e^{(-i\,x)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) - f(x) = \cos(x) \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x), \quad h(x) = \frac{1}{2}\,x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x) \\ \iff &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\,x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x). \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\,\alpha\cos(x) + \frac{1}{2}\,x\cos(x) + 2\,\alpha\sin(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x) - \frac{1}{4}\,\cos(x) + \frac{1}{4}\,\sin(x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)

Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 98. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et h' paire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -16 f'(-x) - f(x) = \cos(2\,x) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -16\left(g'(-x) + h'(-x)\right) - (g(x) + h(x)) = \cos(2\,x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(-16h'(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(16g'(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(2\,x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -16h'(x) - g(x) &= \cos(2\,x) \\ 16g'(x) - h(x) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Pour résoudre ce système différentiel, nous introduisons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$, et posons : $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$.

Le système ci-dessus équivaut alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{16}\cos(2\,x) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on trouve après calculs que : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16}i \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Après inversion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus, à gauche, par P^{-1}, on a donc l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad Z'(x) &= P^{-1}AY(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{16}\cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= DP^{-1}Y(x) + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{16}\cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{16}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16}i \end{pmatrix} Z(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{32}i\cos(2x) \\ -\frac{1}{32}i\cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{16}i\, z_1(x) \\ -\frac{1}{16}i\, z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{32}i\cos(2x) \\ -\frac{1}{32}i\cos(2x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) = \frac{1}{16}i\, z_1(x) + \frac{1}{32}i\cos(2x) \\ z_2'(x) = -\frac{1}{16}i\, z_2(x) - \frac{1}{32}i\cos(2x) \end{cases}$$

Nous avons là deux équations différentielles linéaires du premier ordre : la résolution est classique, nous ne la détaillons pas. On en déduit que les solutions z_1 et z_2 du système ci-dessus sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{16}i\,x\right)} + \frac{1}{2046}\cos(2x) + \frac{16}{1023}i\sin(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_2(x) = \beta e^{\left(-\frac{1}{16}i\,x\right)} + \frac{1}{2046}\cos(2x) - \frac{16}{1023}i\sin(2x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Or on a : $Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'en déduire les expressions de g et h. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{16}i\,x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{16}i\,x\right)} + \frac{1}{1023}\cos(2x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = i\,\alpha e^{\left(\frac{1}{16}i\,x\right)} - i\,\beta e^{\left(-\frac{1}{16}i\,x\right)} - \frac{32}{1023}\sin(2x).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ -16f'(-x) - f(x) = \cos(2x) \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{16}x\right) + \frac{1}{1023}\cos(2x), \quad h(x) = -2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{16}x\right) - \frac{32}{1023}\sin(2x) \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{16}x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{16}x\right) + \frac{1}{1023}\cos(2x) - \frac{32}{1023}\sin(2x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\,\alpha\cos\left(\frac{1}{16}x\right) - 2\,\alpha\sin\left(\frac{1}{16}x\right) + \frac{1}{1023}\cos(2x) - \frac{32}{1023}\sin(2x) \end{cases} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Ici α est pris réel, allant à rebours de la quantification ci-dessus, parce qu'on veut f à valeurs réelles.)
Remarque. Au lieu de passer par une équation différentielle sous forme matricielle, on pouvait aussi poser : $u = f + ig$, et constater que u vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On en déduit une expression explicite de u puis, en prenant ses parties réelle et imaginaire, on obtient f et g.

Corrigé 99. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x), \quad \text{et :} \quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad 2f''(-x) + f(x) = \cos(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) + (g(x) + h(x)) = \cos(x)\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(2g''(x) + g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-2h''(x) + h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2g''(x) + g(x) &=& \cos(x)\\ -2h''(x) + h(x) &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \delta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}.$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ 2f''(-x) + f(x) = \cos(x)\\ \iff&\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \cos(x),\quad h(x) = \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)}\\ \iff&\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \cos(x).\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \beta\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \gamma e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \cos(x)\end{array}\right. \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 100. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que : $f = g + h$, avec g paire et h impaire. De plus g et h sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque l'on sait démontrer que l'on a : ← page 8

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Par ailleurs, en dérivant les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$, $h(x) = -h(-x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -g'(-x),\ h'(x) = h'(-x),\quad \text{et :}\quad g''(x) = g''(-x),\ h''(x) = -h''(-x),$$

autrement dit : g' est impaire et g'' paire, et h' est paire, h'' impaire (on retiendra simplement que la parité alterne à chaque dérivation). On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad 2f''(-x) - f(x) = \cos(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2\left(g''(-x) + h''(-x)\right) - (g(x) + h(x)) = \cos(x)\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{\left(2g''(x) - g(x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(-2h''(x) - h(x)\right)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\cos(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2g''(x) - g(x) &=& \cos(x)\\ -2h''(x) - h(x) &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est vraie par *unicité* de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous avons là deux équations différentielles linéaires du second ordre qu'on sait classiquement résoudre (en passant par l'équation caractéristique, la recherche d'une solution particulière, etc.). Nous ne détaillons donc pas leur résolution. On en déduit que si f est solution de (E), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \alpha e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{3}\cos(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right).$$

Or g et h sont respectivement paire et impaire. On en déduit que la partie impaire de g est nulle, et la partie paire de h est nulle. On regarde à quelle condition on a bien nullité de ces deux parties, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 2f''(-x) - f(x) = \cos(x)\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} - \frac{1}{3}\cos(x), \quad h(x) = \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)\\
\Longleftrightarrow &\exists(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) = \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{3}\cos(x).
\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)} + \gamma \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{3}\cos(x) \end{cases} \mid (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$