Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

💡 Révisions sur les équations différentielles linéaires du second ordre.

Remarque sur la génération du membre de droite. Ces exercices ne vous entraînent pas à traiter le cas où le second membre est de la forme « exponentielle × polynôme ». Pour ne pas alourdir vainement l'exercice, j'ai aussi fait en sorte que le principe de superposition ne soit pas utile. Un jour, peut-être.

Exercice 1. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 10

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = -\sin(4x). \tag{E}$$

Exercice 2. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 10

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + 2y(x) = -4x - 1. \tag{E}$$

Exercice 3. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 11

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - 5y(x) = x. \tag{E}$$

Exercice 4. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 12

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) + 31y(x) = -8x^2 + x. \tag{E}$$

Exercice 5. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 13

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 6. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 14

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - y(x) = -\cos(2x). \tag{E}$$

Exercice 7. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 14

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + 4y(x) = -\sin(x). \tag{E}$$

Exercice 8. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 15

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y(x) = \sin(x). \tag{E}$$

Exercice 9. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 16

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 13y(x) = -53x^2 + x + 1. \tag{E}$$

Exercice 10. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 17

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = 2\,\sin(x)\,. \tag{E}$$

Exercice 11. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 18

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 3y'(x) - 79y(x) = -8\,x^2 + x + 8. \tag{E}$$

Exercice 12. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 19

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = -2\,\cos(x)\,. \tag{E}$$

Exercice 13. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 20

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = -6\,\sin(2\,x)\,. \tag{E}$$

Exercice 14. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 21

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 1. \tag{E}$$

Exercice 15. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 21

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = -2. \tag{E}$$

Exercice 16. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 22

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 4y'(x) - y(x) = -2\,\sin(x)\,. \tag{E}$$

Exercice 17. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 22

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + y(x) = -3\,e^{(3\,x)}. \tag{E}$$

Exercice 18. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 23

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 13y(x) = \sin(x)\,. \tag{E}$$

Exercice 19. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 24

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4. \tag{E}$$

Exercice 20. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 25

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 12y'(x) - y(x) = -5\,e^{(-x)}. \tag{E}$$

Exercice 21. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 25

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = -x. \tag{E}$$

Exercice 22. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 26

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = -\sin(7x). \tag{E}$$

Exercice 23. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 27

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 51y'(x) - y(x) = 8\sin(8x). \tag{E}$$

Exercice 24. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 28

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 6y'(x) - y(x) = -13x^2 + x + 2. \tag{E}$$

Exercice 25. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 29

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 12y'(x) - y(x) = 3\sin(6x). \tag{E}$$

Exercice 26. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 29

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) - 123y(x) = x^2 - x - 1. \tag{E}$$

Exercice 27. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 30

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 7y(x) = 2x^2 - x. \tag{E}$$

Exercice 28. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 31

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + 4y(x) = 1. \tag{E}$$

Exercice 29. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 31

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = -2x - 7. \tag{E}$$

Exercice 30. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 32

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 6\sin(x). \tag{E}$$

Exercice 31. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 33

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - y(x) = -\sin(2x). \tag{E}$$

Exercice 32. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 34

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = -2x + 1. \tag{E}$$

Exercice 33. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 35

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 14y'(x) - 2y(x) = -\sin(2\,x). \tag{E}$$

Exercice 34. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 36

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = -10\,\cos(29\,x). \tag{E}$$

Exercice 35. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 37

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y(x) = -x^2 - 8\,x + 2. \tag{E}$$

Exercice 36. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 37

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = e^x. \tag{E}$$

Exercice 37. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 38

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 3y(x) = 1. \tag{E}$$

Exercice 38. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 38

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 28\,x + 2. \tag{E}$$

Exercice 39. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 39

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = -1. \tag{E}$$

Exercice 40. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 40

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 6y'(x) - y(x) = -x - 2. \tag{E}$$

Exercice 41. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 40

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 4y'(x) - 6y(x) = -x - 3. \tag{E}$$

Exercice 42. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 41

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + y(x) = -27\,\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 43. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 42

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 8y'(x) + y(x) = -5\,x^2 - 4\,x + 7. \tag{E}$$

Exercice 44. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 43

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + y(x) = -\sin(x). \tag{E}$$

Exercice 45. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 44

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 16y'(x) - 3y(x) = 2\,x + 3. \tag{E}$$

Exercice 46. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 44

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - 7y(x) = x^2 + x + 1. \tag{E}$$

Exercice 47. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 45

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = x^2 + x - 1. \tag{E}$$

Exercice 48. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 46

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 7y(x) = -\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 49. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 47

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + y(x) = 2\,\sin(x). \tag{E}$$

Exercice 50. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 48

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(x). \tag{E}$$

Exercice 51. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 48

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 9y'(x) - 2y(x) = 54\,\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 52. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 49

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y(x) = 16\,x + 2. \tag{E}$$

Exercice 53. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 50

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(14\,x). \tag{E}$$

Exercice 54. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 51

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) - 10y(x) = -2\,e^{(-2\,x)}. \tag{E}$$

Exercice 55. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 52

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 14y(x) = 14\,\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 56. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 53

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - y(x) = 2\,x^2 + 1. \qquad (E)$$

Exercice 57. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 53

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = -2\,e^{x}. \qquad (E)$$

Exercice 58. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 54

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 3y'(x) + 11y(x) = 4\,x - 1. \qquad (E)$$

Exercice 59. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 55

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 7\,x^2 - 88\,x. \qquad (E)$$

Exercice 60. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 56

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + 9\,x + 1. \qquad (E)$$

Exercice 61. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 56

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -\cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 62. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 57

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 169y'(x) - 2y(x) = -e^{x}. \qquad (E)$$

Exercice 63. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 58

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) - y(x) = -6\,e^{(-x)}. \qquad (E)$$

Exercice 64. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 59

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 13y(x) = -\sin(2\,x). \qquad (E)$$

Exercice 65. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 60

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 3y'(x) - 3y(x) = x. \qquad (E)$$

Exercice 66. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 60

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = -1. \qquad (E)$$

Exercice 67. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 61

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 3y'(x) - 14y(x) = -\cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 68. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 62

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 6y(x) = -2\cos(9\,x). \tag{E}$$

Exercice 69. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 63

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 7y'(x) + y(x) = -37\,x + 1. \tag{E}$$

Exercice 70. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 63

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - y(x) = -3\cos(4\,x). \tag{E}$$

Exercice 71. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 64

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 8y'(x) - 3y(x) = -26\,e^{(-19\,x)}. \tag{E}$$

Exercice 72. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 65

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 3y'(x) - 5y(x) = 2\,e^{x}. \tag{E}$$

Exercice 73. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 66

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = -21\,x^2 - x - 1. \tag{E}$$

Exercice 74. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 67

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - y(x) = -\sin(4\,x). \tag{E}$$

Exercice 75. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 68

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 74y'(x) - y(x) = \sin(3\,x). \tag{E}$$

Exercice 76. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 68

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - 3y(x) = -2\,e^{x}. \tag{E}$$

Exercice 77. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 69

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - 17y(x) = 4\,x^2 + 2\,x + 1. \tag{E}$$

Exercice 78. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 70

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 17y'(x) + y(x) = \cos(x). \tag{E}$$

Exercice 79. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 71

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = -e^{(9\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 80. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 72

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + y(x) = -e^{(4\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 81. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 72

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -5\,\cos(8\,x). \qquad (E)$$

Exercice 82. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 73

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 3y(x) = -2\,e^{x}. \qquad (E)$$

Exercice 83. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 74

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + 2y(x) = \sin(x). \qquad (E)$$

Exercice 84. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 75

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y(x) = -e^{(-46\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 85. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 75

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y(x) = 2\,\sin(2\,x). \qquad (E)$$

Exercice 86. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 76

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 8y'(x) - 58y(x) = e^{(2\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 87. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 77

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) - 5y(x) = -8\,\sin(x). \qquad (E)$$

Exercice 88. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 78

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - y(x) = e^{(-4\,x)}. \qquad (E)$$

Exercice 89. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 79

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + 4y(x) = 4\,\cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 90. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 80

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - 11y(x) = \cos(x). \qquad (E)$$

Exercice 91. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 81

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 9y'(x) + y(x) = 3\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 92. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 81

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) - 51y(x) = e^{(-x)}. \tag{E}$$

Exercice 93. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 82

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y(x) = -2\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 94. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 83

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 9y(x) = 2. \tag{E}$$

Exercice 95. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 83

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 66y(x) = -e^{(-x)}. \tag{E}$$

Exercice 96. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 84

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 1. \tag{E}$$

Exercice 97. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 85

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y(x) = 4\,x^2 - 1. \tag{E}$$

Exercice 98. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 85

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = 2\cos(x). \tag{E}$$

Exercice 99. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 86

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 24y'(x) + 23y(x) = \sin(8\,x). \tag{E}$$

Exercice 100. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : → page 87

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 4y'(x) - 12y(x) = e^{(-x)}. \tag{E}$$

Corrigé 1. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)\,, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y(x) = -e^{(4i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $4i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(4i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 4i\alpha e^{4i\,x}, \quad y_p''(x) = -16\alpha e^{4i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p(x) = -e^{(4i\,x)} &\iff -15\alpha = -1\\ &\iff \alpha = \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{15}\,e^{(4i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{15}\sin(4\,x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{15}\sin(4\,x) + a\cos(x) + b\sin(x) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 2. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7$.

Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x)=\alpha,\quad y_p''(x)=0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)+y_p'(x)+2y_p(x) = -4x-1\\ \Longleftrightarrow &\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha+2(\alpha x+\beta) = -4x-1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2\alpha & & & = & -4\\ \alpha & + & 2\beta & = & -1 \end{array}\right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x\mapsto -2x+\frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad -2x+\frac{1}{2}+\left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)+b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 3. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2-r-5=0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2-4\times(-5) = 21$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x\mapsto be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{21}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{21}-1\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x)=\alpha,\quad y_p''(x)=0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) - 5y_p(x) = x \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -\alpha - 5(\alpha x + \beta) = x. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} - & 5\alpha & & = & 1 \\ - & \alpha & - & 5\beta & = 0 \end{array} \right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{1}{5}x + \frac{1}{25}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{1}{5}x + \frac{1}{25} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{21}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{21}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 4. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 5r + 31 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 31 = -99$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{5 + i\sqrt{99}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{11}i$ et $r_2 = \dfrac{5 - i\sqrt{99}}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{11}i$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{11}x\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{11}x\right)\right)e^{\left(\frac{5}{2}x\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 5y_p'(x) + 31y_p(x) = -8x^2 + x \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\alpha - 10\alpha x + 5\beta + 31\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = -8x^2 + x. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & 31\alpha & & & & = & -8 \\ - & 10\alpha & + & 31\beta & & = & 1 \\ & 2\alpha & - & 5\beta & + \ 31\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{8}{31}x^2 - \frac{49}{961}x + \frac{251}{29791}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{8}{31}\,x^2 - \frac{49}{961}\,x + \frac{251}{29791} + \left(a\cos\left(\frac{3}{2}\,\sqrt{11}x\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}\,\sqrt{11}x\right)\right)e^{\left(\frac{5}{2}\,x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 5. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2\,r - 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) = 16$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{(-3\,x)} + be^{x}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 2\,r - 3 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p'(x) - 3y_p(x) = -e^{(i\,x)} &\iff (2i-4)\,\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = \frac{-1}{2i-4} = \frac{1}{10}i + \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{1}{10}i + \frac{1}{5}\right) e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x) + ae^{(-3\,x)} + be^{x} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 6. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2-4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) - y(x) = -e^{(2i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie réelle. Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+r-1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(2i\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x) = 2i\alpha e^{2i\,x},\quad y_p''(x) = -4\alpha e^{2i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)+y_p'(x)-y_p(x) = -e^{(2i\,x)} &\iff (2i-5)\,\alpha = -1\\ &\iff \alpha = \frac{-1}{2i-5} = \frac{2}{29}i + \frac{5}{29}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{2}{29}i + \frac{5}{29}\right) e^{(2i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{5}{29}\cos(2\,x) - \frac{2}{29}\sin(2\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \frac{5}{29}\cos(2\,x) - \frac{2}{29}\sin(2\,x) + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}\end{cases} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 7. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r + 4 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 = -15$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) + 4y(x) = -e^{(ix)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r + 4 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(ix)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{ix}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{ix}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) + 4y_p(x) = -e^{(ix)} &\iff (-i+3)\,\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = \frac{-1}{-i+3} = -\frac{1}{10}i - \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\left(\frac{1}{10}i + \frac{3}{10}\right) e^{(ix)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 8. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -\sqrt{2}$ et $r_2 = \sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y(x) = e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p(x) = e^{(i\,x)} &\iff -3\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{3}\, e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{3} \sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{3}\sin(x) + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 9. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 13 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i\sqrt{13}$ et $r_2 = i\sqrt{13}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos\left(\sqrt{13}x\right) + b\sin\left(\sqrt{13}x\right), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 13 y_p(x) = -53\,x^2 + x + 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 13\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = -53\,x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 13\alpha & & & & & = & -53 \\ & & 13\beta & & & = & 1 \\ 2\alpha & & & + & 13\gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{53}{13}\,x^2 + \frac{1}{13}\,x + \frac{119}{169}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{53}{13}\,x^2 + \frac{1}{13}\,x + \frac{119}{169} + a\cos\left(\sqrt{13}x\right) + b\sin\left(\sqrt{13}x\right) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 10. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 1

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 2\,e^{(i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = 2\,e^{(i\,x)} &\iff i\alpha = 2\\ &\iff \alpha = -2i.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -2i\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -2\,\cos(x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -2\,\cos(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\,x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 11. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 3\,r - 79 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-79) = 325$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{325}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}$ et $r_2 = \dfrac{3-\sqrt{325}}{2} = -\frac{5}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(5\sqrt{13}+3\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(5\sqrt{13}-3\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 3y_p'(x) - 79y_p(x) = -8\,x^2 + x + 8\\ \iff &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha - 6\,\alpha x + 3\,\beta - 79\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = -8\,x^2 + x + 8.\end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\ 79\alpha & & & = -8 \\ -\ 6\alpha & -\ 79\beta & & = 1 \\ \ 2\alpha & -\ 3\beta & -\ 79\gamma & = 8 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto \frac{8}{79}\,x^2 - \frac{127}{6241}\,x - \frac{48283}{493039}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{8}{79}\,x^2 - \frac{127}{6241}\,x - \frac{48283}{493039} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(5\,\sqrt{13}+3\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(5\,\sqrt{13}-3\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 12. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)\,, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y(x) = -2\,e^{(i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i est une racine simple de l'équation caractéristique $r^2+1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto xe^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. Pour mettre en évidence les simplifications qui viendront dans les calculs, nous posons : $r_0 = i$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha\,(xr_0 + 1)\,e^{r_0 x}, \quad y_p''(x) = \alpha\left(xr_0^2 + 2r_0\right)e^{r_0 x}$$

et donc (je simplifie les exponentielles dans chaque membre, vu qu'elles sont égales) :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p(x) = -2\,e^{(i\,x)} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\left[\left(xr_0^2 + 2r_0\right) + x\right] = -2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\left[\left(r_0^2 + 1\right)x + 2\,r_0\right] = -2 \end{aligned}$$

Or nous savons que r_0 est une racine de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, donc : $r_0^2 + 1 = 0$ (c'est pour cette étape du raisonnement que j'ai choisi de donner un nom à r_0 plutôt que de traîner partout son expression explicite : à quoi bon se fatiguer à calculer des quantités qui, de toute façon, vont disparaître ? cela diminue de plus les risques de se tromper dans les calculs). Donc y_p vérifie (E') si et seulement si :

$$\alpha\,(2\,r_0) = -2 \iff \alpha = \frac{-2}{2\,r_0} = i.$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto i\,xe^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -x \sin(x) \,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -x\sin(x) + a\cos(x) + b\sin(x) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 13. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+4\,r+3=0$. Son discriminant est : $\Delta = 4^2-4\times 3 = 4$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2} = -1$ et $r_2 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2} = -3$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{(-x)} + ae^{(-3\,x)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = -6\,e^{(2i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 4\,r + 3 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(2i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2i\alpha e^{2i\,x}, \quad y_p''(x) = -4\alpha e^{2i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 4y_p'(x) + 3y_p(x) = -6\,e^{(2i\,x)} &\iff (8i-1)\,\alpha = -6 \\ &\iff \alpha = \frac{-6}{8i-1} = \frac{48}{65}i + \frac{6}{65}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{48}{65}i + \frac{6}{65}\right) e^{(2i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{48}{65}\cos(2\,x) + \frac{6}{65}\sin(2\,x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{48}{65}\cos(2\,x) + \frac{6}{65}\sin(2\,x) + be^{(-x)} + ae^{(-3\,x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 14. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)\,,\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto 1$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + a\cos(x) + b\sin(x) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 15. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\,x\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto -2$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2 + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\,x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 16. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+4\,r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta=4^2-4\times(-1)=20$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1=\dfrac{-4+\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}-2$ et $r_2=\dfrac{-4-\sqrt{20}}{2}=-\sqrt{5}-2$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a e^{\left(-x\left(\sqrt{5}+2\right)\right)} + b e^{\left(x\left(\sqrt{5}-2\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x)+4y'(x)-y(x)=-2\,e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+4\,r-1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x)=i\alpha e^{i\,x},\quad y_p''(x)=-\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)+4y_p'(x)-y_p(x)=-2\,e^{(i\,x)} &\iff (4i-2)\,\alpha=-2\\ &\iff \alpha=\frac{-2}{4i-2}=\frac{2}{5}i+\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x\mapsto \left(\frac{2}{5}i+\frac{1}{5}\right)\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x\mapsto \frac{2}{5}\,\cos(x)+\frac{1}{5}\,\sin(x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}=\left\{y:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \frac{2}{5}\,\cos(x)+\frac{1}{5}\,\sin(x)+ae^{\left(-x\left(\sqrt{5}+2\right)\right)}+be^{\left(x\left(\sqrt{5}-2\right)\right)}\end{cases}\ \middle|\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 17. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2-r+1=0$. Son discriminant est : $\Delta=(-1)^2-4\times1=-3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x\mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)+b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2-r+1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x\mapsto e^{(3\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x)=3\alpha e^{3\,x},\quad y_p''(x)=9\alpha e^{3\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)-y_p'(x)+y_p(x)=-3\,e^{(3\,x)} &\iff 7\alpha=-3\\ &\iff \alpha=-\frac{3}{7}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x\mapsto -\frac{3}{7}\,e^{(3\,x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}=\left\{y:\begin{cases}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & -\frac{3}{7}\,e^{(3\,x)}+\left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)+b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}\end{cases}\ \middle|\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 18. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2-13=0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1=-\sqrt{13}$ et $r_2=\sqrt{13}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x\mapsto be^{\left(\sqrt{13}x\right)}+ae^{\left(-\sqrt{13}x\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x)-13y(x)=e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2-13=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 13 y_p(x) = e^{(i\,x)} &\iff -14\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{14}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{14}\, e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{14} \sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{14}\sin(x) + b e^{\left(\sqrt{13}x\right)} + a e^{\left(-\sqrt{13}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 19. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2-r-2=0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-2) = 9$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a e^{(2\,x)} + b e^{(-x)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto -2$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2 + a e^{(2\,x)} + b e^{(-x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 20. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+12\,r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta = 12^2-4\times(-1) = 148$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-12+\sqrt{148}}{2} = \sqrt{37}-6$ et $r_2 = \dfrac{-12-\sqrt{148}}{2} = -\sqrt{37}-6$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{37}+6\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{37}-6\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+12\,r-1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x) = -\alpha e^{-x},\quad y_p''(x) = \alpha e^{-x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)+12y_p'(x)-y_p(x) = -5\,e^{(-x)} &\iff -12\alpha = -5\\ &\iff \alpha = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x\mapsto \frac{5}{12}\,e^{(-x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \frac{5}{12}\,e^{(-x)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{37}+6\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{37}-6\right)\right)}\end{cases} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 21. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 2

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+4\,r+13=0$. Son discriminant est : $\Delta = 4^2-4\times 13 = -36$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-4+i\sqrt{36}}{2} = -2+3i$ et $r_2 = \dfrac{-4-i\sqrt{36}}{2} = -2-3i$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x\mapsto (a\cos(3\,x)+b\sin(3\,x))e^{(-2\,x)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 4y_p'(x) + 13y_p(x) = -x \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 4\,\alpha + 13\,(\alpha x + \beta) = -x. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 13\alpha & & = & -1 \\ 4\alpha & + \ 13\beta & = & 0 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{1}{13}\,x + \frac{4}{169}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ -\frac{1}{13}\,x + \frac{4}{169} + (a\cos(3\,x) + b\sin(3\,x))e^{(-2\,x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 22. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)\,, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y(x) = -e^{(7i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $7i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(7i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 7i\alpha e^{7i\,x}, \quad y_p''(x) = -49\alpha e^{7i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p(x) = -e^{(7i\,x)} &\Longleftrightarrow -48\alpha = -1 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{48}\, e^{(7i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{48}\,\sin(7\,x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{48}\sin(7\,x) + a\cos(x) + b\sin(x) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 23. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 51\,r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-51)^2 - 4 \times (-1) = 2605$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{51+\sqrt{2605}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{51-\sqrt{2605}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto b e^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{2605}+51\right)\right)} + a e^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{2605}-51\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 51y'(x) - y(x) = 8\,e^{(8i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $8i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 51\,r - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(8i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 8i\alpha e^{8i\,x}, \quad y_p''(x) = -64\alpha e^{8i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 51y_p'(x) - y_p(x) = 8\,e^{(8i\,x)} &\iff (-408i - 65)\,\alpha = 8 \\ &\iff \alpha = \frac{8}{-408i-65} = \frac{3264}{170689}i - \frac{520}{170689}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{3264}{170689}i - \frac{520}{170689}\right) e^{(8i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{3264}{170689}\cos(8\,x) - \frac{520}{170689}\sin(8\,x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3264}{170689}\cos(8\,x) - \frac{520}{170689}\sin(8\,x) + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{2605}+51\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{2605}-51\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 24. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 6\,r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) = 40$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{6+\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}+3$ et $r_2 = \dfrac{6-\sqrt{40}}{2} = -\sqrt{10}+3$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(x\left(\sqrt{10}+3\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{10}-3\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta,\quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 6y_p'(x) - y_p(x) = -13\,x^2 + x + 2 \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha - 12\,\alpha x + 6\,\beta - \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = -13\,x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\ \alpha & & & = -13 \\ -\ 12\alpha & -\ \beta & & = 1 \\ \ 2\alpha & -\ 6\beta & -\ \gamma & = 2 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto 13\,x^2 - 157\,x + 966$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 13\,x^2 - 157\,x + 966 + be^{\left(x\left(\sqrt{10}+3\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{10}-3\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 25. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 12\,r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times (-1) = 148$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{12 + \sqrt{148}}{2} = \sqrt{37} + 6$ et $r_2 = \dfrac{12 - \sqrt{148}}{2} = -\sqrt{37} + 6$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(x\left(\sqrt{37}+6\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{37}-6\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 12y'(x) - y(x) = 3\,e^{(6i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $6i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 12\,r - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(6i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 6i\alpha e^{6i\,x}, \quad y_p''(x) = -36\alpha e^{6i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 12y_p'(x) - y_p(x) = 3\,e^{(6i\,x)} &\iff (-72i - 37)\,\alpha = 3 \\ &\iff \alpha = \frac{3}{-72i - 37} = \frac{216}{6553}i - \frac{111}{6553}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{216}{6553}i - \frac{111}{6553}\right) e^{(6i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{216}{6553}\cos(6\,x) - \frac{111}{6553}\sin(6\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{216}{6553}\cos(6\,x) - \frac{111}{6553}\sin(6\,x) + be^{\left(x\left(\sqrt{37}+6\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{37}-6\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 26. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons ← page 3

résoudre une telle équation.

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2r - 123 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-123) = 496$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-2+\sqrt{496}}{2} = 2\sqrt{31} - 1$ et $r_2 = \dfrac{-2-\sqrt{496}}{2} = -2\sqrt{31} - 1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-x\left(2\sqrt{31}+1\right)\right)} + be^{\left(x\left(2\sqrt{31}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p'(x) - 123y_p(x) = x^2 - x - 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 4\,\alpha x + 2\,\beta - 123\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = x^2 - x - 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\ 123\alpha & & & & & = & 1 \\ 4\alpha & - & 123\beta & & & = & -1 \\ 2\alpha & + & 2\beta & - & 123\gamma & = & -1 \end{array} \right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{1}{123}\,x^2 + \frac{119}{15129}\,x + \frac{15121}{1860867}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{123}\,x^2 + \frac{119}{15129}\,x + \frac{15121}{1860867} + ae^{\left(-x\left(2\sqrt{31}+1\right)\right)} + be^{\left(x\left(2\sqrt{31}-1\right)\right)} \end{array} \right. \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 27. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r - 7 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-7) = 29$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) - 7 y_p(x) = 2\,x^2 - x \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 2\,\alpha x + \beta - 7\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 2\,x^2 - x. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -7\alpha & & & & & = & 2 \\ 2\alpha & - & 7\beta & & & = & -1 \\ 2\alpha & + & \beta & - & 7\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{2}{7}\,x^2 + \frac{3}{49}\,x - \frac{25}{343}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{2}{7}\,x^2 + \frac{3}{49}\,x - \frac{25}{343} + a e^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}+1\right)\right)} + b e^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 28. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r + 4 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 = -15$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto \frac{1}{4}$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \frac{1}{4} + \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 29. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à ← page 3

coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation.

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2\,r - 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) = 16$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{2+\sqrt{16}}{2} = 3$ et $r_2 = \dfrac{2-\sqrt{16}}{2} = -1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{(3\,x)} + be^{(-x)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p'(x) - 3y_p(x) = -2\,x - 7 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -2\,\alpha - 3\,(\alpha x + \beta) = -2\,x - 7. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\ 3\alpha & = -2 \\ -\ 2\alpha - 3\beta & = -7 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto \frac{2}{3}\,x + \frac{17}{9}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \frac{2}{3}\,x + \frac{17}{9} + ae^{(3\,x)} + be^{(-x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 30. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r - 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{(-2\,x)} + ae^{x},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 6\,e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) = 6\,e^{(i\,x)} &\iff (i-3)\,\alpha = 6\\ &\iff \alpha = \frac{6}{i-3} = -\frac{3}{5}i - \frac{9}{5}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\left(\frac{3}{5}i + \frac{9}{5}\right) e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{3}{5}\cos(x) - \frac{9}{5}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{3}{5}\cos(x) - \frac{9}{5}\sin(x) + be^{(-2\,x)} + ae^{x} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 31. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) - y(x) = -e^{(2i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + r - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(2i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2i\alpha e^{2i\,x}, \quad y_p''(x) = -4\alpha e^{2i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''\,(x) + y_p'\,(x) - y_p\,(x) = -e^{(2i\,x)} &\Longleftrightarrow (2i-5)\,\alpha = -1\\ &\Longleftrightarrow \alpha = \frac{-1}{2i-5} = \frac{2}{29}i + \frac{5}{29}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{2}{29}i + \frac{5}{29}\right) e^{(2i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{2}{29}\cos(2\,x) + \frac{5}{29}\sin(2\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{29}\cos(2\,x) + \frac{5}{29}\sin(2\,x) + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 32. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{(-x)} + be^{x},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''\,(x) - y_p\,(x) = -2\,x + 1\\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -(\alpha x + \beta) = -2\,x + 1.\end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\alpha & = -2 \\ -\beta & = 1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto 2\,x - 1$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,x - 1 + ae^{(-x)} + be^{x} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 33. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 3

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 14\,r - 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 14^2 - 4 \times (-2) = 204$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-14 + \sqrt{204}}{2} = \sqrt{51} - 7$ et $r_2 = \dfrac{-14 - \sqrt{204}}{2} = -\sqrt{51} - 7$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{51}+7\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{51}-7\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 14y'(x) - 2y(x) = -e^{(2i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 14\,r - 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(2i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2i\alpha e^{2i\,x}, \quad y_p''(x) = -4\alpha e^{2i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 14y_p'(x) - 2y_p(x) = -e^{(2i\,x)} &\iff (28i - 6)\,\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = \frac{-1}{28i - 6} = \frac{7}{205}i + \frac{3}{410}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{7}{205}i + \frac{3}{410}\right) e^{(2i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{7}{205}\cos(2\,x) + \frac{3}{410}\sin(2\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{7}{205} \cos(2\,x) + \frac{3}{410} \sin(2\,x) + ae^{\left(-x\left(\sqrt{51}+7\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{51}-7\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 34. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right) e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = -10\, e^{(29i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie réelle. Comme $29i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(29i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 29i\alpha e^{29i\,x}, \quad y_p''(x) = -841\alpha e^{29i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = -10\, e^{(29i\,x)} &\iff (29i - 840)\,\alpha = -10 \\ &\iff \alpha = \frac{-10}{29i - 840} = \frac{290}{706441} i + \frac{8400}{706441}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{290}{706441} i + \frac{8400}{706441}\right) e^{(29i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{8400}{706441} \cos(29\,x) - \frac{290}{706441} \sin(29\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{8400}{706441} \cos(29\,x) - \frac{290}{706441} \sin(29\,x) + \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right) e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Corrigé 35. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -\sqrt{2}$ et $r_2 = \sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)}, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p(x) = -x^2 - 8\,x + 2 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha - 2\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = -x^2 - 8\,x + 2. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2\alpha & & & & & = & -1 \\ & - & 2\beta & & & = & -8 \\ 2\alpha & & & - & 2\gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,x - \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E).
Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,x - \frac{1}{2} + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)} \end{array}\right. \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 36. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)\,, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha e^x, \quad y_p''(x) = \alpha e^x$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p(x) = e^x &\iff 2\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{2}\, e^x.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\, e^x + a\cos(x) + b\sin(x) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 37. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 3 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i\sqrt{3}$ et $r_2 = i\sqrt{3}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos\left(\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\sqrt{3}x\right), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto \frac{1}{3}$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3} + a\cos\left(\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\sqrt{3}x\right) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 38. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2\,r + 1 = 0$. Identité remarquable oblige, on reconnaît là : $(r-1)^2 = 0$, et on en déduit que l'équation caractéristique admet pour unique solution : $r = 1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto (ax+b)e^x, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = 28\,x + 2 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -2\,\alpha + (\alpha x + \beta) = 28\,x + 2. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} & \alpha & & = & 28 \\ - & 2\alpha & + \ \beta & = & 2 \end{array} \right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto 28\,x + 58$ est une solution particulière de (E).
Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 28\,x + 58 + (ax+b)e^x \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 39. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto -1$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -1 + a\cos(x) + b\sin(x) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 40. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 6\,r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) = 40$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{6+\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}+3$ et $r_2 = \dfrac{6-\sqrt{40}}{2} = -\sqrt{10}+3$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto b e^{\left(x\left(\sqrt{10}+3\right)\right)} + a e^{\left(-x\left(\sqrt{10}-3\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 6 y_p'(x) - y_p(x) = -x - 2 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -6\,\alpha - (\alpha x + \beta) = -x - 2. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} - \alpha = -1 \\ - 6\alpha - \beta = -2 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto x - 4$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - 4 + b e^{\left(x\left(\sqrt{10}+3\right)\right)} + a e^{\left(-x\left(\sqrt{10}-3\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 41. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 4\,r - 6 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-6) = 40$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-4+\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}-2$ et $r_2 = \dfrac{-4-\sqrt{40}}{2} = -\sqrt{10}-2$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a e^{\left(-x\left(\sqrt{10}+2\right)\right)} + b e^{\left(x\left(\sqrt{10}-2\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 4y_p'(x) - 6y_p(x) = -x - 3 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 4\,\alpha - 6\,(\alpha x + \beta) = -x - 3. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\ 6\alpha & = -1 \\ 4\alpha - 6\beta & = -3 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto \frac{1}{6}\,x + \frac{11}{18}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{6}\,x + \frac{11}{18} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{10}+2\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{10}-2\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 42. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = -27\,e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) + y_p(x) = -27\, e^{(i\,x)} \iff -i\alpha = -27$$
$$\iff \alpha = -27i.$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -27i\, e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto 27\,\sin(x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 27\,\sin(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 43. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 8\,r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 = 60$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-8+\sqrt{60}}{2} = \sqrt{15} - 4$ et $r_2 = \dfrac{-8-\sqrt{60}}{2} = -\sqrt{15} - 4$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{15}+4\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{15}-4\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 8y_p'(x) + y_p(x) = -5\,x^2 - 4\,x + 7$$
$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 16\,\alpha x + 8\,\beta + \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = -5\,x^2 - 4\,x + 7.$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha & & & & & = & -5 \\ 16\alpha & + & \beta & & & = & -4 \\ 2\alpha & + & 8\beta & + & \gamma & = & 7 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -5\,x^2 + 76\,x - 591$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -5\,x^2 + 76\,x - 591 + ae^{\left(-x\left(\sqrt{15}+4\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{15}-4\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 44. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 4

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = -e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) + y_p(x) = -e^{(i\,x)} &\iff -i\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = -i. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -i\, e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\cos(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\cos(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 45. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 16\,r - 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-16)^2 - 4 \times (-3) = 268$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{16+\sqrt{268}}{2} = \sqrt{67}+8$ et $r_2 = \dfrac{16-\sqrt{268}}{2} = -\sqrt{67}+8$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(x\left(\sqrt{67}+8\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{67}-8\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 16y_p'(x) - 3y_p(x) = 2\,x + 3 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -16\,\alpha - 3\,(\alpha x + \beta) = 2\,x + 3. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\ 3\alpha & = 2 \\ -\ 16\alpha - 3\beta & = 3 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{2}{3}\,x + \frac{23}{9}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{2}{3}\,x + \frac{23}{9} + be^{\left(x\left(\sqrt{67}+8\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{67}-8\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 46. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r - 7 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-7) = 29$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}-1\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) - 7y_p(x) = x^2 + x + 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha - 2\,\alpha x + \beta - 7\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} - & 7\alpha & & & & = & 1 \\ - & 2\alpha & - & 7\beta & & = & 1 \\ & 2\alpha & - & \beta & - \ 7\gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{1}{7}\,x^2 - \frac{5}{49}\,x - \frac{58}{343}$ est une solution particulière de (E).
Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{7}\,x^2 - \frac{5}{49}\,x - \frac{58}{343} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}-1\right)\right)} \end{array}\right. \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 47. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{(-x)} + be^{x},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p(x) = x^2 + x - 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha - \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\alpha & = 1 \\ -\beta & = 1 \\ 2\alpha - \gamma & = -1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -x^2 - x - 1$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 - x - 1 + ae^{(-x)} + be^x \end{cases} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 48. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r - 7 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-7) = 29$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{29}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{29}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{29}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{29}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) - 7y(x) = -e^{(ix)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + r - 7 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(ix)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{ix}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{ix}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) - 7y_p(x) = -e^{(ix)} &\iff (i-8)\,\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = \frac{-1}{i-8} = \frac{1}{65}i + \frac{8}{65}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{1}{65}i + \frac{8}{65}\right) e^{(ix)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{8}{65}\cos(x) - \frac{1}{65}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{8}{65}\cos(x) - \frac{1}{65}\sin(x) + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{29}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{29}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 49. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2-r+1=0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = 2\,e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) + y_p(x) = 2\,e^{(i\,x)} &\iff -i\alpha = 2 \\ &\iff \alpha = 2i. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto 2i\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto 2\cos(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\cos(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 50. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+r+1=0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2-4\times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+r+1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x},\quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = e^{(i\,x)} &\iff i\alpha = 1\\ &\iff \alpha = -i.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -i\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \sin(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 51. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 9r - 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-2) = 89$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{9+\sqrt{89}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{9-\sqrt{89}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto b e^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{89}+9\right)\right)} + a e^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{89}-9\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 9y'(x) - 2y(x) = 54\, e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 9r - 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 9y_p'(x) - 2y_p(x) = 54\, e^{(i\,x)} &\iff (-9i - 3)\,\alpha = 54 \\ &\iff \alpha = \frac{54}{-9i-3} = \frac{27}{5}i - \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{27}{5}i - \frac{9}{5}\right) e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{9}{5}\cos(x) - \frac{27}{5}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{9}{5}\cos(x) - \frac{27}{5}\sin(x) + b e^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{89}+9\right)\right)} + a e^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{89}-9\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 52. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -\sqrt{2}$ et $r_2 = \sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p(x) = 16\,x + 2 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -2\,(\alpha x + \beta) = 16\,x + 2. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\ 2\alpha & & = 16 \\ & -\ 2\beta & = 2 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -8\,x - 1$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -8\,x - 1 + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 53. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2\,r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-2 + i\sqrt{4}}{2} = -1 + i$ et $r_2 = \dfrac{-2 - i\sqrt{4}}{2} = -1 - i$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x))e^{(-x)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = e^{(14i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $14i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 2\,r + 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(14i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 14i\alpha e^{14i\,x}, \quad y_p''(x) = -196\alpha e^{14i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p'(x) + 2y_p(x) = e^{(14i\,x)} &\iff (28i - 194)\,\alpha = 1\\ &\iff \alpha = \frac{1}{28i - 194} = -\frac{7}{9605}i - \frac{97}{19210}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\left(\frac{7}{9605}i + \frac{97}{19210}\right) e^{(14i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{7}{9605}\cos(14\,x) - \frac{97}{19210}\sin(14\,x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{7}{9605}\cos(14\,x) - \frac{97}{19210}\sin(14\,x) + (a\cos(x) + b\sin(x))e^{(-x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 54. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2\,r - 10 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-10) = 44$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{2+\sqrt{44}}{2} = \sqrt{11} + 1$ et $r_2 = \dfrac{2-\sqrt{44}}{2} = -\sqrt{11} + 1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(x\left(\sqrt{11}+1\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{11}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 2\,r - 10 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-2\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = -2\alpha e^{-2\,x}, \quad y_p''(x) = 4\alpha e^{-2\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p'(x) - 10y_p(x) = -2\,e^{(-2\,x)} &\iff -2\alpha = -2\\ &\iff \alpha = 1.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto e^{(-2\,x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{(-2\,x)} + be^{\left(x\left(\sqrt{11}+1\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{11}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 55. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 14 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -\sqrt{14}$ et $r_2 = \sqrt{14}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\sqrt{14}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{14}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 14y(x) = 14\,e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 14 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 14y_p(x) = 14\,e^{(i\,x)} &\iff -15\alpha = 14 \\ &\iff \alpha = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{14}{15}\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{14}{15}\cos(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{14}{15}\cos(x) + be^{\left(\sqrt{14}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{14}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 56. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 5

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2-4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) - y_p(x) = 2\,x^2+1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 2\,\alpha x + \beta - \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 2\,x^2+1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\alpha & & & = 2 \\ 2\alpha & -\beta & & = 0 \\ 2\alpha & +\beta & -\gamma & = 1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -2\,x^2 - 4\,x - 9$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\,x^2 - 4\,x - 9 + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 57. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)\,,\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha e^x, \quad y_p''(x) = \alpha e^x$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p(x) = -2\,e^x &\iff 2\alpha = -2 \\ &\iff \alpha = -1. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -e^x.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -e^x + a\cos(x) + b\sin(x) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 58. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 3\,r + 11 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 11 = -35$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{3+i\sqrt{35}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{3-i\sqrt{35}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{35}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{35}x\right)\right) e^{\left(\frac{3}{2}x\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 3y_p'(x) + 11y_p(x) = 4\,x - 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -3\,\alpha + 11\,(\alpha x + \beta) = 4\,x - 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{rrcrcr} & 11\alpha & & & = & 4 \\ - & 3\alpha & + & 11\beta & = & -1 \end{array} \right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto \frac{4}{11}\,x + \frac{1}{121}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \frac{4}{11}\,x + \frac{1}{121} + \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{35}x\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{35}x\right)\right) e^{\left(\frac{3}{2}\,x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 59. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2\,r + 1 = 0$. Identité remarquable oblige, on reconnaît là : $(r-1)^2 = 0$, et on en déduit que l'équation caractéristique admet pour unique solution : $r = 1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto (ax+b)e^x, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = 7\,x^2 - 88\,x \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha - 4\,\alpha x + 2\,\beta + \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 7\,x^2 - 88\,x. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{rrcrcrcr} & \alpha & & & & & = & 7 \\ - & 4\alpha & + & \beta & & & = & -88 \\ & 2\alpha & - & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto 7\,x^2 - 60\,x - 134$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 7\,x^2 - 60\,x - 134 + (ax+b)e^x \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 60. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = x^2 + 9\,x + 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 2\,\alpha x + \beta + \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = x^2 + 9\,x + 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha & & & & & = & 1 \\ 2\alpha & + & \beta & & & = & 9 \\ 2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto x^2 + 7\,x - 8$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 7\,x - 8 + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 61. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+2\,r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta=2^2-4\times(-1)=8$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1=\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}-1$ et $r_2=\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=-\sqrt{2}-1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x\mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}+be^{\left(x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''\left(x\right)+2y'\left(x\right)-y\left(x\right)=-e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+2\,r-1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x\mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x)=i\alpha e^{i\,x},\quad y_p''(x)=-\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''\left(x\right)+2y_p'\left(x\right)-y_p\left(x\right)=-e^{(i\,x)} &\iff (2i-2)\,\alpha=-1\\ &\iff \alpha=\frac{-1}{2i-2}=\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x\mapsto\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x\mapsto\frac{1}{4}\,\cos\left(x\right)-\frac{1}{4}\,\sin\left(x\right).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}=\left\{y:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \frac{1}{4}\,\cos\left(x\right)-\frac{1}{4}\,\sin\left(x\right)+ae^{\left(-x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}+be^{\left(x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)}\end{cases}\ \middle|\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 62. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+169\,r-2=0$. Son discriminant est : $\Delta=169^2-4\times(-2)=28569$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1=\dfrac{-169+\sqrt{28569}}{2}$ et $r_2=\dfrac{-169-\sqrt{28569}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{28569}+169\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{28569}-169\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 169\,r - 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha e^x, \quad y_p''(x) = \alpha e^x$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 169y_p'(x) - 2y_p(x) = -e^x &\iff 168\alpha = -1\\ &\iff \alpha = -\frac{1}{168}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{168}\,e^x.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{168}\,e^x + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{28569}+169\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{28569}-169\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 63. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 5\,r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) = 29$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}+5\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}-5\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 5\,r - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = -\alpha e^{-x}, \quad y_p''(x) = \alpha e^{-x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 5y_p'(x) - y_p(x) = -6\,e^{(-x)} &\iff 5\alpha = -6\\ &\iff \alpha = -\frac{6}{5}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{6}{5}\, e^{(-x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{6}{5}\, e^{(-x)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}+5\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}-5\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 64. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+r-13=0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4\times(-13) = 53$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{53}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{53}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{53}-1\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) - 13y(x) = -e^{(2i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + r - 13 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(2i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2i\alpha e^{2i\,x}, \quad y_p''(x) = -4\alpha e^{2i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) - 13y_p(x) = -e^{(2i\,x)} &\iff (2i-17)\,\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = \frac{-1}{2i-17} = \frac{2}{293}i + \frac{17}{293}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{2}{293}i + \frac{17}{293}\right) e^{(2i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{2}{293}\cos(2\,x) + \frac{17}{293}\sin(2\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{293}\cos(2\,x) + \frac{17}{293}\sin(2\,x) + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{53}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{53}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 65. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 3\,r - 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-3) = 21$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{21}+3\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{21}-3\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 3y_p'(x) - 3y_p(x) = x \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ -3\,\alpha - 3\,(\alpha x + \beta) = x. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} - & 3\alpha & & & = & 1 \\ - & 3\alpha & - & 3\beta & = & 0 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{21}+3\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{21}-3\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 66. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2\,r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i$ et $r_2 = \dfrac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x))e^x, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto -\frac{1}{2}$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{2} + (a\cos(x) + b\sin(x))e^x \end{cases} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 67. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 6

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 3\,r - 14 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-14) = 65$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{3 + \sqrt{65}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{3 - \sqrt{65}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto b e^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{65}+3\right)\right)} + a e^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{65}-3\right)\right)}, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 3y'(x) - 14y(x) = -e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 3\,r - 14 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 3y_p'(x) - 14y_p(x) = -e^{(i\,x)} &\iff (-3i - 15)\,\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = \frac{-1}{-3i - 15} = -\frac{1}{78}i + \frac{5}{78}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\left(\frac{1}{78}i - \frac{5}{78}\right) e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{5}{78}\cos(x) + \frac{1}{78}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{5}{78}\cos(x) + \frac{1}{78}\sin(x) + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{65}+3\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{65}-3\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 68. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 6 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i\sqrt{6}$ et $r_2 = i\sqrt{6}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos\left(\sqrt{6}x\right) + b\sin\left(\sqrt{6}x\right), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 6y(x) = -2\,e^{(9i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme $9i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 6 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(9i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 9i\alpha e^{9i\,x}, \quad y_p''(x) = -81\alpha e^{9i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 6y_p(x) = -2\,e^{(9i\,x)} &\iff -75\alpha = -2 \\ &\iff \alpha = \frac{2}{75}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \frac{2}{75}\,e^{(9i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{2}{75} \cos(9\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{75}\cos(9\,x) + a\cos\left(\sqrt{6}x\right) + b\sin\left(\sqrt{6}x\right) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 69. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 7\,r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 7^2 - 4 \times 1 = 45$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-7+\sqrt{45}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{7}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-7-\sqrt{45}}{2} = -\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{7}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}+7\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}-7\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 7y_p'(x) + y_p(x) = -37\,x + 1 \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R},\ 7\,\alpha + (\alpha x + \beta) = -37\,x + 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha & & & = & -37 \\ 7\alpha & + & \beta & = & 1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -37\,x + 260$ est une solution particulière de (E).
Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -37\,x + 260 + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}+7\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}-7\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 70. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à ← page 7

coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation.

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2-4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) - y(x) = -3\,e^{(4i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme $4i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+r-1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(4i\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x) = 4i\alpha e^{4i\,x},\quad y_p''(x) = -16\alpha e^{4i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)+y_p'(x)-y_p(x) = -3\,e^{(4i\,x)} &\iff (4i-17)\,\alpha = -3\\ &\iff \alpha = \frac{-3}{4i-17} = \frac{12}{305}i + \frac{51}{305}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{12}{305}i + \frac{51}{305}\right)e^{(4i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{51}{305}\cos(4\,x) - \frac{12}{305}\sin(4\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \frac{51}{305}\cos(4\,x) - \frac{12}{305}\sin(4\,x) + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}\end{cases} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 71. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 8\,r - 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-8)^2 - 4\times$

$(-3) = 76$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{8+\sqrt{76}}{2} = \sqrt{19}+4$ et $r_2 = \dfrac{8-\sqrt{76}}{2} = -\sqrt{19}+4$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(x\left(\sqrt{19}+4\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{19}-4\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -19 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 8\,r - 3 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-19\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad y_p'(x) = -19\alpha e^{-19\,x},\quad y_p''(x) = 361\alpha e^{-19\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 8y_p'(x) - 3y_p(x) = -26\,e^{(-19\,x)} &\iff 510\alpha = -26\\ &\iff \alpha = -\frac{13}{255}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{13}{255}\,e^{(-19\,x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{13}{255}\,e^{(-19\,x)} + be^{\left(x\left(\sqrt{19}+4\right)\right)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{19}-4\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 72. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 3\,r - 5 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-5) = 29$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}+3\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{29}-3\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 3\,r - 5 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad y_p'(x) = \alpha e^x,\quad y_p''(x) = \alpha e^x$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 3y_p'(x) - 5y_p(x) = 2\,e^x \iff -\alpha = 2$$
$$\iff \alpha = -2.$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -2\,e^x.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\,e^x + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{29}+3\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{29}-3\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 73. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2\,r + 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-2 + i\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}i$ et $r_2 = \dfrac{-2 - i\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}i$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)e^{(-x)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p'(x) + 3y_p(x) = -21\,x^2 - x - 1$$
$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 4\,\alpha x + 2\,\beta + 3\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = -21\,x^2 - x - 1.$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 3\alpha & & & = & -21 \\ 4\alpha & + & 3\beta & = & -1 \\ 2\alpha & + & 2\beta + 3\gamma & = & -1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -7\,x^2 + 9\,x - \frac{5}{3}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -7\,x^2 + 9\,x - \frac{5}{3} + \left(a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)e^{(-x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 74. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) - y(x) = -e^{(4i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $4i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(4i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 4i\alpha e^{4i\,x}, \quad y_p''(x) = -16\alpha e^{4i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) - y_p(x) = -e^{(4i\,x)} &\iff (-4i - 17)\,\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = \frac{-1}{-4i-17} = -\frac{4}{305}i + \frac{17}{305}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\left(\frac{4}{305}i - \frac{17}{305}\right) e^{(4i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{4}{305}\cos(4\,x) + \frac{17}{305}\sin(4\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{4}{305}\cos(4\,x) + \frac{17}{305}\sin(4\,x) + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 75. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+74\,r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta=74^2-4\times(-1)=5480$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1=\dfrac{-74+\sqrt{5480}}{2}=\sqrt{1370}-37$ et $r_2=\dfrac{-74-\sqrt{5480}}{2}=-\sqrt{1370}-37$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x\mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{1370}+37\right)\right)}+be^{\left(x\left(\sqrt{1370}-37\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x)+74y'(x)-y(x)=e^{(3i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $3i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+74\,r-1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x\mapsto e^{(3i\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x)=3i\alpha e^{3i\,x},\quad y_p''(x)=-9\alpha e^{3i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)+74y_p'(x)-y_p(x)=e^{(3i\,x)} &\iff (222i-10)\,\alpha=1\\ &\iff \alpha=\frac{1}{222i-10}=-\frac{111}{24692}i-\frac{5}{24692}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x\mapsto -\left(\frac{111}{24692}i+\frac{5}{24692}\right)e^{(3i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x\mapsto -\frac{111}{24692}\cos(3\,x)-\frac{5}{24692}\sin(3\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}=\left\{y:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad -\frac{111}{24692}\cos(3\,x)-\frac{5}{24692}\sin(3\,x)+ae^{\left(-x\left(\sqrt{1370}+37\right)\right)}+be^{\left(x\left(\sqrt{1370}-37\right)\right)}\end{cases}\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 76. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r - 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-3) = 13$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r - 3 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha e^x, \quad y_p''(x) = \alpha e^x$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) - 3y_p(x) = -2\,e^x &\iff -3\alpha = -2 \\ &\iff \alpha = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto \frac{2}{3}\,e^x.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{3}\,e^x + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 77. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r - 17 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-17) = 69$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{69}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{69}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{69}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{69}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) - 17 y_p(x) = 4\,x^2 + 2\,x + 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha - 2\,\alpha x + \beta - 17\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 4\,x^2 + 2\,x + 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -\ 17\alpha & = 4 \\ -\ 2\alpha - 17\beta & = 2 \\ \ \ 2\alpha - \beta - 17\gamma & = 1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{4}{17}\,x^2 - \frac{26}{289}\,x - \frac{399}{4913}$ est une solution particulière de (E).
Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{4}{17}\,x^2 - \frac{26}{289}\,x - \frac{399}{4913} + b e^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{69}+1\right)\right)} + a e^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{69}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 78. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 17\,r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 17^2 - 4 \times 1 = 285$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-17 + \sqrt{285}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-17 - \sqrt{285}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a e^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{285}+17\right)\right)} + b e^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{285}-17\right)\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 17 y'(x) + y(x) = e^{(i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 17\,r + 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 17 y_p'(x) + y_p(x) = e^{(i\,x)} &\Longleftrightarrow 17 i\alpha = 1 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = -\frac{1}{17} i. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{17} i \, e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{17} \sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{17} \sin(x) + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{285}+17\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{285}-17\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 79. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 7

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{(-x)} + be^{x}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 9 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(9\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 9\alpha e^{9\,x}, \quad y_p''(x) = 81\alpha e^{9\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p(x) = -e^{(9\,x)} &\iff 80\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{80}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{80} e^{(9\,x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{80} e^{(9\,x)} + ae^{(-x)} + be^{x} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 80. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2-r+1=0$. Son discriminant est : $\Delta=(-1)^2-4\times 1=-3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)+b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 4 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2-r+1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x\mapsto e^{(4x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x)=4\alpha e^{4x},\quad y_p''(x)=16\alpha e^{4x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)-y_p'(x)+y_p(x)=-e^{(4x)} &\iff 13\alpha=-1\\ &\iff \alpha=-\frac{1}{13}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x\mapsto -\frac{1}{13}e^{(4x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}=\left\{y:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad -\frac{1}{13}e^{(4x)}+\left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)+b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}\end{cases}\ \middle|\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Corrigé 81. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+2r-1=0$. Son discriminant est : $\Delta=2^2-4\times(-1)=8$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1=\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}-1$ et $r_2=\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=-\sqrt{2}-1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x\mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}+be^{\left(x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -5\,e^{(8i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme $8i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+2\,r-1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(8i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 8i\alpha e^{8i\,x}, \quad y_p''(x) = -64\alpha e^{8i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p'(x) - y_p(x) = -5\,e^{(8i\,x)} &\iff (16i - 65)\,\alpha = -5 \\ &\iff \alpha = \frac{-5}{16i - 65} = \frac{80}{4481}i + \frac{325}{4481}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{80}{4481}i + \frac{325}{4481}\right) e^{(8i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{325}{4481}\cos(8\,x) - \frac{80}{4481}\sin(8\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{325}{4481}\cos(8\,x) - \frac{80}{4481}\sin(8\,x) + ae^{\left(-x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 82. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+r-3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2-4\times(-3) = 13$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + r - 3 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = \alpha e^x, \quad y_p''(x) = \alpha e^x$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + y_p'(x) - 3y_p(x) = -2\,e^x &\iff -\alpha = -2 \\ &\iff \alpha = 2.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto 2\,e^x.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,e^x + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+1\right)\right)} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 83. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4\times 2 = -7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) + 2y(x) = e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r + 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) + 2y_p(x) = e^{(i\,x)} &\iff (-i+1)\,\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{-i+1} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 84. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i\sqrt{2}$ et $r_2 = i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -46 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-46\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = -46\alpha e^{-46\,x}, \quad y_p''(x) = 2116\alpha e^{-46\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p(x) = -e^{(-46\,x)} &\iff 2118\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{2118}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{2118}\,e^{(-46\,x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{2118}\,e^{(-46\,x)} + a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 85. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à ← page 8

coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation.

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -\sqrt{2}$ et $r_2 = \sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y(x) = 2\,e^{(2i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2-2 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(2i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2i\alpha e^{2i\,x}, \quad y_p''(x) = -4\alpha e^{2i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p(x) = 2\,e^{(2i\,x)} &\iff -6\alpha = 2 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{3}\,e^{(2i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{3}\sin(2\,x) + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ae^{\left(-\sqrt{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 86. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+8\,r-58 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 8^2-4\times(-58) =$

296. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-8+\sqrt{296}}{2} = \sqrt{74}-4$ et $r_2 = \dfrac{-8-\sqrt{296}}{2} = -\sqrt{74}-4$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{74}+4\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{74}-4\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 8\,r - 58 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(2\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\alpha e^{2\,x}, \quad y_p''(x) = 4\alpha e^{2\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 8y_p'(x) - 58y_p(x) = e^{(2\,x)} &\iff -38\alpha = 1\\ &\iff \alpha = -\frac{1}{38}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{38}\,e^{(2\,x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{38}\,e^{(2\,x)} + ae^{\left(-x\left(\sqrt{74}+4\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{74}-4\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 87. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2\,r - 5 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-5) = 24$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-2+\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}-1$ et $r_2 = \dfrac{-2-\sqrt{24}}{2} = -\sqrt{6}-1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{\left(-x\left(\sqrt{6}+1\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{6}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y'(x) - 5y(x) = -8\,e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 2\,r - 5 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p'(x) - 5y_p(x) = -8\,e^{(i\,x)} &\iff (2i-6)\,\alpha = -8\\ &\iff \alpha = \frac{-8}{2i-6} = \frac{2}{5}i + \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{2}{5}i + \frac{6}{5}\right) e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{6}{5}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{6}{5}\sin(x) + ae^{\left(-x\left(\sqrt{6}+1\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{6}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 88. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -4 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-4\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = -4\alpha e^{-4\,x}, \quad y_p''(x) = 16\alpha e^{-4\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) - y_p(x) = e^{(-4\,x)} &\iff 19\alpha = 1\\ &\iff \alpha = \frac{1}{19}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{19}\, e^{(-4\,x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \frac{1}{19}\, e^{(-4\,x)} + b e^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + a e^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 89. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r + 4 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 = -15$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) + 4y(x) = 4\, e^{(i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - r + 4 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) + 4y_p(x) = 4\, e^{(i\,x)} &\iff (-i+3)\,\alpha = 4 \\ &\iff \alpha = \frac{4}{-i+3} = \frac{2}{5}i + \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{2}{5}i + \frac{6}{5}\right) e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto \frac{6}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{6}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x) + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 90. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 8

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2-r-11=0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2-4\times(-11) = 45$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{45}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{45}}{2} = -\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{\left(\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) - 11y(x) = e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2-r-11=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p'(x) - 11y_p(x) = e^{(i\,x)} &\iff (-i-12)\,\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{-i-12} = \frac{1}{145}i - \frac{12}{145}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto \left(\frac{1}{145}i - \frac{12}{145}\right) e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{12}{145}\cos(x) - \frac{1}{145}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{12}{145}\cos(x) - \frac{1}{145}\sin(x) + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}+1\right)\right)} + ae^{\left(-\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{5}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 91. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2+9\,r+1=0$. Son discriminant est : $\Delta = 9^2-4\times 1 = 77$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-9+\sqrt{77}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-9-\sqrt{77}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a e^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{77}+9\right)\right)} + b e^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{77}-9\right)\right)},\ \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 9y'(x) + y(x) = 3\,e^{(i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+9\,r+1=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x\mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x},\quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y_p''(x)+9y_p'(x)+y_p(x) = 3\,e^{(i\,x)} &\iff 9i\alpha = 3\\ &\iff \alpha = -\frac{1}{3}i.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x\mapsto -\frac{1}{3}i\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x\mapsto \frac{1}{3}\sin(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}\\ x & \mapsto \quad \frac{1}{3}\sin(x) + a e^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{77}+9\right)\right)} + b e^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{77}-9\right)\right)}\end{cases} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 92. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 2r - 51 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-51) = 208$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{2+\sqrt{208}}{2} = 2\sqrt{13}+1$ et $r_2 = \dfrac{2-\sqrt{208}}{2} = -2\sqrt{13}+1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto b e^{\left(x\left(2\sqrt{13}+1\right)\right)} + a e^{\left(-x\left(2\sqrt{13}-1\right)\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 2r - 51 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = -\alpha e^{-x}, \quad y_p''(x) = \alpha e^{-x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - 2y_p'(x) - 51 y_p(x) = e^{(-x)} &\iff -48\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{48}\, e^{(-x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{48}\, e^{(-x)} + b e^{\left(x\left(2\sqrt{13}+1\right)\right)} + a e^{\left(-x\left(2\sqrt{13}-1\right)\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 93. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i\sqrt{2}$ et $r_2 = i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y(x) = -2\, e^{(i\,x)} \qquad (E')$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2+2=0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p(x) = -2\,e^{(i\,x)} &\iff \alpha = -2 \\ &\iff \alpha = -2. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -2\,e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -2\,\cos(x)\,.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\,\cos(x) + a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 94. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 9 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -3$ et $r_2 = 3$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{(3\,x)} + ae^{(-3\,x)},\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto -\frac{2}{9}$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{2}{9} + be^{(3\,x)} + ae^{(-3\,x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 95. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à ← page 9

coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation.

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 66 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i\sqrt{66}$ et $r_2 = i\sqrt{66}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos\left(\sqrt{66}x\right) + b\sin\left(\sqrt{66}x\right), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 66 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = -\alpha e^{-x}, \quad y_p''(x) = \alpha e^{-x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 66y_p(x) = -e^{(-x)} &\iff 67\alpha = -1 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{67}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{67}\,e^{(-x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad -\frac{1}{67}\,e^{(-x)} + a\cos\left(\sqrt{66}x\right) + b\sin\left(\sqrt{66}x\right) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 96. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4\times 2 = -7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous voyons d'emblée que la fonction constante $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}$ vérifie (E), donc nous la choisissons comme solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2} + \left(a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 97. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction polynomiale dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = -i\sqrt{2}$ et $r_2 = i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 2\,\alpha x + \beta, \quad y_p''(x) = 2\,\alpha$$

et donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p(x) = 4\,x^2 - 1 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\alpha + 2\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 4\,x^2 - 1. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 2\alpha & & & = & 4 \\ & 2\beta & & = & 0 \\ 2\alpha & & +\ 2\gamma & = & -1 \end{cases}$$

Le système étant déjà échelonné, la résolution est directe, et on en déduit que $y_p : x \mapsto 2\,x^2 - \frac{5}{2}$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,x^2 - \frac{5}{2} + a\cos\left(\sqrt{2}x\right) + b\sin\left(\sqrt{2}x\right) \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 98. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions réelles $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto ae^{(-x)} + be^{x}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y(x) = 2\, e^{(i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie réelle. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = i\alpha e^{i\,x}, \quad y_p''(x) = -\alpha e^{i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) - y_p(x) = 2\, e^{(i\,x)} &\iff -2\alpha = 2 \\ &\iff \alpha = -1. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -e^{(i\,x)}.$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\cos(x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\cos(x) + ae^{(-x)} + be^{x} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 99. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction trigonométrique dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 24\,r + 23 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 24^2 - 4 \times 23 = 484$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-24 + \sqrt{484}}{2} = -1$ et $r_2 = \dfrac{-24 - \sqrt{484}}{2} = -23$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{(-x)} + ae^{(-23\,x)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Pour trouver une solution particulière de (E), nous allons chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 24y'(x) + 23y(x) = e^{(8i\,x)} \tag{E'}$$

puis prendre sa partie imaginaire. Comme $8i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 24\,r + 23 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(8i\,x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Injectons cette expression de y_p dans (E'), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = 8i\alpha e^{8i\,x}, \quad y_p''(x) = -64\alpha e^{8i\,x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 24y_p'(x) + 23y_p(x) = e^{(8i\,x)} &\iff (192i - 41)\,\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{192i - 41} = -\frac{192}{38545}i - \frac{41}{38545}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc :

$$y_p : x \mapsto -\left(\frac{192}{38545}i + \frac{41}{38545}\right) e^{(8i\,x)}.$$

En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (E) :

$$y_p : x \mapsto -\frac{192}{38545}\cos(8\,x) - \frac{41}{38545}\sin(8\,x).$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{192}{38545}\cos(8\,x) - \frac{41}{38545}\sin(8\,x) + be^{(-x)} + ae^{(-23\,x)} \end{cases} \ \middle|\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corrigé 100. Nous avons à étudier une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec une fonction exponentielle dans le second membre. Nous savons résoudre une telle équation. ← page 9

Résolution de l'équation homogène. Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet pour équation caractéristique : $r^2 + 4\,r - 12 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-12) = 64$. Il est strictement positif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont réelles, égales à $r_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{64}}{2} = 2$ et $r_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{64}}{2} = -6$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les applications de la forme :

$$y_h : x \mapsto be^{(2\,x)} + ae^{(-6\,x)}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 4\,r - 12 = 0$ (nous avons en effet déterminé ses solutions ci-dessus), nous savons qu'il est possible de trouver une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto e^{(-x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Injectons cette expression de y_p dans (E), pour voir à quelle condition elle en est une solution. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = -\alpha e^{-x}, \quad y_p''(x) = \alpha e^{-x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 4y_p'(x) - 12y_p(x) = e^{(-x)} &\iff -15\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{15}\, e^{(-x)}.$$

Conclusion. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent comme somme d'une solution y_h de l'équation homogène et de la solution particulière y_p. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{15}\, e^{(-x)} + be^{(2\,x)} + ae^{(-6\,x)} \end{cases} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$