Solutions développables en série entière d'une équation différentielle (non guidé)

Un exercice incontournable : chercher les solutions d'une équation différentielle qui sont développables en série entière en 0. J'en parle très longuement dans le document *Méthodes* associé (section 2.3).

Commentaire sur la programmation du corrigé. Lorsque la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est d'ordre 2, j'ai un certain nombre de soucis de programmation que je ne parviens pas à résoudre. Par exemple, si $a_0 = 0$, mon programme refuse de remarquer que $a_{2n} = 0$ par récurrence immédiate (et il fait comme si a_{2n} était non nul dans la présentation des solutions), quand bien même j'ai une boucle supposée le faire. Je n'ai pas eu le courage de trouver comment corriger ce problème et d'autres du même acabit. Lisez avec prudence la résolution dans ces cas-là.

Commentaire sur l'explicitation des coefficients. Pour déterminer une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, j'ai opté pour une rédaction optimale du point de vue de la programmation, mais qui n'est pas la plus naturelle pour l'être humain (notamment, ce corrigé ne remarque pas quand des termes du numérateur et du dénominateur se télescopent, ou bien il conserve des facteurs 2 constants dans le produit pour des raisons bizarres). Pour comprendre comment en arriver à la forme explicite de la suite, vous lirez de précieux conseils dans le document *Méthodes*, *Relations de récurrence dépendant de n (explicitation)*. Le plus visuel reste de réitérer la relation de récurrence, pour parvenir de a_n à a_0, en écrivant informellement le produit (avec des points de suspension), et en observant les simplifications qui apparaissent (ou les produits remarquables : factorielles, produits des entiers pairs ou impairs...). Je vous recommande très chaudement de trouver une façon de raisonner et rédiger qui vous convient, au lieu de mécaniquement imiter cette correction automatisée.

Commentaire sur le calcul du rayon de convergence. Il peut arriver que vous tombiez sur une série entière usuelle. Auquel cas, il est inutile de recalculer son rayon de convergence. Je le fais systématiquement parce que je n'ai pas « appris » à mon programme à reconnaître les séries entières usuelles.

Exercice 1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 11

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(6x^3 + x\right) y'(x) + \left(-4x^2 + 1\right) y(x) = 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 2. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 13

$$\forall x \in I, \quad \left(-4x^2 - 2x\right) y''(x) - (20x + 1)\, y'(x) - 16y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 3. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 15

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^3 - 2x^2\right) y''(x) + \left(13x^2 - 6x\right) y'(x) + (12x - 2)\, y(x) = 4, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 4. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 16

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) + \left(24x^3 - 4x\right) y'(x) - 2y(x) = 12x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 5. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 18

$$\forall x \in I, \quad \left(7x^4 + 4x^2\right) y''(x) + \left(35x^3 + 4x\right) y'(x) + 21x^2 y(x) = -8x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 6. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 21

$$\forall x \in I, \quad \left(3x^2 - x\right) y''(x) + (27x - 3)\, y'(x) + 48y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 7. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 22

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(-12x^3 + x\right) y'(x) - \left(8x^2 + 1\right) y(x) = -2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 8. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 24

$$\forall x \in I, \quad -8x^2 y''(x) - 24xy'(x) - \left(492x^2 + 8\right) y(x) = -32x - 16, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 9. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 26

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 - 10x^2\right) y''(x) + \left(5x^3 - 20x\right) y'(x) = 40x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 10. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 28

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(4x^2 + 7x\right) y'(x) + (8x + 9)\, y(x) = -18, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 11. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 30

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^2 - 4x\right) y''(x) - (4x + 12)\, y'(x) - 2y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 12. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 32

$$\forall x \in I, \quad 2xy''(x) + (16x + 1)\, y'(x) + 8y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 13. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 33

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - \left(12x^2 + 7x\right) y'(x) - (24x + 9)\, y(x) = 18, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 14. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 35

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 - 4x^2\right) y''(x) + \left(4x^3 - 4x\right) y'(x) + 2x^2 y(x) = -8x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 15. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 37

$$\forall x \in I, \quad -3x^2 y''(x) + \left(28x^3 - 3x\right) y'(x) + \left(112x^2 + 3\right) y(x) = 6, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 16. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 39

$$\forall x \in I, \quad -2x^2 y''(x) - \left(4x^3 + 6x\right) y'(x) - 4x^2 y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 17. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 41

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 19x^2\right) y''(x) - \left(5x^3 + 19x\right) y'(x) + \left(-4x^2 + 19\right) y(x) = -19, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 18. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 43

$$\forall x \in I, \quad 48xy''(x) + (x+48)\, y'(x) + 2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 19. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 45

$$\forall x \in I, \quad \left(-26x^2 + 7x\right) y''(x) + (-91x+7)\, y'(x) - 26y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 20. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 47

$$\forall x \in I, \quad \left(x^3 - 2x^2\right) y''(x) + \left(8x^2 - 5x\right) y'(x) + (12x+2)\, y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 21. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 49

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^3 - 2x^2\right) y''(x) - \left(6x^2 + 5x\right) y'(x) - (2x+1)\, y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 22. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 51

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - \left(12x^2 + 6x\right) y'(x) - (6x+6)\, y(x) = 6, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 23. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 52

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 5x^2\right) y''(x) - \left(5x^3 + 15x\right) y'(x) - 4x^2 y(x) = 15x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 24. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 55

$$\forall x \in I, \quad \left(3x^3 + 4x^2\right) y''(x) + \left(18x^2 + 10x\right) y'(x) + (18x+2)\, y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 25. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 56

$$\forall x \in I, \quad -2x^2 y''(x) + \left(x^3 - 4x\right) y'(x) + 2x^2 y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 26. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 58

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^2 + 4x\right) y''(x) + (11x+2)\, y'(x) + 9y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 27. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 60

$$\forall x \in I, \quad -52x^2 y''(x) + \left(18x^2 - 208x\right) y'(x) + (27x-104)\, y(x) = 208, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 28. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 62

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^4 + 7x^2\right) y''(x) + \left(-10x^3 + 28x\right) y'(x) + \left(-8x^2 + 14\right) y(x) = -42x + 28, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 29. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 64

$$\forall x \in I, \quad \left(x^2 - 10x\right) y''(x) + (3x - 20)\, y'(x) + y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 30. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 66

$$\forall x \in I, \quad -6x^2 y''(x) + \left(122x^2 - 9x\right) y'(x) + (244x + 3)\, y(x) = 6, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 31. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 68

$$\forall x \in I, \quad 3x^2 y''(x) + \left(6x^3 + 9x\right) y'(x) + 6x^2 y(x) = -9x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 32. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 70

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(-5x^2 + 3x\right) y'(x) - (4x + 1)\, y(x) = 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 33. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 72

$$\forall x \in I, \quad \left(-18x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(-99x^2 + 5x\right) y'(x) - (36x + 2)\, y(x) = 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 34. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 73

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + 5xy'(x) + \left(-96x^2 + 4\right) y(x) = -18x + 4, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 35. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 75

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(6x^3 + 3x\right) y'(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 36. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 77

$$\forall x \in I, \quad 4x^2 y''(x) + \left(-8x^2 + 8x\right) y'(x) + (-12x + 1)\, y(x) = -1, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 37. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 79

$$\forall x \in I, \quad 92x^2 y''(x) - 20x^3 y'(x) - 60x^2 y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 38. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 81

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 - 14x^2\right) y''(x) + \left(5x^3 - 28x\right) y'(x) + \left(4x^2 + 28\right) y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 39. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 83

$$\forall x \in I, \quad 95x^2 y''(x) + \left(-4x^2 + 380x\right) y'(x) + (-16x + 190)\, y(x) = 380, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 40. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 85

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^3 - 4x^2\right) y''(x) + \left(13x^2 - 18x\right) y'(x) + (12x - 6)\, y(x) = -12, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 41. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 86

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(3x^3 + 3x\right) y'(x) + \left(12x^2 + 1\right) y(x) = -4x - 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 42. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 88

$$\forall x \in I, \quad -8x^2 y''(x) + \left(4x^3 - 24x\right) y'(x) + 12x^2 y(x) = -48x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 43. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 90

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 11x^2\right) y''(x) - \left(6x^3 + 55x\right) y'(x) - \left(6x^2 + 44\right) y(x) = -99x + 44, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 44. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 93

$$\forall x \in I, \quad \left(15x^4 + 7x^2\right) y''(x) + \left(75x^3 + 7x\right) y'(x) - 7y(x) = -14, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 45. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 95

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(4x^3 + 2x\right) y'(x) + \left(-2x^2 + 2\right) y(x) = 4, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 46. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 97

$$\forall x \in I, \quad -xy''(x) + (3x - 3)\, y'(x) + 3y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 47. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 98

$$\forall x \in I, \quad -7x^2 y''(x) + x^3 y'(x) + 4x^2 y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 48. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 101

$$\forall x \in I, \quad -28x^2 y''(x) + \left(3x^3 - 84x\right) y'(x) + 3x^2 y(x) = 168x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 49. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 103

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(5x^3 + 5x\right) y'(x) - \left(4x^2 + 4\right) y(x) = 8, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 50. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 105

$$\forall x \in I, \quad \left(x^2 - x\right) y''(x) + (5x - 1)\, y'(x) + 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 51. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 106

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - \left(3x^3 + x\right) y'(x) = x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 52. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 108

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(-3x^3 + 4x\right) y'(x) + \left(-9x^2 + 2\right) y(x) = -12x - 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 53. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 110

$$\forall x \in I, \quad \left(5x^3 - 2x^2\right) y''(x) + \left(40x^2 - 5x\right) y'(x) + (60x + 2)\, y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 54. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 112

$$\forall x \in I, \quad 2x^2 y''(x) + \left(2x^2 + 5x\right) y'(x) + (x + 1)\, y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 55. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 114

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^2 - 6x\right) y''(x) - (7x + 9)\, y'(x) - 2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 56. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 116

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(3x^3 + x\right) y'(x) + \left(9x^2 - 1\right) y(x) = -1, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 57. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 118

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(-30x^2 + 4x\right) y'(x) + (-30x + 2)\, y(x) = 4, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 58. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 119

$$\forall x \in I, \quad \left(9x^4 - 11x^2\right) y''(x) + \left(45x^3 - 11x\right) y'(x) + \left(27x^2 + 11\right) y(x) = -22, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 59. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 120

$$\forall x \in I, \quad -4x^2 y''(x) + \left(4x^3 - 16x\right) y'(x) + \left(4x^2 - 8\right) y(x) = 24x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 60. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 122

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - \left(12x^3 + x\right) y'(x) - 12x^2 y(x) = 2x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 61. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 124

$$\forall x \in I, \quad -x^2y''(x) + x^2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 62. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 126

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^2 - x\right) y''(x) + (8x - 1)\, y'(x) + 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 63. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 128

$$\forall x \in I, \quad 4x^2y''(x) + \left(-6x^2 + 8x\right) y'(x) + (-9x + 1)\, y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 64. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 130

$$\forall x \in I, \quad \left(-22x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(176x^3 + x\right) y'(x) + \left(-264x^2 + 1\right) y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 65. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 132

$$\forall x \in I, \quad xy''(x) + (3x + 2)\, y'(x) + 3y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 66. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 134

$$\forall x \in I, \quad -xy''(x) + (x - 4)\, y'(x) + 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 67. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 135

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(8x^3 + 3x\right) y'(x) - \left(4x^2 + 1\right) y(x) = 4x + 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 68. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 137

$$\forall x \in I, \quad \left(4x^2 + 5x\right) y''(x) + (12x + 15)\, y'(x) + 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 69. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 139

$$\forall x \in I, \quad \left(4x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(14x^2 + 5x\right) y'(x) + (4x + 1)\, y(x) = 1, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 70. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 141

$$\forall x \in I, \quad -8x^2y''(x) - \left(x^3 + 16x\right) y'(x) + \left(-3x^2 + 16\right) y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 71. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 143

$$\forall x \in I, \quad -2x^2y''(x) + \left(4x^3 - 2x\right)y'(x) + \left(16x^2 + 2\right)y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 72. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 145

$$\forall x \in I, \quad \left(9x^4 - 93x^2\right)y''(x) + \left(54x^3 - 465x\right)y'(x) + \left(54x^2 - 372\right)y(x) = 837x + 744, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 73. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 147

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 + 3x^2\right)y''(x) + \left(-6x^3 + 9x\right)y'(x) - 4x^2y(x) = -9x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 74. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 149

$$\forall x \in I, \quad -xy''(x) + (16x - 3)\,y'(x) + 32y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 75. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 151

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^2 - 7x\right)y''(x) + (8x - 28)\,y'(x) + 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 76. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 153

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 + x^2\right)y''(x) + \left(-5x^3 + 4x\right)y'(x) + \left(-4x^2 + 2\right)y(x) = -6x + 4, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 77. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 155

$$\forall x \in I, \quad x^2y''(x) + \left(-9x^3 + 2x\right)y'(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 78. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 157

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^2 + x\right)y''(x) + (-8x + 1)\,y'(x) - 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 79. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 158

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^3 - 2x^2\right)y''(x) - \left(6x^2 + 5x\right)y'(x) - (6x + 1)\,y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 80. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 160

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 2x^2\right)y''(x) - \left(6x^3 + 4x\right)y'(x) - 4x^2y(x) = -8x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 81. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 162

$$\forall x \in I, \quad -3x^2y''(x) - \left(27x^3 + 6x\right)y'(x) + \left(-81x^2 + 6\right)y(x) = -6, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 82. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 164

$$\forall x \in I, \quad \left(x^3 + 10x^2\right) y''(x) + \left(5x^2 + 25x\right) y'(x) + (3x - 10)\, y(x) = 10, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 83. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 166

$$\forall x \in I, \quad \left(10x^4 + 2x^2\right) y''(x) + \left(90x^3 - 2x\right) y'(x) + \left(160x^2 + 2\right) y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 84. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 168

$$\forall x \in I, \quad \left(x^2 - x\right) y''(x) + (6x - 1)\, y'(x) + 6y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 85. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 170

$$\forall x \in I, \quad -60x^2 y''(x) - 60xy'(x) + (4x + 15)\, y(x) = 30, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 86. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 172

$$\forall x \in I, \quad -82x^2 y''(x) - \left(3x^2 + 205x\right) y'(x) + (-3x + 82)\, y(x) = 82, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 87. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 173

$$\forall x \in I, \quad \left(4x^2 - 2x\right) y''(x) + (28x - 1)\, y'(x) + 32y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 88. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 175

$$\forall x \in I, \quad \left(4x^2 - 2x\right) y''(x) + (14x - 3)\, y'(x) + 4y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 89. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 177

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^3 - 2x^2\right) y''(x) + \left(6x^2 - 5x\right) y'(x) + (2x - 1)\, y(x) = 1, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 90. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 179

$$\forall x \in I, \quad 8xy''(x) + (2x + 4)\, y'(x) + y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 91. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 180

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 + 2x^2\right) y''(x) + \left(-3x^3 + 4x\right) y'(x) - 4y(x) = -8, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 92. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 182

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^3 - 2x^2\right) y''(x) - \left(7x^2 + 5x\right) y'(x) + (-3x + 2)\, y(x) = 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 93. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 184

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 2x^2\right) y''(x) + \left(-6x^3 + 2x\right) y'(x) - \left(6x^2 + 2\right) y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 94. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 186

$$\forall x \in I, \quad -5x^2 y''(x) + \left(32x^3 - 25x\right) y'(x) + \left(96x^2 - 20\right) y(x) = 45x - 20, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 95. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 189

$$\forall x \in I, \quad 14x^2 y''(x) - \left(4x^3 + 14x\right) y'(x) + \left(-8x^2 + 14\right) y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 96. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 190

$$\forall x \in I, \quad \left(-4x^3 - 760x^2\right) y''(x) - \left(12x^2 + 2660x\right) y'(x) - (3x + 760)\, y(x) = 1520, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 97. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 192

$$\forall x \in I, \quad \left(-11x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(-77x^3 + 3x\right) y'(x) - 99x^2 y(x) = 6x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 98. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 195

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^3 - 2x^2\right) y''(x) - \left(8x^2 + 3x\right) y'(x) + (-4x + 1)\, y(x) = -1, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 99. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 196

$$\forall x \in I, \quad \left(x^2 - x\right) y''(x) + (5x - 2)\, y'(x) + 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Exercice 100. Déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 198

$$\forall x \in I, \quad 3x^2 y''(x) + \left(-6x^3 + 6x\right) y'(x) - 18x^2 y(x) = 6x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

Corrigé 1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 1
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4-x^2\right)S''(x)-\left(6x^3+x\right)S'(x)+\left(-4x^2+1\right)S(x)\\
&=\left(-x^4-x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-\left(6x^3+x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+\left(-4x^2+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-6x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-4x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+2}-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-6\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2}-\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-6\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-6\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}-4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-(n-2)(n-3)-6\,n+8\right)a_{n-2}+\left(-(n-1)n-n+1\right)a_n\right)x^n+\left(a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad \left(-(n-2)(n-3)-6\,n+8\right)a_{n-2}+\left(-(n-1)n-n+1\right)a_n &= 0,\\ a_0 &= 2,\end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3)-6\,n+8=-(n+2)(n-1)$ et $-(n-1)n-n+1=-(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=-\frac{n+4}{n+3}a_n,\qquad \text{et : }\quad a_0=2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=-\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3},\qquad \text{donc : }\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=(-1)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}$$

$$= 2^n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = (-1)^n\,a_1 \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}$$
$$= \frac{1}{2^n}\frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}$$
$$= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{2\,n+2}\,(-1)^n\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-2\,n-2}\,(-1)^n\,a_1\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+4)|z|^2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question,

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1}\,(-1)^n\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}x^{2n} + \frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-2\,n-2}\,(-1)^n\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 1
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-4x^2-2x\right)S''(x) - (20x+1)\,S'(x) - 16S(x)\\
&= \left(-4x^2-2x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (20x+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 20x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 20\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 20\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 20\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-4\,(n-1)n - 20\,n - 16\right)a_n + \left(-2\,(n+1)n - n - 1\right)a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left(-4\,(n-1)n - 20\,n - 16\right)a_n + \left(-2\,(n+1)n - n - 1\right)a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $-4\,(n-1)n-20\,n-16 = -4\,(n+2)^2$ et $-2\,(n+1)n-n-1 = -(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1} = -\frac{4\,(n+2)^2}{(2\,n+1)(n+1)}a_n. \qquad (*)$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{4\,(k+2)^2}{(2\,k+1)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+2)^2}{(2\,k+1)(k+1)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+2)^2}{(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-4)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{(2\,k+1)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{(2\,k+1)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+2)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= (n+1)\, \frac{\prod_{k=0}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^n\,(n+1)!^2}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n\,(-4)^n\,a_0\,(n+1)!^2}{(2\,n)!}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{4\,(n+2)^2 |z|}{(2\,n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-4)^n\,(n+1)!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 3. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 1
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^3-2x^2\right) S''(x) + \left(13x^2-6x\right) S'(x) + (12x-2)\, S(x)\\
&= \left(2x^3-2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(13x^2-6x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (12x-2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 13x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 13\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 13\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 12\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 13\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 12\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(2\,(n-1)(n-2)+13\,n-1\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n-6\,n-2\right) a_n\right) x^n + \left(-2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(2\,(n-1)(n-2)+13\,n-1\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n-6\,n-2\right) a_n &= 0,\\ -2\,a_0 &= 4, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)(n-2)+13\,n-1 = (2\,n+1)(n+3)$ et $-2\,(n-1)n-6\,n-2 = -2\,(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(2\,n+3)(n+4)}{2\,(n+2)^2} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2\,k+3)(k+4)}{2\,(k+2)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+4)}{2\,(k+2)^2}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+4)}{2\,(k+2)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+4)}{(k+2)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+4)}{(k+2)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)} \\ &= \frac{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)} \\ &= \left(\frac{1}{6}(n+3)^2(n+2)^2\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)} \\ &= \frac{2^{-n-2}(n+3)(n+2)\,(2\,n+2)!}{3\,(n+1)^2(n-1)^2(n-2)^2n^2\,(n-3)!^2}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^{-2\,n-1}(n+3)(n+2)\,(2\,n+2)!}{3\,(n+1)^2(n-1)^2(n-2)^2n^2\,(n-3)!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+3)(n+4)|z|}{2\,(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-1}(n+3)(n+2)\,(2\,n+2)!}{(n+1)^2(n-1)^2(n-2)^2n^2\,(n-3)!^2}x^n.$$

Corrigé 4. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 1

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-x^2S''(x)+\left(24x^3-4x\right)S'(x)-2S(x)\\
&=-x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(24x^3-4x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+24x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-4x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+24\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2}-4\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+24\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}-4\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+24\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}-4\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}-2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left((24\,n-48)\,a_{n-2}+(-(n-1)n-4\,n-2)\,a_n\right)x^n+(-6\,a_1x-2\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (24\,n-48)\,a_{n-2}+(-(n-1)n-4\,n-2)\,a_n &=& 0,\\
-2\,a_0 &=& 0,\\
-6\,a_1 &=& 12,
\end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-1)n-4\,n-2=-(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2}=\frac{24\,n}{(n+4)(n+3)}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0=0, \quad a_1=-2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2=0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n}=0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)}=a_{2n+2}=\bigstar\cdot a_{2n}=0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $a_0=0\neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=\frac{12\,(2\,k+1)}{(2\,k+5)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=\frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{12\,(2\,k+1)}{(2\,k+5)(k+2)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1}=a_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{12\,(2\,k+1)}{(2\,k+5)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 24, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n+1}=24^na_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+5)(k+2)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+5)(k+2)}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{3}{(2\,n+3)(2\,n+1)} \right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{3}{2^n (2\,n+3)(2\,n+1)\,(n+1)!}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 0, \quad a_{2n+1} = -\frac{3 \cdot 24^n 2^{-n+1}}{(2\,n+3)(2\,n+1)\,(n+1)!}. \tag{†}
$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = 0$). On étudie à présent $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$
\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{24\,n |z|^2}{(n+4)(n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{24\,|z|^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$
x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24^n}{2^n (2\,n+3)(2\,n+1)\,(n+1)!} x^{2n+1}.
$$

Corrigé 5. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 1 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$
\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.
$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$
\left(7x^4 + 4x^2\right) S''(x) + \left(35x^3 + 4x\right) S'(x) + 21x^2 S(x)
$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= \left(7x^4+4x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(35x^3+4x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 21x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 7x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 35x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 21x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 7\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 35\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 21\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},$$

$$= 7\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 35\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 21\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},$$

$$= 7\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 35\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 21\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(7\,(n-2)(n-3)+35\,n-49\right)a_{n-2} + 4\,(n-1)n + 4\,n a_n\right)x^n + \left(4\,a_1 x\right).$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(7\,(n-2)(n-3)+35\,n-49\right)a_{n-2} + 4\,(n-1)n+4\,na_n &= 0,\\ 4\,a_1 &= -8, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $7\,(n-2)(n-3)+35\,n-49 = 7\,(n+1)(n-1)$ et $4\,(n-1)n+4\,n = 4\,n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2} = -\frac{7\,(n+3)(n+1)}{4\,(n+2)^2}a_n, \qquad \text{et :}\quad a_1 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{7\,(2\,k+3)(2\,k+1)}{16\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{7\,(2\,k+3)(2\,k+1)}{16\,(k+1)^2}, \qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{7\,(2\,k+3)(2\,k+1)}{16\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{7}{4}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{7}{4}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}\\ &= \frac{1}{2^{2\,n}}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}\\ &= \frac{2^{-4\,n-2}\,(2\,n+2)!^2}{(2\,n+1)(n+1)^2 n!^4}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=-\frac{2\,(-7)^n}{4^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}\\&=2^{2\,n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}\\&=\frac{2^{4\,n+2}\,(n+1)!^4}{(n+1)\,(2\,n+2)!^2}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=\frac{2^{-4\,n-2}\,(-7)^n\,a_0\,(2\,n+2)!^2}{4^n(2\,n+1)(n+1)^2n!^4},\quad a_{2n+1}=-\frac{2^{4\,n+3}\,(-7)^n\,(n+1)!^4}{4^n(n+1)\,(2\,n+2)!^2}.\qquad(\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_nz^{2n}}\right|=\left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right|=\frac{7\,(n+3)(n+1)|z|^2}{4\,(n+2)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{7}{4}\,|z|^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{7}{4}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z|<2\sqrt{\frac{1}{7}}$, alors $\frac{7}{4}|z|^2<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z|>2\sqrt{\frac{1}{7}}$, alors $\frac{7}{4}|z|^2>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{7}}$ et $R\leqslant 2\sqrt{\frac{1}{7}}$, c'est-à-dire : $R=2\sqrt{\frac{1}{7}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-2\sqrt{\frac{1}{7}},2\sqrt{\frac{1}{7}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $2\sqrt{\frac{1}{7}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-4\,n-2}\,(-7)^n\,(2\,n+2)!^2}{4^n(2\,n+1)(n+1)^2n!^4}x^{2n}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{4\,n+2}\,(-7)^n\,(n+1)!^4}{4^n(n+1)\,(2\,n+2)!^2}x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n=\sum_{n\text{ pair}}+\sum_{n\text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 6. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 1
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(3x^2 - x\right) S''(x) + (27x-3)\, S'(x) + 48 S(x)\\
&= \left(3x^2 - x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (27x-3) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 48 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 27x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 48 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 27 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 48 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n} + 27 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 48 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n} + 27 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 48 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((3\,(n-1)n + 27\,n + 48)\, a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\, a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (3\,(n-1)n + 27\,n + 48)\, a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $3\,(n-1)n + 27\,n + 48 = 3\,(n+4)^2$ et $-(n+1)n - 3\,n - 3 = -(n+3)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{3\,(n+4)^2}{(n+3)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3\,(k+4)^2}{(k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(k+4)^2}{(k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(k+4)^2}{(k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+4)^2}{(k+3)(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+4)^2}{(k+3)(k+1)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+4)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}$$

$$= \frac{\prod_{k=3}^{n+2} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (k+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{18}\,(n+3)^2(n+2)(n+1)\right)$$
$$= \frac{1}{18}\,(n+3)^2(n+2)(n+1)$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-2} a_0 (n+3)^2 (n+2)(n+1). \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,(n+4)^2 |z|}{(n+3)(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} 3\,|z| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{3}$, alors $3|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{3}$, alors $3|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{3}$ et $R \leqslant \frac{1}{3}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{18}\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (n+3)^2 (n+2)(n+1) x^n.$$

Corrigé 7. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 1
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^4 + x^2\right) S''(x) + \left(-12x^3 + x\right) S'(x) - \left(8x^2 + 1\right) S(x)\\
&= \left(-2x^4 + x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-12x^3 + x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(8x^2 + 1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 12x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 8x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 12 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$= -2\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 12\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-2\,(n-2)(n-3) - 12\,n + 16\right)a_{n-2} + \left((n-1)n + n - 1\right)a_n\right)x^n + (-a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-2\,(n-2)(n-3) - 12\,n + 16\right)a_{n-2} + \left((n-1)n + n - 1\right)a_n & = & 0, \\ -a_0 & = & -2, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-2)(n-3) - 12\,n + 16 = -2\,(n+2)(n-1)$ et $(n-1)n + n - 1 = (n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2\,(n+4)}{n+3}a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{4\,(k+2)}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{4\,(k+2)}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{4\,(k+2)}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 2^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{2\,(k+2)}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} = 2^n\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)} = \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = 2^n a_1\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}$$
$$= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{3\,n+2}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-n-2}a_1\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,(n+4)|z|^2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors $2|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors $2|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3\,n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!} x^{2n} + \frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n-2}\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 8. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned} &-8x^2 S''(x) - 24xS'(x) - \left(492x^2+8\right) S(x) \\ &= -8x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 24x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(492x^2+8\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -8x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 24x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 492x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - 8\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -8\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 24\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 492\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -8\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 24\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 492\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -8\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 24\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} - 492\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-492a_{n-2} + \left(-8\,(n-1)n - 24\,n - 8\right)a_n\right)x^n + \left(-32\,a_1x - 8\,a_0\right).
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad -492a_{n-2} + \left(-8\,(n-1)n - 24\,n - 8\right)a_n & = & 0,\\
-8\,a_0 & = & -16,\\
-32\,a_1 & = & -32,
\end{array}\right.
$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-492 = -492$ et $-8\,(n-1)n - 24\,n - 8 = -8\,(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+2} = -\frac{123}{2\,(n+3)^2}a_n,\qquad \text{et :}\quad a_0 = 2,\quad a_1 = 1. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$
\forall k \in \mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{123}{2\,(2\,k+3)^2}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{123}{2\,(2\,k+3)^2},\qquad \text{donc :}\quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{123}{2\,(2\,k+3)^2},
$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{123}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{123}{2}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2\,k+3)^2}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2\,k+3)^2} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}\\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}\\
&= \frac{2^{2\,n+2}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!^2}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n+2}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{(-123)^n}{2^n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)} \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)} \\ &= \frac{1}{2^{2n}(n+1)!^2} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2n} = \frac{2^{n+3}(-123)^n(n+1)!^2}{(2n+2)!^2},\quad a_{2n+1} = \frac{(-123)^n}{2^{3n}(n+1)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{123\,|z|^2}{2\,(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{123\,|z|^2}{2\,n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty,+\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+2}(-123)^n(n+1)!^2}{(2n+2)!^2}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-123)^n}{2^{3n}(n+1)!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 9. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 - 10x^2\right) S''(x) + \left(5x^3 - 20x\right) S'(x) \\
&= \left(x^4 - 10x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(5x^3 - 20x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \\
&= x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 10x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 20x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 10 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 20 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n}, \\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - 10 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 20 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n}, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - 10 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 20 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n}, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n-2)(n-3) + 5\,n - 10\right) a_{n-2} + \left(-10\,(n-1)n - 20\,n\right) a_n\right) x^n + \left(-20\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left((n-2)(n-3) + 5\,n - 10\right) a_{n-2} + \left(-10\,(n-1)n - 20\,n\right) a_n &= 0, \\ -20\,a_1 &= 40, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $(n-2)(n-3)+5\,n-10 = (n+2)(n-2)$ et $-10\,(n-1)n - 20\,n = -10\,(n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{(n+4)n}{10\,(n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = a_0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{20\,(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{20\,(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{20\,(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{10}$, et on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = \left(\frac{1}{10}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{2\,(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{2\,(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{3\,(2\,n+1)}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}$$

$$= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(2\,n+1)(n+2)\,(n+1)!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{2^{-2\,n-2}a_0\,(2\,n+4)!}{3\cdot 10^n(2\,n+1)(n+2)\,(n+1)!^2},\quad a_{2n+1} = -\frac{2^{-2\,n-1}\,(2\,n+4)!}{3\cdot 10^n(2\,n+1)(n+2)\,(n+1)!^2}.\qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = a_0$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+4)n|z|^2}{10\,(n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{10}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{10}$, alors $\frac{1}{10}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{10}$, alors $\frac{1}{10}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant\sqrt{10}$ et $R\leqslant\sqrt{10}$, c'est-à-dire : $R=\sqrt{10}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{10},\sqrt{10}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{10}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3}\,a_0 - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{10^n(2\,n+1)(n+2)\,(n+1)!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 10. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2S''(x)+\left(4x^2+7x\right)S'(x)+(8x+9)\,S(x)\\
&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(4x^2+7x\right)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+(8x+9)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+4x^2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+7x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+8x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+4\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n+1}+7\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n+8\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+4\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+7\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n+8\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+4\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+7\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n+8\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left((4\,n+4)\,a_{n-1}+((n-1)n+7\,n+9)\,a_n\right)x^n+(9\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad (4\,n+4)\,a_{n-1}+((n-1)n+7\,n+9)\,a_n &= 0,\\ 9\,a_0 &= -18,\end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $(n-1)n+7\,n+9=(n+3)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=-\frac{4\,(n+2)}{(n+4)^2}a_n,\qquad \text{et : }\ a_0=-2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=-\frac{4\,(k+2)}{(k+4)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4\,(k+2)}{(k+4)^2},\qquad \text{donc : }\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4\,(k+2)}{(k+4)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -4, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-4)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(k+4)^2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(k+4)^2}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+4)^2\right)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2}\left((k+1)^2\right)}$$
$$= \left(\frac{36}{(n+3)(n+2)}\right)\frac{1}{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)}$$
$$= \frac{36}{(n+3)(n+2)\,(n+3)!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{18\,(-4)^{n+1}}{(n+3)(n+2)\,(n+3)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,(n+2)|z|}{(n+4)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -72\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^n}{(n+3)(n+2)\,(n+3)!}x^n.$$

Corrigé 11. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^2-4x\right)S''(x) - (4x+12)\,S'(x) - 2S(x)\\
&= \left(-x^2-4x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (4x+12)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 12\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - 12\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-(n-1)n - 4\,n - 2\right) a_n + \left(-4\,(n+1)n - 12\,n - 12\right) a_{n+1}\right) x^n.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(-(n-1)n - 4\,n - 2\right) a_n + \left(-4\,(n+1)n - 12\,n - 12\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)n-4\,n-2 = -(n+2)(n+1)$ et $-4\,(n+1)n-12\,n-12 = -4\,(n+3)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n+2}{4\,(n+3)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{k+2}{4\,(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{4\,(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{4\,(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{4}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)} \\
&= \left(\frac{2}{n+2}\right) \\
&= \frac{2}{n+2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-1)^n a_0}{4^n (n+2)}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+2)|z|}{4\,(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 4$, alors $\frac{1}{4}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 4$, alors $\frac{1}{4}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 4$ et $R \leqslant 4$, c'est-à-dire : $R = 4$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-4,4[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 4, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n+2)} x^n.$$

Corrigé 12. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&2xS''(x) + (16x+1)\,S'(x) + 8S(x)\\
&= 2x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (16x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 16x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((16\,n+8)\,a_n + (2\,(n+1)n + n + 1)\,a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (16\,n+8)\,a_n + (2\,(n+1)n + n + 1)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n+1)n + n + 1 = (2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{8}{n+1} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{8}{k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8}{k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8}{k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -8, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-8)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\ &= \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-8)^n a_0}{n!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{8\,|z|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{8\,|z|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n}{n!} x^n.$$

Corrigé 13. Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}&-x^2 S''(x) - \left(12x^2 + 7x\right) S'(x) - (24x + 9)\, S(x) \\ &= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(12x^2 + 7x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (24x + 9) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 12x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 7x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 24x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 24\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 12\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 24\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 12\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 7\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 24\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-12\,n-12\right)a_{n-1} + \left(-(n-1)n - 7\,n - 9\right)a_n\right)x^n + \left(-9\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(-12\,n-12\right)a_{n-1} + \left(-(n-1)n - 7\,n - 9\right)a_n &= 0,\\ -9\,a_0 &= 18, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-1)n - 7\,n - 9 = -(n+3)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{12\,(n+2)}{(n+4)^2}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{12\,(k+2)}{(k+4)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{12\,(k+2)}{(k+4)^2}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{12\,(k+2)}{(k+4)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -12, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-12)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(k+4)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(k+4)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+4)^2\right)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2}\left((k+1)^2\right)}\\
&= \left(\frac{36}{(n+3)(n+2)}\right)\frac{1}{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)}\\
&= \frac{36}{(n+3)(n+2)\,(n+3)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{6\,(-12)^{n+1}}{(n+3)(n+2)\,(n+3)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{12\,(n+2)|z|}{(n+4)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{12\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -72 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-12)^n}{(n+3)(n+2)\,(n+3)!} x^n.$$

Corrigé 14. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 - 4x^2\right) S''(x) + \left(4x^3 - 4x\right) S'(x) + 2x^2 S(x) \\
&= \left(x^4 - 4x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(4x^3 - 4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n-2)(n-3) + 4\,n - 6\right) a_{n-2} - -4\,(n-1)n - 4\,n a_n\right) x^n + \left(-4\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left((n-2)(n-3) + 4\,n - 6\right) a_{n-2} - -4\,(n-1)n - 4\,n a_n & = \quad 0, \\ \qquad\qquad -4\,a_1 & = \quad -8, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n-2)(n-3)+4\,n-6=(n-1)n$ et $-4\,(n-1)n-4\,n=-4\,n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{4\,(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{2\,k+1}{8\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{8\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{8\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{4}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n}\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)} \\
&= \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{2}{4^n}\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\
&= 2^n\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{a_0\,(2\,n)!}{4^n 2^{2\,n} n!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{2\,n+2}(n+1)n!^2}{4^n\,(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+1)|z|^2}{4\,(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{4}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{4}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2{,}2[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)!}{4^n 2^{2\,n} n!^2} x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{4^n\,(2\,n+2)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 15. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-3x^2 S''(x) + \left(28x^3 - 3x\right) S'(x) + \left(112x^2 + 3\right) S(x)\\
&= -3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(28x^3 - 3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(112x^2 + 3\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 28x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 112x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 28 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 112 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 28 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 112 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= -3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 28\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 112\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left((28\,n+56)\,a_{n-2} + (-3\,(n-1)n - 3\,n + 3)\,a_n\right)x^n + (3\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (28\,n+56)\,a_{n-2} + (-3\,(n-1)n - 3\,n+3)\,a_n & = & 0, \\ \hfill 3\,a_0 & = & 6, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-3\,(n-1)n - 3\,n+3 = -3\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{28\,(n+4)}{3\,(n+3)(n+1)}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{56\,(k+2)}{3\,(2\,k+3)(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{56\,(k+2)}{3\,(2\,k+3)(2\,k+1)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{56\,(k+2)}{3\,(2\,k+3)(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{28}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{28}{3}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+2)}{(2\,k+3)(2\,k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+2)}{(2\,k+3)(2\,k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\ &= 2^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)} \\ &= \frac{2^{3\,n+2}(2\,n+1)\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = \frac{28^n a_1}{3^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (k+1)}$$
$$= \frac{2^{-3\,n-2}(n+1)\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^3}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{28^n 2^{3\,n+3}(2\,n+1)\,(n+1)!^3}{3^n\,(2\,n+2)!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{28^n 3^{-n-1} 2^{-3\,n-2} a_1 (n+1)\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^3}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{28\,(n+4)|z|^2}{3\,(n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{28\,|z|^2}{3\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{28^n 2^{3\,n+2}(2\,n+1)\,(n+1)!^3}{3^n\,(2\,n+2)!^2} x^{2n} + \frac{1}{3} a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{28^n 2^{-3\,n-2}(n+1)\,(2\,n+4)!}{3^n (n+2)\,(n+1)!^3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 16. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-2x^2 S''(x) - \left(4x^3 + 6x\right) S'(x) - 4x^2 S(x)\\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(4x^3 + 6x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((-4\,n+4)\,a_{n-2} + (-2\,(n-1)n - 6\,n)\,a_n\right) x^n + (-6\,a_1 x)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (-4\,n+4)\,a_{n-2} + (-2\,(n-1)n - 6\,n)\,a_n & = & 0, \\
-6\,a_1 & = & 0,
\end{array}
\right.
$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)n - 6\,n = -2\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2\,(n+1)}{(n+4)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 0. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)(k+1)}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)(k+1)},
$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-2)^n\, a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)} \\
&= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)} \\
&= \frac{(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$
\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.
$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 0\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\ &= 2^n\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\ &= \frac{3\cdot 2^{3\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=\frac{(-2)^n\,a_0\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3},\quad a_{2n+1}=0. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,(n+1)|z|^2}{(n+4)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty,+\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}x^{2n}.$$

Corrigé 17. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 2 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned} &\left(-x^4-19x^2\right)S''(x)-\left(5x^3+19x\right)S'(x)+\left(-4x^2+19\right)S(x) \\ &=\left(-x^4-19x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\left(5x^3+19x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+\left(-4x^2+19\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

[*] Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= -x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 19x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 5x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 19x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 4x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n + 19\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,$$
$$= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+2} - 19\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2} - 19\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2} + 19\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,$$
$$= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n} - 19\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 5\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n} - 19\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n} + 19\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,$$
$$= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n} - 19\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 5\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n} - 19\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n} + 19\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 6a_{n-2} + (-19\,(n-1)n - 19\,n + 19)\,a_n\right)x^n + (19\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad -(n-2)(n-3) - 5\,n + 6a_{n-2} + (-19\,(n-1)n - 19\,n + 19)\,a_n &= 0, \\ 19\,a_0 &= -19, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-2)(n-3)-5\,n+6 = -n^2$ et $-19\,(n-1)n-19\,n+19 = -19\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+2)^2}{19\,(n+3)(n+1)}a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{4\,(k+1)^2}{19\,(2\,k+3)(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+1)^2}{19\,(2\,k+3)(2\,k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+1)^2}{19\,(2\,k+3)(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{19}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{1}{19}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(2\,k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(2\,k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\ &= 2^{2\,n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)} \\ &= \frac{2^{4\,n+2}(2\,n+1)(n+1)^2 n!^4}{(2\,n+2)!^2}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=\frac{(-1)^n a_1}{19^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2k+3)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}\\&=\frac{1}{2^{2n}}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left((2k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(k+1)}\\&=\frac{2^{-4n-2}(n+1)(2n+2)!^2}{(n+1)!^4}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2n}=-\frac{2^{4n+2}(-1)^n(2n+1)(n+1)^2n!^4}{19^n(2n+2)!^2},\quad a_{2n+1}=\frac{2^{-4n-2}(-1)^n a_1(n+1)(2n+2)!^2}{19^n(n+1)!^4}.\qquad(\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right|=\left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right|=\frac{(n+2)^2|z|^2}{19(n+3)(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{19}|z|^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{19}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z|<\sqrt{19}$, alors $\frac{1}{19}|z|^2<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^{2n}$ converge absolument ;

— si $|z|>\sqrt{19}$, alors $\frac{1}{19}|z|^2>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^{2n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant\sqrt{19}$ et $R\leqslant\sqrt{19}$, c'est-à-dire : $R=\sqrt{19}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-\sqrt{19},\sqrt{19}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{19}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{4n+2}(-1)^n(2n+1)(n+1)^2n!^4}{19^n(2n+2)!^2}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-4n-2}(-1)^n(n+1)(2n+2)!^2}{19^n(n+1)!^4}x^{2n+1}.$$

Corrigé 18. Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ ← page 3

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n}=\sum_{n\text{ pair}}+\sum_{n\text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&48xS''(x) + (x+48)\,S'(x) + 2S(x)\\
&= 48x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x+48)\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 48x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 48\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 48\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n} + 48\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 48\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n} + 48\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 48\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n} + 48\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)\,a_n + (48\,(n+1)n + 48\,n + 48)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)\,a_n + (48\,(n+1)n + 48\,n + 48)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $48\,(n+1)n + 48\,n + 48 = 48\,(n+1)^2$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n+2}{48\,(n+1)^2} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{k+2}{48\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{48\,(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{48\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{48}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{48}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(k+1)^2} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \left((n+1)^2\right)\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)} \\
&= \frac{n+1}{n\,(n-1)!}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\, a_0(n+1)}{48^n n\,(n-1)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+2)|z|}{48\,(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{48\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\infty, +\infty\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n+1)}{48^n n\,(n-1)!} x^n.$$

Corrigé 19. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3 est de classe C^∞ sur $\left]-R, R\right[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$
\begin{aligned}
&\left(-26x^2 + 7x\right) S''(x) + (-91x + 7)\, S'(x) - 26S(x) \\
&= \left(-26x^2 + 7x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (-91x + 7) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 26 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -26x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 7x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 91x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 26 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -26 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 91 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 26 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -26 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n - 91 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - 26 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}
$$

$$= -26 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n - 91\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n + 7\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 26\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-26\,(n-1)n - 91\,n - 26\right)a_n + \left(7\,(n+1)n + 7\,n + 7\right)a_{n+1}\right)x^n.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(-26\,(n-1)n - 91\,n - 26\right)a_n + \left(7\,(n+1)n + 7\,n + 7\right)a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $-26\,(n-1)n - 91\,n - 26 = -13\,(2\,n+1)(n+2)$ et $7\,(n+1)n + 7\,n + 7 = 7\,(n+1)^2$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{13\,(2\,n+1)(n+2)}{7\,(n+1)^2} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{13\,(2\,k+1)(k+2)}{7\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{13\,(2\,k+1)(k+2)}{7\,(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{13\,(2\,k+1)(k+2)}{7\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{13}{7}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{13}{7}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \left((n+1)^2\right)\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)} \\
&= \frac{(n+1)\,(2\,n)!}{2^n n!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{13^n a_0 (n+1)\,(2\,n)!}{7^n 2^n n!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{13\,(2\,n+1)(n+2)|z|}{7\,(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{26}{7}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{26}{7}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \frac{7}{26}$, alors $\frac{26}{7}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > \frac{7}{26}$, alors $\frac{26}{7}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{7}{26}$ et $R \leqslant \frac{7}{26}$, c'est-à-dire : $R = \frac{7}{26}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{7}{26}, \frac{7}{26}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{7}{26}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{13^n (n+1)\,(2\,n)!}{7^n 2^n n!^2} x^n.$$

Corrigé 20. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 - 2x^2\right) S''(x) + \left(8x^2 - 5x\right) S'(x) + (12x+2)\, S(x) \\
&= \left(x^3 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(8x^2 - 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (12x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 8x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left((n-1)(n-2) + 8\,n + 4\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n + 2\right) a_n\right) x^n + \left(2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad ((n-1)(n-2)+8\,n+4)\,a_{n-1}+(-2\,(n-1)n-5\,n+2)\,a_n &=& 0,\\ 2\,a_0 &=& -2,\end{array}\right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)(n-2)+8\,n+4=(n+3)(n+2)$ et $-2\,(n-1)n-5\,n+2=-(2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=\frac{n+4}{2\,n+1}a_n,\quad \text{et : }\ a_0=-1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k+4}{2\,k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+4}{2\,k+1},\qquad \text{donc : }\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+4}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+4}{2\,k+1}&=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+4)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\&=\frac{\prod\limits_{k=3}^{n+2}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\&=\frac{2^{n-1}(n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{3\ (2\,n)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\ \prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!}=\frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=-\frac{2^{n-1}(n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{3\ (2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|=\frac{(n+4)|z|}{2\,n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\,|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2{,}2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 21. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^3 - 2x^2\right) S''(x) - \left(6x^2+5x\right) S'(x) - (2x+1)\,S(x)\\
&= \left(-2x^3 - 2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(6x^2+5x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (2x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 6\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-2\,(n-1)(n-2) - 6\,n + 4a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n - 1\right) a_n\right) x^n + (-a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad -2\,(n-1)(n-2) - 6\,n + 4a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n - 1\right) a_n = 0,\\ -a_0 = 2, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-2\,(n-1)(n-2) - 6\,n + 4 = -2\,n^2$ et $-2\,(n-1)n - 5\,n - 1 = -(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(n+1)^2}{(2\,n+3)(n+2)} a_n, \quad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{n+1} n!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^n\,(-2)^{n+2}\, n!^2}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(n+1)^2 |z|}{(2\,n+3)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} |z| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus),

alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2^n\,(-2)^{n+1}\,n!^2}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 22. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-x^2 S''(x) - \left(12x^2 + 6x\right) S'(x) - (6x+6)\,S(x)\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(12x^2+6x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (6x+6) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 12x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 12 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 12 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-12\,n+6)\,a_{n-1} + (-(n-1)n - 6\,n - 6)\,a_n\right) x^n + (-6\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (-12\,n+6)\,a_{n-1} + (-(n-1)n - 6\,n - 6)\,a_n = 0,\\ -6\,a_0 = 6, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-1)n - 6\,n - 6 = -(n+3)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{6\,(2\,n+1)}{(n+4)(n+3)} a_n, \quad \text{et : } a_0 = -1. \qquad (*)$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{6\,(2\,k+1)}{(k+4)(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{6\,(2\,k+1)}{(k+4)(k+3)}, \quad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{6\,(2\,k+1)}{(k+4)(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -6, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-6)^n\, a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+4)(k+3)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+4)(k+3)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (k+4)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1) \prod_{k=3}^{n+2} (k+1)} = \frac{3 \cdot 2^{-n+2}\,(2\,n)!}{(n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n^3\,(n-1)!^3}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{-n+1}\,(-6)^{n+1}\,(2\,n)!}{(n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n^3\,(n-1)!^3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{6\,(2\,n+1)|z|}{(n+4)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{12\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6)^n\,(2\,n)!}{2^n (n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n^3\,(n-1)!^3} x^n.$$

Corrigé 23. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3

est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - 5x^2\right) S''(x) - \left(5x^3 + 15x\right) S'(x) - 4x^2 S(x) \\
&= \left(-x^4 - 5x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(5x^3 + 15x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 5x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 15x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 15 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 15 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 15 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 6 a_{n-2} + \left(-5\,(n-1)n - 15\,n\right) a_n\right) x^n + \left(-15\, a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad -(n-2)(n-3) - 5\,n + 6 a_{n-2} + \left(-5\,(n-1)n - 15\,n\right) a_n = 0, \\ -15\, a_1 = 15, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 5\,n + 6 = -n^2$ et $-5\,(n-1)n - 15\,n = -5\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+2}{5\,(n+4)} a_n, \qquad \text{et : } \ a_1 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{k+1}{5\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+1}{5\,(k+2)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+1}{5\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{5}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} = \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = -\frac{(-1)^n}{5^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} = \left(\frac{3}{2\,n+3}\right) = \frac{3}{2\,n+3}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-1)^n\,a_0}{5^n(n+1)}, \quad a_{2n+1} = -\frac{3\,(-1)^n}{5^n(2\,n+3)}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+2)|z|^2}{5\,(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{5}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{5}$, alors $\frac{1}{5}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{5}$, alors $\frac{1}{5}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{5}$ et $R \leqslant \sqrt{5}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{5}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{5}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n+1)} x^{2n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(2\,n+3)} x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 24. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(3x^3+4x^2\right)S''(x)+\left(18x^2+10x\right)S'(x)+(18x+2)\,S(x)\\
&=\left(3x^3+4x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(18x^2+10x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+(18x+2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=3x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+4x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+18x^2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+10x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+18x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+1}+4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+18\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1}+10\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+18\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=3\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n+4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n+18\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+10\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n+18\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=3\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n+4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n+18\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+10\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n+18\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(3\,(n-1)(n-2)+18\,n\right)a_{n-1}+\left(4\,(n-1)n+10\,n+2\right)a_n\right)x^n+\left(2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad (3\,(n-1)(n-2)+18\,n)\,a_{n-1}+(4\,(n-1)n+10\,n+2)\,a_n &= 0,\\ 2\,a_0 &= -2,\end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $3\,(n-1)(n-2)+18\,n=3\,(n+2)(n+1)$ et $4\,(n-1)n+10\,n+2=2\,(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=-\frac{3\,(n+3)}{2\,(2\,n+3)}a_n,\qquad \text{et : }\quad a_0=-1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=-\frac{3\,(k+3)}{2\,(2\,k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3\,(k+3)}{2\,(2\,k+3)},\qquad \text{donc : }\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3\,(k+3)}{2\,(2\,k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{3}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{2\,k+3} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)} = \frac{2^n (n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{(-3)^n\,(n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,(n+3)|z|}{2\,(2\,n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{4}{3}$, alors $\frac{3}{4}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{4}{3}$, alors $\frac{3}{4}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{4}{3}$ et $R \leqslant \frac{4}{3}$, c'est-à-dire : $R = \frac{4}{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{4}{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-3)^n\,(n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 25. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-2x^2 S''(x) + \left(x^3 - 4x\right) S'(x) + 2x^2 S(x) \\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(x^3 - 4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 4\,n\right) a_n\right) x^n + \left(-4\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad n a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 4\,n\right) a_n &=& 0, \\ -4\,a_1 &=& 0, \end{array} \right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)n - 4\,n = -2\,(n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{1}{2\,(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 0. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{1}{2\,(2\,k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(2\,k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(2\,k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1}&=0\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}\\ &=\frac{1}{2^n}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}\\ &=\frac{1}{2^n\,(n+1)!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=\frac{2\,a_0\,(n+1)!}{(2\,n+2)!},\quad a_{2n+1}=0. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right|=\left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right|=\frac{|z|^2}{2\,(n+3)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{|z|^2}{2\,n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I=]-\infty,+\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}x^{2n}.$$

Corrigé 26. Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ ← page 3
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n=\sum_{n \text{ pair}}+\sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^2+4x\right) S''(x) + (11x+2)\, S'(x) + 9S(x)\\
&= \left(2x^2+4x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (11x+2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 11x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 11 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 11 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 11 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(2\,(n-1)n + 11\,n + 9\right) a_n + \left(4\,(n+1)n + 2\,n + 2\right) a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(2\,(n-1)n + 11\,n + 9\right) a_n + \left(4\,(n+1)n + 2\,n + 2\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)n+11\,n+9 = (2\,n+3)(n+3)$ et $4\,(n+1)n+2\,n+2 = 2\,(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(2\,n+3)(n+3)}{2\,(2\,n+1)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(2\,k+3)(k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+3)}{(2\,k+1)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+3)}{(2\,k+1)(k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+3) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}\\
&= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} (k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}\\
&= \left(\frac{1}{2}\,(2\,n+1)(n+2)(n+1) \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\,(2\,n+1)(n+2)(n+1)$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^{-n-1}\,(-1)^n\,a_0(2\,n+1)(n+2)(n+1). \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+3)(n+3)|z|}{2\,(2\,n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \,]-2,2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n+1)(n+2)(n+1)}{2^n} x^n.$$

Corrigé 27. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-52x^2 S''(x) + \left(18x^2 - 208x\right) S'(x) + (27x - 104)\,S(x)\\
&= -52x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(18x^2 - 208x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (27x-104) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -52x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 18x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 208x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 27x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 104 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -52 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 18 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 208 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 27 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 104 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -52 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 18 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 208 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 27 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 104 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -52 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 18 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 208 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 27 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 104 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((18\,n+9)\,a_{n-1} + (-52\,(n-1)n - 208\,n - 104)\,a_n\right) x^n + (-104\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (18\,n+9)\,a_{n-1} + (-52\,(n-1)n - 208\,n - 104)\,a_n &= 0, \\ \hfill -104\,a_0 &= 208, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-52\,(n-1)n - 208\,n - 104 = -52\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{9\,(2\,n+3)}{52\,(n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{9\,(2\,k+3)}{52\,(k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(2\,k+3)}{52\,(k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(2\,k+3)}{52\,(k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{9}{52}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{9}{52}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{(k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{(k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (k+3)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (k+1)} \\ &= \frac{(2\,n+2)!}{2^n (n+2)(n+1)^3 n!^3} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{9^n 2^{-n+1}\,(2\,n+2)!}{52^n (n+2)(n+1)^3 n!^3}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{9\,(2\,n+3)|z|}{52\,(n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{9\,|z|}{26\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9^n 2^{-n-1}\,(2\,n+2)!}{52^n (n+2)(n+1)^3 n!^3} x^n.$$

Corrigé 28. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 3 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^4 + 7x^2\right) S''(x) + \left(-10x^3 + 28x\right) S'(x) + \left(-8x^2 + 14\right) S(x) \\
&= \left(-2x^4 + 7x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-10x^3 + 28x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-8x^2 + 14\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 7x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 10x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 28x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 8x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 10 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 28 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 10 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 28 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 10 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 28 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-2\,(n-2)(n-3) - 10\,n + 12 a_{n-2} + (7\,(n-1)n + 28\,n + 14)\,a_n\right) x^n + (42\,a_1 x + 14\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad -2\,(n-2)(n-3) - 10\,n + 12 a_{n-2} + (7\,(n-1)n + 28\,n + 14)\,a_n &=& 0, \\
14\,a_0 &=& 28, \\
42\,a_1 &=& -42,
\end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $-2\,(n-2)(n-3) - 10\,n + 12 = -2\,n^2$ et $7\,(n-1)n + 28\,n + 14 = 7\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2\,(n+2)^2}{7\,(n+4)(n+3)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2, \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{4\,(k+1)^2}{7\,(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+1)^2}{7\,(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+1)^2}{7\,(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{2}{7}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{2}{7}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)} \\
&= 2^n \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{2\,n+1} n!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\frac{2^n}{7^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{3}{(2\,n+3)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^{-2n-2}\,(2n+4)!}{(2n+3)^2(n+2)\,(n+1)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = \frac{2^{3n+2} n!^2}{7^n\,(2n+2)!}, \quad a_{2n+1} = -\frac{3 \cdot 2^{-n-2}\,(2n+4)!}{7^n (2n+3)^2 (n+2)\,(n+1)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2} z^{2n+2}}{a_{2n} z^{2n}}\right| = \frac{2\,(n+2)^2 |z|^2}{7\,(n+4)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{7}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{7}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \sqrt{\frac{7}{2}}$, alors $\frac{2}{7}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \sqrt{\frac{7}{2}}$, alors $\frac{2}{7}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{7}{2}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{7}{2}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{7}{2}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{7}{2}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3n+1} n!^2}{7^n\,(2n+2)!} x^{2n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n-2}\,(2n+4)!}{7^n (2n+3)^2 (n+2)\,(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 29. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - 10x\right) S''(x) + (3x - 20)\, S'(x) + S(x) \\
&= \left(x^2 - 10x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (3x-20) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 10x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 20 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 10\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 20\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 10\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 20\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 10\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 20\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(((n-1)n + 3\,n + 1)\, a_n + (-10\,(n+1)n - 20\,n - 20)\, a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ((n-1)n + 3\,n + 1)\, a_n + (-10\,(n+1)n - 20\,n - 20)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n + 3\,n + 1 = (n+1)^2$ et $-10\,(n+1)n - 20\,n - 20 = -10\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{10\,(n+2)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{10\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{10\,(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{10\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{10}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}\\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}\\
&= \left(\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{a_0}{10^n (n+1)}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+1)|z|}{10\,(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{10}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 10$, alors $\frac{1}{10}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 10$, alors $\frac{1}{10}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 10$ et $R \leqslant 10$, c'est-à-dire : $R = 10$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-10,10[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 10, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n(n+1)} x^n.$$

Corrigé 30. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-6x^2 S''(x) + \left(122x^2 - 9x\right) S'(x) + (244x+3)\, S(x)\\
&= -6x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(122x^2 - 9x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (244x+3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -6x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 122x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 244x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 122 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 244 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 122 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 244 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -6 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 122 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 244 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((122\,n + 122)\, a_{n-1} + (-6\,(n-1)n - 9\,n + 3)\, a_n\right) x^n + (3\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (122\,n + 122)\, a_{n-1} + (-6\,(n-1)n - 9\,n + 3)\, a_n & = & 0,\\ 3\,a_0 & = & 6, \end{array}\right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-6\,(n-1)n - 9\,n + 3 = -3\,(2\,n-1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{122}{3\,(2\,n+1)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{122}{3\,(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{122}{3\,(2\,k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{122}{3\,(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{122}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{122}{3}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+1} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\ &= \frac{2^n n!}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{122^n 2^{n+1} n!}{3^n\,(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{122\,|z|}{3\,(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{61\,|z|}{3\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{122^n 2^n n!}{3^n\,(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 31. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

← page 4

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&3x^2 S''(x) + \left(6x^3 + 9x\right) S'(x) + 6x^2 S(x) \\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(6x^3 + 9x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 6 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 6 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((6\,n-6)\, a_{n-2} + (3\,(n-1)n + 9\,n)\, a_n\right) x^n + (9\, a_1 x).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (6\,n-6)\, a_{n-2} + (3\,(n-1)n + 9\,n)\, a_n & = & 0, \\ 9\, a_1 & = & -9, \end{array} \right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $3\,(n-1)n + 9\,n = 3\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2\,(n+1)}{(n+4)(n+2)} a_n, \qquad \text{et} : \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc} : \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n} = (-2)^n\, a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)} &= \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\
&= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \prod_{k=1}^{n}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\,(-2)^n \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= 2^n \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{3 \cdot 2^{3\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-2)^n\, a_0\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}, \quad a_{2n+1} = -\frac{3 \cdot 2^{3\,n}\,(-2)^{n+4}\,(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{2\,(n+1)|z|^2}{(n+4)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications

$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}x^{2n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3\,n}\,(-2)^{n+4}\,(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 32. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^3+2x^2\right)S''(x) + \left(-5x^2+3x\right)S'(x) - (4x+1)\,S(x)\\
&= \left(-x^3+2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-5x^2+3x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (4x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 5x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(-(n-1)(n-2)-5\,n+1\right)a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n+3\,n-1\right)a_n\right)x^n + (-a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(-(n-1)(n-2)-5\,n+1\right)a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n+3\,n-1\right)a_n &= 0,\\ -a_0 &= 2, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)(n-2)-5\,n+1 = -(n+1)^2$ et $2\,(n-1)n+3\,n-1 = (2\,n-1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{2\,n+1}a_n, \quad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{2\,k+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{2\,k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{2\,k+1} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} = \frac{2^n (n+1) n!^2}{(2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^{n+1} (n+1) n!^2}{(2\,n)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{(n+2)|z|}{2\,n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2{,}2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n+1) n!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 33. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-18x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(-99x^2 + 5x\right) S'(x) - (36x + 2)\, S(x) \\
&= \left(-18x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-99x^2 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (36x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -18x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 99x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 36x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -18 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 99 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 36 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -18 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 99 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 36 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -18 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 99 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 36 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-18\,(n-1)(n-2) - 99\,n + 63\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n - 2\right) a_n\right) x^n + \left(-2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(-18\,(n-1)(n-2) - 99\,n + 63\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n - 2\right) a_n &= 0, \\ -2\,a_0 &= 2, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-18\,(n-1)(n-2) - 99\,n + 63 = -9\,(2\,n-1)(n+3)$ et $2\,(n-1)n + 5\,n - 2 = (2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{9\,(n+4)}{n+3} a_n, \quad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{9\,(k+4)}{k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(k+4)}{k+3}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(k+4)}{k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 9, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 9^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)} \\ &= \frac{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)} \\ &= \left(\frac{1}{3}n+1\right) \\ &= \frac{1}{3}n+1\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{1}{3} \cdot 9^n (n+3). \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{9\,(n+4)|z|}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 9\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 9\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{9}$, alors $9|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{9}$, alors $9|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{9}$ et $R \leqslant \frac{1}{9}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{9}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{9}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n (n+3) x^n.$$

Corrigé 34. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}&x^2 S''(x) + 5xS'(x) + \left(-96x^2+4\right) S(x) \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-96x^2+4\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 5x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 96x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + 5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n - 96\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + 5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n - 96\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n - 96\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-96a_{n-2} + ((n-1)n + 5\,n + 4)\,a_n\right)x^n + (9\,a_1x + 4\,a_0)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad -96a_{n-2} + ((n-1)n+5\,n+4)\,a_n &=& 0,\\
4\,a_0 &=& 4,\\
9\,a_1 &=& -18,
\end{array}
\right.
$$

Après factorisation (on a en effet $-96=-96$ et $(n-1)n+5\,n+4=(n+2)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2} = \frac{96}{(n+4)^2}a_n,\qquad \text{et : }\quad a_0=1,\quad a_1=-2. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$
\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{24}{(k+2)^2}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{24}{(k+2)^2},\qquad \text{donc : }\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{24}{(k+2)^2},
$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 96, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 96^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4\,(k+2)^2}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4\,(k+2)^2} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)}\\
&= \frac{1}{2^{2\,n}}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)}\\
&= \frac{1}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}
\end{aligned}
$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$
a_{2n+1} = -2\cdot 96^n\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+5)^2\right)}
$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1} \left((2\,k+1)^2\right)}$$
$$= \frac{9 \cdot 2^{2\,n+4}\,(n+2)!^2}{(2\,n+4)!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{96^n}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}, \quad a_{2n+1} = -\frac{9 \cdot 96^n 2^{2\,n+5}\,(n+2)!^2}{(2\,n+4)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{96\,|z|^2}{(n+4)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{96\,|z|^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 9\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{96^n}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}x^{2n} - 18\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{96^n 2^{2\,n+4}\,(n+2)!^2}{(2\,n+4)!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 35. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(2x^4 + x^2\right) S''(x) + \left(6x^3 + 3x\right) S'(x)$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$\begin{aligned}
&= \left(2x^4+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(6x^3+3x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&= 2x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 6x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n},\\
&= 2\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 6\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n},\\
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 6\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(2\,(n-2)(n-3)+6\,n-12\right)a_{n-2} + \left((n-1)n+3\,n\right)a_n\right)x^n + \left(3\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(2\,(n-2)(n-3)+6\,n-12\right)a_{n-2} + \left((n-1)n+3\,n\right)a_n &= 0,\\ 3\,a_1 &= 0,\end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-2)(n-3)+6\,n-12 = 2\,(n-2)n$ et $(n-1)n+3\,n = (n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2\,n}{n+4}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 0. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2=0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n}=0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar\cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $a_0=a_0\neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{2\,(2\,k+1)}{2\,k+5}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+1)}{2\,k+5}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+1)}{2\,k+5},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = (-2)^n\,a_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,k+5}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,k+5} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{(2\,n+3)(2\,n+1)}\right)$$
$$= \frac{3}{(2\,n+3)(2\,n+1)}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{3\,(-2)^n\,a_0}{(2\,n+3)(2\,n+1)}, \quad a_{2n+1} = 0. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = a_0$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,n|z|^2}{n+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors $2|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors $2|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0.$$

Corrigé 36. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned} &4x^2 S''(x) + \left(-8x^2 + 8x\right) S'(x) + (-12x+1)\,S(x) \\ &= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-8x^2+8x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-12x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 8x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 12 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 12 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-8\,n-4)\,a_{n-1} + (4\,(n-1)n + 8\,n + 1)\,a_n \right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (-8\,n-4)\,a_{n-1} + (4\,(n-1)n + 8\,n + 1)\,a_n & = & 0, \\
a_0 & = & -1,
\end{array}
\right.
$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $4\,(n-1)n + 8\,n + 1 = (2\,n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{4}{2\,n+3} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4}{2\,k+3}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4}{2\,k+3}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4}{2\,k+3},
$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 4^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$
\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.
$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{4^n 2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,|z|}{2\,n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 37. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&92x^2 S''(x) - 20x^3 S'(x) - 60x^2 S(x)\\
&= 92x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 20x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 60x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 92x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 20x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 60x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 92 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 20 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 60 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= 92 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 20 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 60 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= 92 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 20 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 60 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-20\,n-20\right) a_{n-2} + \left(92\,(n-1)n\right) a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (-20\,n-20)\,a_{n-2} + (92\,(n-1)n)\,a_n \;=\; 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $92\,(n-1)n = 92\,(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{5\,(n+3)}{23\,(n+2)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{5\,(2\,k+3)}{46\,(2\,k+1)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{5\,(2\,k+3)}{46\,(2\,k+1)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{5\,(2\,k+3)}{46\,(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{5}{23}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\dfrac{5}{23}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2\,k+3}{2\,(2\,k+1)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{2\,(2\,k+1)(k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} (2\,n+1) \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{2\,n+1}{2^n n\,(n-1)!}
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{5^n a_1}{23^n} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= (n+1) \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^n\,(n+1)!}{(2\,n+1)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n+2}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = \frac{5^n a_0 (2n+1)}{23^n 2^n n\,(n-1)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{5^n 2^n a_1\,(n+1)!}{23^n\,(2n+1)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{5\,(n+3)|z|^2}{23\,(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5\,|z|^2}{23\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\infty, +\infty\right[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n(2n+1)}{23^n 2^n n\,(n-1)!}x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n 2^n\,(n+1)!}{23^n\,(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 38. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 4 est de classe C^∞ sur $\left]-R, R\right[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 - 14x^2\right) S''(x) + \left(5x^3 - 28x\right) S'(x) + \left(4x^2 + 28\right) S(x)\\
&= \left(x^4 - 14x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(5x^3 - 28x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(4x^2 + 28\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 14x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 28x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 28\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 14\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 28\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 28\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= \sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 14\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 5\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 28\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 28\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 14\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 5\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 28\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 28\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n-2)(n-3) + 5\,n - 6a_{n-2} + (-14\,(n-1)n - 28\,n + 28)\,a_n\right) x^n + (28\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (n-2)(n-3) + 5\,n - 6a_{n-2} + (-14\,(n-1)n - 28\,n + 28)\,a_n &= 0, \\ 28\,a_0 &= 0, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $(n-2)(n-3)+5\,n-6 = n^2$ et $-14\,(n-1)n - 28\,n + 28 = -14\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{(n+2)^2}{14\,(n+4)(n+1)}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 0. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{(2\,k+3)^2}{28\,(2\,k+5)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)^2}{28\,(2\,k+5)(k+1)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)^2}{28\,(2\,k+5)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{14}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n+1} = \left(\frac{1}{14}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)^2}{2\,(2\,k+5)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)^2}{2\,(2\,k+5)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{(2\,n+3)^2}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} \\
&= \frac{3\cdot 2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(n+2)(n+1)n!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n+4}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n+4}\ell}{2^{n+2}(n+2)!} = \frac{(2n+4)!}{2^{n+2}(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2n}=0,\quad a_{2n+1} = \frac{3\cdot 2^{-2n-2}a_1(2n+4)!}{14^n(2n+3)^2(n+2)(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{(n+2)^2|z|^2}{14(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{14}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{14}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z|<\sqrt{14}$, alors $\frac{1}{14}|z|^2<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument ;

— si $|z|>\sqrt{14}$, alors $\frac{1}{14}|z|^2>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant\sqrt{14}$ et $R\leqslant\sqrt{14}$, c'est-à-dire : $R=\sqrt{14}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{14},\sqrt{14}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{14}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = +3\,a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-2n-2}(2n+4)!}{14^n(2n+3)^2(n+2)(n+1)n!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 39. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ ← page 4
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}&95x^2S''(x)+\left(-4x^2+380x\right)S'(x)+(-16x+190)\,S(x)\\ &=95x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(-4x^2+380x\right)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+(-16x+190)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$\begin{aligned}
&= 95x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 380x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 190 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 95 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 380 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 190 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 95 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} + 380 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 190 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 95 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} + 380 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 190 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-4\,n-12\right) a_{n-1} + \left(95\,(n-1)n + 380\,n + 190\right) a_n\right) x^n + \left(190\, a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (-4\,n-12)\,a_{n-1} + (95\,(n-1)n + 380\,n + 190)\,a_n & = \quad 0,\\ \hfill 190\,a_0 & = \quad 380, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $95\,(n-1)n + 380\,n + 190 = 95\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{4\,(n+4)}{95\,(n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4\,(k+4)}{95\,(k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+4)}{95\,(k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+4)}{95\,(k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{4}{95}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{4}{95}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{(k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{(k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+4)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=3}^{n+2} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (k+1)}\\
&= \left(\frac{1}{3}\,(n+3)^2 (n+2)\right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n+2} (k+1)}\\
&= \frac{n+3}{3\,(n+1)n!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2 \cdot 4^n (n+3)}{3 \cdot 95^n (n+1)n!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,(n+4)|z|}{95\,(n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\,|z|}{95\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n+3)}{95^n (n+1)n!} x^n.$$

Corrigé 40. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^3 - 4x^2\right) S''(x) + \left(13x^2 - 18x\right) S'(x) + (12x - 6)\, S(x) \\
&= \left(2x^3 - 4x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(13x^2 - 18x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (12x - 6) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 13x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 18x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 13 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 18 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 13 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 18 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 13 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 18 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(2\,(n-1)(n-2) + 13\,n - 1\right) a_{n-1} + \left(-4\,(n-1)n - 18\,n - 6\right) a_n \right) x^n + \left(-6\, a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(2\,(n-1)(n-2) + 13\,n - 1\right) a_{n-1} + \left(-4\,(n-1)n - 18\,n - 6\right) a_n = 0, \\ -6\, a_0 = -12, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)(n-2)+13\,n-1=(2\,n+1)(n+3)$ et $-4\,(n-1)n-18\,n-6=-2\,(2\,n+1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\qquad \text{et :}\quad a_0=2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On a donc immédiatement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n a_0=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. D'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n=2\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\,z\right)^n$ est géométrique, donc on sait montrer facilement que son rayon de convergence est $R=2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $I=]-2,2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n.$$

Corrigé 41. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ ← page 5
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nnx^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2S''(x)+\left(3x^3+3x\right)S'(x)+\left(12x^2+1\right)S(x)\\
&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(3x^3+3x\right)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\left(12x^2+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+3x^3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+3x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+12x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n+2}+3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n+12\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+3\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n+12\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+3\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n+12\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left((3\,n+6)\,a_{n-2}+((n-1)n+3\,n+1)\,a_n\right)x^n+\left(4\,a_1x+a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (3\,n+6)\,a_{n-2}+((n-1)n+3\,n+1)\,a_n&=&0,\\ a_0&=&-2,\\ 4\,a_1&=&-4,\end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $(n-1)n+3\,n+1=(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3\,(n+4)}{(n+3)^2}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0=-2, \quad a_1=-1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \qquad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{6\,(k+2)}{(2\,k+3)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{6\,(k+2)}{(2\,k+3)^2}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{6\,(k+2)}{(2\,k+3)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=(-3)^n\,a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+2)}{(2\,k+3)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+2)}{(2\,k+3)^2} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)} \\
&= 2^n\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)} \\
&= \frac{2^{3\,n+2}\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\,(-3)^n\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2^{2\,n}}\,\frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{2^{-3\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^3}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2^{3\,n+3}\,(-3)^n\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-3\,n-2}\,(-3)^{n-1}\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^3}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}\,z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,(n+4)|z|^2}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3\,n+2}\,(-3)^n\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2} x^{2n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-3\,n-2}\,(-3)^n\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 42. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-8x^2 S''(x) + \left(4x^3 - 24x\right) S'(x) + 12x^2 S(x)\\
&= -8x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(4x^3 - 24x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 24x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 24\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= -8 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 24\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= -8 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 24\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((4\,n+4)\,a_{n-2} + (-8\,(n-1)n - 24\,n)\,a_n \right) x^n + (-24\,a_1 x)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (4\,n+4)\,a_{n-2} + (-8\,(n-1)n - 24\,n)\,a_n &= 0, \\ \qquad\qquad -24\,a_1 &= -48, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-8\,(n-1)n - 24\,n = -8\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+3}{2\,(n+4)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{2\,k+3}{8\,(k+2)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{8\,(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{8\,(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{4\,(k+2)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\ &= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\ &= \frac{2^{-3\,n-1}(n+1)\,(2\,n+2)!}{(n+1)!^3} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = 2^{-n+1} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}$$

$$= 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^{3\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^3}{(2\,n+4)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{-4\,n-1} a_0 (n+1)\,(2\,n+2)!}{(n+1)!^3}, \quad a_{2n+1} = \frac{3 \cdot 2^{2\,n+5}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^3}{(2\,n+4)!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{(n+3)|z|^2}{2\,(n+4)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-4\,n-1}(n+1)\,(2\,n+2)!}{(n+1)!^3} x^{2n} + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^3}{(2\,n+4)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 43. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - 11x^2\right) S''(x) - \left(6x^3 + 55x\right) S'(x) - \left(6x^2 + 44\right) S(x) \\
&= \left(-x^4 - 11x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(6x^3 + 55x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(6x^2 + 44\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 11x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 55x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 44 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 11\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 55\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 44\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 11\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 55\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n - 44\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 11\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 55\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n - 44\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 6\right)a_{n-2} + \left(-11\,(n-1)n - 55\,n - 44\right)a_n\right)x^n + \left(-99\,a_1 x - 44\,a_0\right).$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 6\right)a_{n-2} + \left(-11\,(n-1)n - 55\,n - 44\right)a_n &= 0, \\ -44\,a_0 &= 44, \\ -99\,a_1 &= -99, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-2)(n-3)-6\,n+6 = -(n+1)n$ et $-11\,(n-1)n-55\,n-44 = -11\,(n+2)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+3)(n+2)}{11\,(n+4)^2}a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1, \quad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{22\,(k+2)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{22\,(k+2)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{22\,(k+2)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{11}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{1}{11}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(k+1)}{2\,(k+2)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(k+1)}{2\,(k+2)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)} \\
&= \frac{(2\,n+1)!}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=\frac{(-1)^n}{11^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\Big((2\,k+5)^2\Big)}\\&=2^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}\Big((2\,k+1)^2\Big)}\\&=2^n\left(\frac{9}{2\,n+3}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n+1}(2\,k+1)}\\&=\frac{9\cdot 2^{2\,n+2}(n+2)(n+1)^2n!^2}{(2\,n+3)\,(2\,n+4)!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=-\frac{(-1)^n\,(2\,n+1)!}{11^n2^{2\,n}\,(n+1)!^2},\quad a_{2n+1}=\frac{9\cdot 2^{2\,n+2}\,(-1)^n\,(n+2)(n+1)^2n!^2}{11^n(2\,n+3)\,(2\,n+4)!}.\qquad(\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_nz^{2n}}\right|=\left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right|=\frac{(n+3)(n+2)|z|^2}{11\,(n+4)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{11}\,|z|^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{11}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z|<\sqrt{11}$, alors $\frac{1}{11}|z|^2<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z|>\sqrt{11}$, alors $\frac{1}{11}|z|^2>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant\sqrt{11}$ et $R\leqslant\sqrt{11}$, c'est-à-dire : $R=\sqrt{11}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-\sqrt{11},\sqrt{11}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{11}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n=\sum_{n\text{ pair}}+\sum_{n\text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -9 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{11^n 2^{2n} (n+1)!^2} x^{2n} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+2} (-1)^n (n+2)(n+1)^2 n!^2}{11^n (2n+3)(2n+4)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 44. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(15x^4+7x^2\right) S''(x) + \left(75x^3+7x\right) S'(x) - 7S(x) \\
&= \left(15x^4+7x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(75x^3+7x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 7 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 15x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 7x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 75x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 7x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 7 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 15 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + 75 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 7 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 15 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^{n} + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + 75 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 7 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 15 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^{n} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + 75 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 7 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(15(n-2)(n-3) + 75n - 150\right) a_{n-2} + \left(7(n-1)n + 7n - 7\right) a_n\right) x^n + \left(-7a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (15(n-2)(n-3)+75n-150)\, a_{n-2} + (7(n-1)n+7n-7)\, a_n = 0, \\ -7a_0 = -14, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $15(n-2)(n-3)+75n-150 = 15(n+2)(n-2)$ et $7(n-1)n+7n-7 = 7(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{15(n+4)n}{7(n+3)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n}=0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 2 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2k+1$ et en divisant par $a_{2k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}} = -\frac{15(2k+5)(2k+1)}{28(k+2)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}} = \frac{a_{2n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{15(2k+5)(2k+1)}{28(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{15(2k+5)(2k+1)}{28(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{15}{7}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n+1} = \left(-\dfrac{15}{7}\right)^n a_1 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{4\,(k+2)(k+1)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}$$
$$= \frac{1}{2^{2\,n}}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(k+1)}$$
$$= \frac{2^{-4\,n-4}(n+1)\,(2\,n+4)!^2}{3\,(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)^2\,(n+1)!^4}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{2^{-4\,n-3}\,(-15)^n\,(n+1)\,(2\,n+4)!^2}{3\cdot 7^n(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)^2\,(n+1)!^4},\quad a_{2n+1} = \frac{2^{-4\,n-4}\,(-15)^n\,a_1(n+1)\,(2\,n+4)!^2}{3\cdot 7^n(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)^2\,(n+1)!^4}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = 2$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{15\,(n+4)n|z|^2}{7\,(n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{15}{7}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{15}{7}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{\frac{7}{15}}$, alors $\frac{15}{7}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{\frac{7}{15}}$, alors $\frac{15}{7}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{7}{15}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{7}{15}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{7}{15}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{7}{15}}, \sqrt{\frac{7}{15}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme

des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{7}{15}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-4\,n-4}\,(-15)^n\,(n+1)\,(2\,n+4)!^2}{7^n(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)^2\,(n+1)!^4} x^{2n+1}.$$

Corrigé 45. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(4x^3 + 2x\right) S'(x) + \left(-2x^2 + 2\right) S(x)\\
&= \left(-x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(4x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-2x^2 + 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 4\,n + 6\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 2\,n + 2\right) a_n\right) x^n + \left(2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 4\,n + 6\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 2\,n + 2\right) a_n & = & 0,\\ 2\,a_0 & = & 4, \end{array}\right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 4\,n + 6 = -(n-1)n$ et $-(n-1)n - 2\,n + 2 = -(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+2}{n+4} a_n, \quad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{k+1}{k+2}.$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+1}{k+2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+1}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= (-1)^n\, a_1 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{3}{2\,n+3}\right) \\
&= \frac{3}{2\,n+3}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2\,(-1)^n}{n+1}, \quad a_{2n+1} = \frac{3\,(-1)^n\, a_1}{2\,n+3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+2)|z|^2}{n+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n} + 3\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 46. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
& -xS''(x) + (3x-3)\,S'(x) + 3S(x) \\
&= -x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (3x-3)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((3\,n+3)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (3\,n+3)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n+1)n - 3\,n - 3 = -(n+3)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{3}{n+3} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{k+3}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3}{k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3}{k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)} \\
&= \frac{2}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2 \cdot 3^n a_0}{(n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{3\,|z|}{n+3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3\,|z|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+2)!} x^n.$$

Corrigé 47. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$-7x^2 S''(x) + x^3 S'(x) + 4x^2 S(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= -7x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -7x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -7\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= -7\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= -7\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+2)\,a_{n-2} + (-7\,(n-1)n)\,a_n\right) x^n.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (n+2)\,a_{n-2} + (-7\,(n-1)n)\,a_n \;=\; 0,$$

Après factorisation (on a en effet $-7\,(n-1)n = -7\,(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+2} = \frac{n+4}{7\,(n+2)(n+1)}a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{k+2}{7\,(2\,k+1)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{7\,(2\,k+1)(k+1)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{7\,(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{7}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{1}{7}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(2\,k+1)(k+1)}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(2\,k+1)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\
&= (n+1)\,\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2^n\,(n+1)!}{(2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{a_1}{7^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{3}\,n+1\right)\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\
&= \frac{2\,n+3}{3\cdot 2^n n\,(n-1)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^n a_0\,(n+1)!}{7^n\,(2\,n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{a_1(2\,n+3)}{3\cdot 7^n 2^n n\,(n-1)!}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+4)|z|^2}{7\,(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{7\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ $*$, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3}\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(n+1)!}{7^n\,(2\,n)!}x^{2n} + \frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,n+3}{7^n 2^n n\,(n-1)!}x^{2n+1}.$$

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 48. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-28x^2 S''(x) + \left(3x^3 - 84x\right) S'(x) + 3x^2 S(x)\\
&= -28x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(3x^3 - 84x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -28x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 84x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -28 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 84 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= -28 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 84 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= -28 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 84 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(3\,n - 3\right) a_{n-2} + \left(-28\,(n-1)n - 84\,n\right) a_n\right) x^n + \left(-84\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(3\,n - 3\right) a_{n-2} + \left(-28\,(n-1)n - 84\,n\right) a_n & = \quad 0,\\ -84\,a_1 & = \quad 168, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-28\,(n-1)n - 84\,n = -28\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{3\,(n+1)}{28\,(n+4)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{3\,(2\,k+1)}{112\,(k+2)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(2\,k+1)}{112\,(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(2\,k+1)}{112\,(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{3}{28}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n} = \left(\dfrac{3}{28}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)} \\
&= \frac{1}{2^{2\,n}}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(k+1)} \\
&= \frac{(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\frac{2\cdot 3^n}{28^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\
&= 2^n\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{3\cdot 2^{3\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{3^n a_0\,(2\,n)!}{28^n 2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3},\quad a_{2n+1} = -\frac{3^{n+1}2^{3\,n+5}(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{28^n\,(2\,n+4)!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,(n+1)|z|^2}{28\,(n+4)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{28\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications

$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n\,(2\,n)!}{28^n 2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3} x^{2n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{3\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{28^n\,(2\,n+4)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 49. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 5
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(5x^3 + 5x\right) S'(x) - \left(4x^2 + 4\right) S(x)\\
&= \left(-x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(5x^3 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(4x^2 + 4\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 6a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 5\,n - 4\right) a_n\right) x^n + \left(-9\,a_1 x - 4\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad -(n-2)(n-3) - 5\,n + 6a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 5\,n - 4\right) a_n & = & 0,\\
-4\,a_0 & = & 8,\\
-9\,a_1 & = & 0,
\end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 5\,n + 6 = -n^2$ et $-(n-1)n - 5\,n - 4 = -(n+2)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+2)^2}{(n+4)^2} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2, \quad a_1 = 0. \qquad (*)$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}.$$

---

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+2)^2\right)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n} \left((k+1)^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 0\frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+3)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+5)^2\right)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} \left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=2}^{n+1} \left((2\,k+1)^2\right)} \\
&= \left(\frac{9}{(2\,n+3)^2}\right) \\
&= \frac{9}{(2\,n+3)^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2\,(-1)^n}{(n+1)^2}, \quad a_{2n+1} = 0. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+2)^2 |z|^2}{(n+4)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -18 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^{2n}.$$

Corrigé 50. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - x\right) S''(x) + (5x-1)\, S'(x) + 4S(x)\\
&= \left(x^2 - x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (5x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left((n-1)n + 5\,n + 4\right) a_n + \left(-(n+1)n - n - 1\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left((n-1)n + 5\,n + 4\right) a_n + \left(-(n+1)n - n - 1\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $(n-1)n + 5\,n + 4 = (n+2)^2$ et $-(n+1)n - n - 1 = -(n+1)^2$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} a_n. \qquad (*)$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((k+2)^2\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \left((k+1)^2\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} \\
&= \left((n+1)^2\right) \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_0 (n+1)^2. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{(n+2)^2 |z|}{(n+1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} |z| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 x^n.$$

Corrigé 51. Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-x^2S''(x)-\left(3x^3+x\right)S'(x)\\
&=-x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-\left(3x^3+x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1},\\
&=-x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-3x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1},\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2}-\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n},\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-3\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}-\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n},\\
&=-\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-3\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n},\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-3\,n+6\right)a_{n-2}--(n-1)n-na_n\right)x^n+\left(-a_1x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (-3\,n+6)\,a_{n-2}--(n-1)n-na_n &= 0,\\ -a_1 &= 1, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-1)n-n=-n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2}=-\frac{3\,n}{(n+2)^2}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1=-1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2=0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n}=0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)}=a_{2n+2}=\bigstar\cdot a_{2n}=0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $a_0=a_0\neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=-\frac{3\,(2\,k+1)}{(2\,k+3)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=\frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3\,(2\,k+1)}{(2\,k+3)^2}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1}=a_1\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3\,(2\,k+1)}{(2\,k+3)^2},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n+1}=(-3)^n\,a_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{(2\,k+3)^2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{(2\,k+3)^2}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} \left((2\,k+1)^2\right)}$$
$$= \left(\frac{1}{2\,n+1}\right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n+1}(n+1)n!}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,a_0(n+1)n!}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = -\frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n+1)n!}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = a_0$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,n|z|^2}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n+1)n!}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 52. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2S''(x)+\left(-3x^3+4x\right)S'(x)+\left(-9x^2+2\right)S(x)\\
&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(-3x^3+4x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+\left(-9x^2+2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-3x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+4x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-9x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2}+4\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-9\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-3\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}+4\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-9\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-3\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}+4\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}-9\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-3\,n-3\right)a_{n-2}+\left((n-1)n+4\,n+2\right)a_n\right)x^n+\left(6\,a_1x+2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (-3\,n-3)\,a_{n-2}+((n-1)n+4\,n+2)\,a_n &= 0,\\
2\,a_0 &= -2,\\
6\,a_1 &= -12,
\end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n+4\,n+2=(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2}=\frac{3}{n+4}a_n, \quad \text{et :} \quad a_0=-1, \quad a_1=-2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{3}{2\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{3}{2\,(k+2)}, \quad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{3}{2\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 3, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=3^na_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+2)}=\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}$$
$$= \frac{1}{2^n (n+1)!}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = -2 \cdot 3^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}$$
$$= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{3 \cdot 2^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+2} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+2} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2} \prod_{k=1}^{n+2} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{3^n}{2^n\,(n+1)!}, \quad a_{2n+1} = -\frac{3^{n+1} 2^{n+3}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{3\,|z|^2}{n+4} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n\,(n+1)!} x^{2n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 53. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(5x^3 - 2x^2\right) S''(x) + \left(40x^2 - 5x\right) S'(x) + (60x+2)\, S(x) \\
&= \left(5x^3 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(40x^2 - 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (60x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 5x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 40x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 60x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 5 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 40 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 60 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 40 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 60 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 5 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 40 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 60 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((5\,(n-1)(n-2) + 40\,n + 20)\, a_{n-1} + (-2\,(n-1)n - 5\,n + 2)\, a_n \right) x^n + (2\,a_0).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (5\,(n-1)(n-2) + 40\,n + 20)\, a_{n-1} + (-2\,(n-1)n - 5\,n + 2)\, a_n &= 0, \\ 2\,a_0 &= -2, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $5\,(n-1)(n-2) + 40\,n + 20 = 5\,(n+3)(n+2)$ et $-2\,(n-1)n - 5\,n + 2 = -(2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{5\,(n+4)}{2\,n+1} a_n, \quad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5\,(k+4)}{2\,k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{5\,(k+4)}{2\,k+1}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{5\,(k+4)}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 5, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{2\,k+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+4)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}$$

$$= \frac{\prod_{k=3}^{n+2} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n-1}(n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{3\ (2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{5^n 2^{n-1}(n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{3\ (2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{5\,(n+4)|z|}{2\,n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{2}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{2}{5}$, alors $\frac{5}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{2}{5}$, alors $\frac{5}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{2}{5}$ et $R \leqslant \frac{2}{5}$, c'est-à-dire : $R = \frac{2}{5}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{2}{5}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n 2^n (n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 54. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$2x^2 S''(x) + \left(2x^2 + 5x\right) S'(x) + (x+1)\, S(x)$$
$$= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(2x^2 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$\begin{aligned}
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((2\,n-1)\, a_{n-1} + (2\,(n-1)n + 5\,n + 1)\, a_n \right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (2\,n-1)\, a_{n-1} + (2\,(n-1)n + 5\,n + 1)\, a_n & = \quad 0, \\ \hfill a_0 & = \quad 2, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)n + 5\,n + 1 = (2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,n+1}{(2\,n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,k+1}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{2\,n+1} \right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{1}{(2\,n+1)\,(n+1)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-1)^n}{(2\,n+1)\,(n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+1)|z|}{(2\,n+3)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|z|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)\,(n+1)!} x^n.$$

Corrigé 55. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^2 - 6x\right) S''(x) - (7x+9)\, S'(x) - 2S(x) \\
&= \left(-2x^2 - 6x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - (7x+9) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 7x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - 7 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-1)n - 7\,n - 2\right) a_n + \left(-6\,(n+1)n - 9\,n - 9\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(-2\,(n-1)n - 7\,n - 2\right) a_n + \left(-6\,(n+1)n - 9\,n - 9\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $-2\,(n-1)n - 7\,n - 2 = -(2\,n+1)(n+2)$ et $-6\,(n+1)n - 9\,n - 9 = -3\,(2\,n+3)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(2\,n+1)(n+2)}{3\,(2\,n+3)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(2\,k+1)(k+2)}{3\,(2\,k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)(k+2)}{3\,(2\,k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)(k+2)}{3\,(2\,k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{n+1}{2\,n+1}\right) \\
&= \frac{n+1}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\, a_0 (n+1)}{3^n (2\,n+1)}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{(2\,n+1)(n+2)|z|}{3\,(2\,n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 3$, alors $\frac{1}{3}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 3$, alors $\frac{1}{3}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 3$ et $R \leqslant 3$, c'est-à-dire : $R = 3$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus),

alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-3,3[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 3, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n (2\,n+1)} x^n.$$

Corrigé 56. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2 S''(x) + \left(3x^3 + x\right) S'(x) + \left(9x^2 - 1\right) S(x)\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(3x^3 + x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(9x^2 - 1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 3 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((3\,n+3)\, a_{n-2} + ((n-1)n + n - 1)\, a_n\right) x^n + (-a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (3\,n+3)\, a_{n-2} + ((n-1)n + n - 1)\, a_n &= 0,\\ -a_0 &= -1, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n + n - 1 = (n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3}{n+1} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3}{2\,k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2\,k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = (-3)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}\\ &= \frac{2^n n!}{(2n)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1} &= (-3)^n a_1 \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\ &= \frac{1}{2^n n!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = \frac{2^n(-3)^n n!}{(2n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{(-3)^n a_1}{2^n n!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{3|z|^2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3|z|^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ $*$, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-3)^n\, n!}{(2\,n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^n n!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 57. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2 S''(x) + \left(-30x^2+4x\right) S'(x) + (-30x+2)\, S(x)\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-30x^2+4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-30x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 30x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 30x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 30 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 30 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 30 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 30 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 30 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 30 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-30\, n a_{n-1} + ((n-1)n + 4\,n + 2)\, a_n\right) x^n + (2\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad -30\, n a_{n-1} + ((n-1)n + 4\,n+2)\, a_n & = & 0,\\ 2\,a_0 & = & 4, \end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $(n-1)n + 4\,n + 2 = (n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{30\,(n+1)}{(n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \ a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{30\,(k+1)}{(k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{30\,(k+1)}{(k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{30\,(k+1)}{(k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 30, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 30^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(k+3)(k+2)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+3)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)\prod\limits_{k=2}^{n+1}(k+1)} \\
&= \left(\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n+1}(k+1)} \\
&= \frac{2}{(n+1)\,(n+2)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4 \cdot 30^n}{(n+1)\,(n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{30\,(n+1)|z|}{(n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{30\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{30^n}{(n+1)\,(n+2)!} x^n.$$

Corrigé 58. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(9x^4 - 11x^2\right) S''(x) + \left(45x^3 - 11x\right) S'(x) + \left(27x^2 + 11\right) S(x)$$

$$= \left(9x^4 - 11x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(45x^3 - 11x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(27x^2 + 11\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 9x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 11x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 45x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 11x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 27x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 11\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 9\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 11\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 45\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 11\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 27\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 11\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 9\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 11\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 45\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 11\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 27\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 11\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 9\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 11\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 45\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 11\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 27\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 11\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left((9\,(n-2)(n-3) + 45\,n - 63)\,a_{n-2} + (-11\,(n-1)n - 11\,n + 11)\,a_n\right)x^n + (11\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (9\,(n-2)(n-3)+45\,n-63)\,a_{n-2} + (-11\,(n-1)n - 11\,n + 11)\,a_n = 0,\\ 11\,a_0 = -22, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $9\,(n-2)(n-3)+45\,n-63 = 9\,(n+1)(n-1)$ et $-11\,(n-1)n - 11\,n + 11 = -11\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2} = \frac{9}{11}a_n,\quad \text{et : } \ a_0 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La suite $(a_{2\,n})_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\frac{9}{11}$. On a donc immédiatement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{9}{11}\right)^n a_0 = -2\left(\frac{9}{11}\right)^n$. De même : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = \left(\frac{9}{11}\right)^n a_1$.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. D'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_{2\,n} z^n = -2\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{9}{11}\,z\right)^n$ est géométrique, donc on sait montrer facilement que son rayon de convergence est $R = \frac{11}{9}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{11}{9},\frac{11}{9}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{11}{9}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9^n}{11^n}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9^n}{11^n}x^{2n+1}.$$

Corrigé 59. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\displaystyle\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$
\begin{aligned}
& -4x^2 S''(x) + \left(4x^3 - 16x\right) S'(x) + \left(4x^2 - 8\right) S(x) \\
&= -4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(4x^3 - 16x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(4x^2 - 8\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((4\,n - 4)\, a_{n-2} + (-4\,(n-1)n - 16\,n - 8)\, a_n \right) x^n + (-24\, a_1 x - 8\, a_0)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad (4\,n - 4)\, a_{n-2} + (-4\,(n-1)n - 16\,n - 8)\, a_n & = & 0, \\
-8\, a_0 & = & 0, \\
-24\, a_1 & = & 24,
\end{array}
\right.
$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-4\,(n-1)n - 16\,n - 8 = -4\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{(n+4)(n+3)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -1. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k + 1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{k+1}{(2\,k+5)(k+2)}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(2\,k+5)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(2\,k+5)(k+2)},
$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(2\,k+5)(k+2)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1) \prod\limits_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{3}{n+1}\right) \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n+1} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{3 \cdot 2^{n+2}(n+2)\,(n+1)!}{(n+1)\,(2\,n+4)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\prod\limits_{k=1}^{n+2} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 0, \quad a_{2n+1} = -\frac{3 \cdot 2^{n+2}(n+2)\,(n+1)!}{(n+1)\,(2\,n+4)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+1)|z|^2}{(n+4)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+2}(n+2)\,(n+1)!}{(n+1)\,(2\,n+4)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 60. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 6
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$-\,x^2 S''(x) - \left(12x^3 + x\right) S'(x) - 12x^2 S(x)$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(12x^3+x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 12x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 12\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 12\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-12\,n+12\right)a_{n-2} - -(n-1)n - n a_n\right)x^n + \left(-a_1 x\right).
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (-12\,n+12)\,a_{n-2} - -(n-1)n - n a_n &=& 0,\\
-a_1 &=& 2,
\end{array}
\right.
$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-1)n-n=-n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2} = -\frac{12\,(n+1)}{(n+2)^2}a_n,\qquad \text{et :}\quad a_1=-2. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$
\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3\,(2\,k+1)}{(k+1)^2}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3\,(2\,k+1)}{(k+1)^2},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3\,(2\,k+1)}{(k+1)^2},
$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -12, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=(-12)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{4\,(k+1)^2}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{4\,(k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}\\
&= \frac{1}{2^{2\,n}}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}\\
&= \frac{(2\,n)!}{2^{3\,n}n!^3}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= -2\,(-12)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)} \\ &= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)} \\ &= \frac{2^{3\,n+2}(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-12)^n\, a_0\,(2\,n)!}{2^{3\,n} n!^3}, \quad a_{2n+1} = -\frac{2^{3\,n+3}\,(-12)^n\,(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}\,z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{12\,(n+1)|z|^2}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{12\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\infty, +\infty\right[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-12)^n\,(2\,n)!}{2^{3\,n} n!^3} x^{2n} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3\,n+2}\,(-12)^n\,(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 61. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-x^2S''(x)+x^2S(x)\\
&=-x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=-x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2},\\
&=-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^{n},\\
&=-\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^{n},\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(1a_{n-2}+(-(n-1)n)\,a_n\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad 1a_{n-2}+(-(n-1)n)\,a_n\ =\ 0,$$

Après factorisation (on a en effet $1=1$ et $-(n-1)n=-(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{1}{2\,(2\,k+1)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(2\,k+1)(k+1)},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(2\,k+1)(k+1)}&=\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\
&=\frac{1}{2^n}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= a_1 \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)} \\ &= \frac{2\,(n+1)}{(2\,n+2)!} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{a_0}{(2\,n)!},\quad a_{2n+1} = \frac{2\,a_1(n+1)}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{|z|^2}{(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty,+\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(n+1)}{(2\,n+2)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 62. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^2 - x\right) S''(x) + (8x-1)\, S'(x) + 4S(x) \\
&= \left(2x^2 - x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (8x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 8x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(2\,(n-1)n + 8\,n + 4\right) a_n + \left(-(n+1)n - n - 1\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(2\,(n-1)n + 8\,n + 4\right) a_n + \left(-(n+1)n - n - 1\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)n + 8\,n + 4 = 2\,(n+2)(n+1)$ et $-(n+1)n - n - 1 = -(n+1)^2$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,(n+2)}{n+1} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\,(k+2)}{k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{k+1}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= (n+1) \\
&= n+1
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n a_0 (n+1). \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2\,(n+2)|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (n+1) x^n.$$

Corrigé 63. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$
\begin{aligned}
&4x^2 S''(x) + \left(-6x^2 + 8x\right) S'(x) + (-9x+1)\, S(x) \\
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-6x^2 + 8x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-9x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 8\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 9\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(-6\,n-3\right)a_{n-1} + \left(4\,(n-1)n + 8\,n + 1\right)a_n\right)x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left(-6\,n-3\right)a_{n-1} + \left(4\,(n-1)n+8\,n+1\right)a_n & = & 0,\\
a_0 & = & 2,
\end{array}\right.
$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $4\,(n-1)n+8\,n+1 = (2\,n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1} = \frac{3}{2\,n+3}a_n,\qquad \text{et : }\quad a_0 = 2. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$
\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{2\,k+3}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{3}{2\,k+3},\qquad \text{donc : }\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{3}{2\,k+3},
$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 3, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = 3^n a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,k+3} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$
\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.
$$

On a donc montré :

$$
\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n = \frac{3^n 2^{n+2}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}. \tag{$\dagger$}
$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,|z|}{2\,n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|}{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 64. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-22x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(176x^3 + x\right) S'(x) + \left(-264x^2 + 1\right) S(x)\\
&= \left(-22x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(176x^3 + x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-264x^2 + 1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -22x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 176x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 264x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -22 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 176 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 264 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -22 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 176 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 264 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -22 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 176 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 264 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-22\,(n-2)(n-3) - 176\,n + 88\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - n + 1\right) a_n\right) x^n + \left(a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(-22\,(n-2)(n-3) - 176\,n + 88\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - n + 1\right) a_n & = & 0,\\ a_0 & = & 2, \end{array}\right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-22\,(n-2)(n-3) - 176\,n + 88 = -22\,(n+2)(n+1)$ et $-(n-1)n - n + 1 = -(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{22\,(n+4)}{n+1} a_n, \quad \text{et :} \quad a_0 = 2. \qquad (*)$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{44\,(k+2)}{2\,k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{44\,(k+2)}{2\,k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{44\,(k+2)}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -22, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-22)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{2\,n}(n+1)n!^2}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= (-22)^n\, a_1 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)(n+1)n!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{2\,n+1}\,(-22)^n\,(n+1)n!^2}{(2\,n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-2\,n-2}\,(-22)^n\, a_1\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{22\,(n+4)|z|^2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 22\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 22\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{22}}$, alors $22|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{22}}$, alors $22|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{22}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{22}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{22}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{22}}, \sqrt{\frac{1}{22}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{22}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n}\,(-22)^n\,(n+1)n!^2}{(2\,n)!} x^{2n} + \frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-2}\,(-22)^n\,(2\,n+4)!}{(n+2)(n+1)n!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 65. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&xS''(x) + (3x+2)\,S'(x) + 3S(x) \\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (3x+2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((3\,n+3)\,a_n + ((n+1)n + 2\,n + 2)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (3\,n+3)\,a_n + ((n+1)n + 2\,n + 2)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n+1)n + 2\,n + 2 = (n+2)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{3}{n+2} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{3}{k+2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{k+2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-3)^n\, a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k+2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\ &= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-3)^n\, a_0}{(n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{3\,|z|}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite,

obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!} x^n.$$

Corrigé 66. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-xS''(x) + (x-4)\,S'(x) + 4S(x)\\
&= -x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x-4)\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+4)\,a_n + (-(n+1)n - 4\,n - 4)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+4)\,a_n + (-(n+1)n - 4\,n - 4)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n+1)n - 4\,n - 4 = -(n+4)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}$$

$$= \frac{1}{n!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{a_0}{n!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Corrigé 67. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(8x^3 + 3x\right) S'(x) - \left(4x^2 + 1\right) S(x) \\
&= \left(-2x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(8x^3 + 3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(4x^2 + 1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 8x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 8 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-2)(n-3) - 8\,n + 12\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 3\,n - 1\right) a_n\right) x^n + \left(-4\,a_1 x - a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left(-2\,(n-2)(n-3) - 8\,n + 12\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 3\,n - 1\right) a_n & = & 0, \\
-a_0 & = & 2, \\
-4\,a_1 & = & 4,
\end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $-2\,(n-2)(n-3)-8\,n+12=-2\,(n-1)n$ et $-(n-1)n-3\,n-1=-(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=-\frac{2\,(n+2)(n+1)}{(n+3)^2}a_n,\qquad \text{et : }\ a_0=-2,\quad a_1=-1.\qquad (*)$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=-\frac{4\,(2\,k+1)(k+1)}{(2\,k+3)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4\,(2\,k+1)(k+1)}{(2\,k+3)^2},\qquad \text{donc : }\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4\,(2\,k+1)(k+1)}{(2\,k+3)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=(-2)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(2\,k+1)(k+1)}{(2\,k+3)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(2\,k+1)(k+1)}{(2\,k+3)^2}&=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}\\
&=2^n\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}\\
&=2^n\left(\frac{1}{2\,n+1}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}\\
&=\frac{2^{2\,n+1}(n+1)n^2\,(n-1)!^2}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1}&=-\,(-2)^n\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)}\\
&=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}$$

$$= \frac{(2\,n+1)!}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2^{2\,n}\,(-2)^{n+2}\,(n+1)n^2\,(n-1)!^2}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = -\frac{(-2)^n\,(2\,n+1)!}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,(n+2)(n+1)|z|^2}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors $2|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors $2|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2\sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2^{2\,n}\,(-2)^{n+1}\,(n+1)n^2\,(n-1)!^2}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)!}x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,(2\,n+1)!}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 68. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(4x^2+5x\right)S''(x) + (12x+15)\,S'(x) + 4S(x)$$
$$= \left(4x^2+5x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (12x+15)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$\begin{aligned}
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 12x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 15 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 15 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(4\,(n-1)n + 12\,n + 4\right) a_n + \left(5\,(n+1)n + 15\,n + 15\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(4\,(n-1)n + 12\,n + 4\right) a_n + \left(5\,(n+1)n + 15\,n + 15\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $4\,(n-1)n + 12\,n + 4 = 4\,(n+1)^2$ et $5\,(n+1)n + 15\,n + 15 = 5\,(n+3)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{4\,(n+1)}{5\,(n+3)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{4\,(k+1)}{5\,(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+1)}{5\,(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+1)}{5\,(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{4}{5}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)}\\
&= \left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)\\
&= \frac{2}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-4)^n\,a_0}{5^n (n+2)(n+1)}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,(n+1)|z|}{5\,(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{5}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{5}{4}$, alors $\frac{4}{5}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{5}{4}$, alors $\frac{4}{5}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{5}{4}$ et $R \leqslant \frac{5}{4}$, c'est-à-dire : $R = \frac{5}{4}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{5}{4}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{5^n (n+2)(n+1)} x^n.$$

Corrigé 69. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(4x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(14x^2 + 5x\right) S'(x) + (4x+1)\, S(x) \\
&= \left(4x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(14x^2 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (4x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 14x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 14 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 14 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 14 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(4\,(n-1)(n-2) + 14\,n - 10\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n + 1\right) a_n\right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, & \left(4\,(n-1)(n-2) + 14\,n - 10\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n + 1\right) a_n & = & 0, \\ & a_0 & = & 1, \end{array}\right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $4\,(n-1)(n-2) + 14\,n - 10 = 2\,(2\,n-1)(n+1)$ et $2\,(n-1)n + 5\,n + 1 = (2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(2\,n+1)}{2\,n+3} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(2\,k+1)}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+1)}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+1)}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2)^n\, a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,k+3} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{2\,n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-2)^n}{2\,n+1}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(2\,n+1)|z|}{2\,n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2\,n+1} x^n.$$

Corrigé 70. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-8x^2 S''(x) - \left(x^3+16x\right) S'(x) + \left(-3x^2+16\right) S(x)\\
&= -8x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(x^3+16x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-3x^2+16\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-n-1\right) a_{n-2} + \left(-8\,(n-1)n - 16\,n + 16\right) a_n\right) x^n + \left(16\, a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (-n-1)\, a_{n-2} + (-8\,(n-1)n - 16\,n + 16)\, a_n & = & 0,\\ 16\, a_0 & = & 0, \end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $-8\,(n-1)n - 16\,n + 16 = -8\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+3}{8\,(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et : } \ a_0 = 0. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{k+2}{8\,(2\,k+5)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{8\,(2\,k+5)(k+1)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{8\,(2\,k+5)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier).

Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{8}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = \left(-\dfrac{1}{8}\right)^n a_1 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(2\,k+5)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(2\,k+5)(k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= (3\,n+3) \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{3 \cdot 2^{n+2} (n+1)\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n+1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n+1} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+2} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+2} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2} \prod\limits_{k=1}^{n+2} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{3 \cdot 2^{n+2}\,(-1)^n\, a_1 (n+1)\,(n+2)!}{8^n\,(2\,n+4)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+3)|z|^2}{8\,(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{8\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +3\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+2}\,(-1)^n\,(n+1)\,(n+2)!}{8^n\,(2\,n+4)!} x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 71. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 7
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
& -2x^2 S''(x) + \left(4x^3 - 2x\right) S'(x) + \left(16x^2 + 2\right) S(x) \\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(4x^3 - 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(16x^2 + 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 16x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((4\,n + 8)\, a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 2\,n + 2\right) a_n \right) x^n + (2\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (4\,n+8)\, a_{n-2} + (-2\,(n-1)n - 2\,n + 2)\, a_n &= 0, \\ \qquad\qquad 2\,a_0 &= -2, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)n - 2\,n + 2 = -2\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2\,(n+4)}{(n+3)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{4\,(k+2)}{(2\,k+3)(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+2)}{(2\,k+3)(2\,k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+2)}{(2\,k+3)(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n} = 2^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{(2\,k+3)(2\,k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{(2\,k+3)(2\,k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= 2^n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{3\,n+2}(2\,n+1)\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 2^n a_1 \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\
&= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{2^{-3\,n-2}(n+1)\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^3}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2^{4\,n+2}(2\,n+1)\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-2\,n-2}a_1(n+1)\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{2\,(n+4)|z|^2}{(n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \,]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications

$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{4\,n+2}(2\,n+1)\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2} x^{2n} + \frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-2}(n+1)\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 72. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(9x^4-93x^2\right) S''(x) + \left(54x^3-465x\right) S'(x) + \left(54x^2-372\right) S(x)\\
&= \left(9x^4-93x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(54x^3-465x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(54x^2-372\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 9x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 93x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 54x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 465x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 54x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 372 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 9 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 93 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 54 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 465 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 54 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 372 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 9 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - 93 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 54 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 465 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 54 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} - 372 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 9 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - 93 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 54 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 465 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 54 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} - 372 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(9\,(n-2)(n-3)+54\,n-54\right) a_{n-2} + \left(-93\,(n-1)n - 465\,n - 372\right) a_n\right) x^n + \left(-837\,a_1 x - 372\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(9\,(n-2)(n-3)+54\,n-54\right) a_{n-2} + \left(-93\,(n-1)n - 465\,n - 372\right) a_n & = & 0,\\
-372\,a_0 & = & 744,\\
-837\,a_1 & = & 837,
\end{array}\right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $9\,(n-2)(n-3)+54\,n-54 = 9\,(n+1)n$ et $-93\,(n-1)n - 465\,n - 372 = -93\,(n+2)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{3\,(n+3)(n+2)}{31\,(n+4)^2} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2, \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{3\,(2\,k+3)(k+1)}{62\,(k+2)^2}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(2\,k+3)(k+1)}{62\,(k+2)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(2\,k+3)(k+1)}{62\,(k+2)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{3}{31}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{3}{31}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{2\,(k+2)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{2\,(k+2)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)} \\
&= \frac{(2\,n+1)!}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\frac{3^n}{31^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+5)^2\right)} \\
&= 2^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}\left((2\,k+1)^2\right)} \\
&= 2^n\left(\frac{9}{2\,n+3}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n+1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{9\cdot 2^{2\,n+2}(n+2)(n+1)^2 n!^2}{(2\,n+3)\,(2\,n+4)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{3^n 2^{-2\,n+1}\,(2\,n+1)!}{31^n\,(n+1)!^2}, \quad a_{2n+1} = -\frac{3^{n+2}2^{2\,n+2}(n+2)(n+1)^2 n!^2}{31^n(2\,n+3)\,(2\,n+4)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,(n+3)(n+2)|z|^2}{31\,(n+4)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{31}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{31}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{\frac{31}{3}}$, alors $\frac{3}{31}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{\frac{31}{3}}$, alors $\frac{3}{31}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{31}{3}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{31}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{31}{3}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{31}{3}}, \sqrt{\frac{31}{3}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{31}{3}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -18\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n\,(2\,n+1)!}{31^n 2^{2\,n}\,(n+1)!^2}x^{2n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{2\,n+2}(n+2)(n+1)^2 n!^2}{31^n(2\,n+3)\,(2\,n+4)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 73. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4+3x^2\right)S''(x) + \left(-6x^3+9x\right)S'(x) - 4x^2S(x)\\
&= \left(-x^4+3x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-6x^3+9x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 9\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8)\, a_{n-2} + (3\,(n-1)n + 9\,n)\, a_n \right) x^n + (9\, a_1 x)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8)\, a_{n-2} + (3\,(n-1)n + 9\,n)\, a_n & = & 0, \\ 9\, a_1 & = & -9, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3)-6\,n+8 = -(n+2)(n-1)$ et $3\,(n-1)n+9\,n = 3\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{3\,(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{2\,k+1}{6\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{6\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{6\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\ &= \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = -\frac{1}{3^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}$$

$$= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{a_0\,(2\,n)!}{3^n 2^{2\,n} n!^2}, \quad a_{2n+1} = -\frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{3^n\,(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+1)|z|^2}{3\,(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{3}$, alors $\frac{1}{3}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{3}$, alors $\frac{1}{3}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{3}$ et $R \leqslant \sqrt{3}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)!}{3^n 2^{2\,n} n!^2} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{3^n\,(2\,n+2)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 74. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-xS''(x) + (16x-3)\,S'(x) + 32S(x)\\
&= -x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (16x-3) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 32 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 16x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 32 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 32\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n + 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 32\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n + 16\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 32\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((16\,n+32)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (16\,n+32)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $-(n+1)n - 3\,n - 3 = -(n+3)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{16\,(n+2)}{(n+3)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{16\,(k+2)}{(k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{16\,(k+2)}{(k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{16\,(k+2)}{(k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 16, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 16^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(k+3)(k+1)}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(k+3)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}\\
&= (2\,n+2)\,\frac{1}{\prod_{k=0}^{n+1}(k+1)}\\
&= \frac{2\,(n+1)}{(n+2)\,(n+1)!}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2 \cdot 16^n a_0 (n+1)}{(n+2)\,(n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{16\,(n+2)|z|}{(n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{16\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16^n(n+1)}{(n+2)\,(n+1)!} x^n.$$

Corrigé 75. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^2 - 7x\right) S''(x) + (8x - 28)\, S'(x) + 4S(x) \\
&= \left(2x^2 - 7x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (8x - 28) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 7x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 8x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 28 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 28 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 28 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 28 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2\,(n-1)n + 8\,n + 4)\, a_n + (-7\,(n+1)n - 28\,n - 28)\, a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2\,(n-1)n + 8\,n + 4)\, a_n + (-7\,(n+1)n - 28\,n - 28)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)n + 8\,n + 4 = 2\,(n+2)(n+1)$ et $-7\,(n+1)n - 28\,n - 28 = -7\,(n+4)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,(n+2)}{7\,(n+4)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\,(k+2)}{7\,(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{7\,(k+4)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{7\,(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{2}{7}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+4}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+4} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+4)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2} (k+1)} \\
&= \left(\frac{6}{(n+3)(n+2)}\right) \\
&= \frac{6}{(n+3)(n+2)}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3 \cdot 2^{n+1} a_0}{7^n (n+3)(n+2)}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2\,(n+2)|z|}{7\,(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{7}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{7}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{7}{2}$, alors $\frac{2}{7}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{7}{2}$, alors $\frac{2}{7}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{7}{2}$ et $R \leqslant \frac{7}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{7}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{7}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{7^n (n+3)(n+2)} x^n.$$

Corrigé 76. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4+x^2\right) S''(x) + \left(-5x^3+4x\right) S'(x) + \left(-4x^2+2\right) S(x)\\
&= \left(-x^4+x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-5x^3+4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-4x^2+2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 6a_{n-2} + ((n-1)n + 4\,n + 2)\,a_n\right) x^n + (6\,a_1 x + 2\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad -(n-2)(n-3) - 5\,n + 6a_{n-2} + ((n-1)n + 4\,n + 2)\,a_n &= 0,\\ 2\,a_0 &= 4,\\ 6\,a_1 &= -6, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 5\,n + 6 = -n^2$ et $(n-1)n + 4\,n + 2 = (n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{(n+2)^2}{(n+4)(n+3)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2, \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}$$

$$= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$

$$= 2^n \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)}$$

$$= \frac{2^{2\,n+1} n!^2}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = -1 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+3)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^{n} \left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{3}{(2\,n+3)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (k+1)}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2 (n+2)\,(n+1)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{2\,n+2} n!^2}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = -\frac{3 \cdot 2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2 (n+2)\,(n+1)!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+2)^2 |z|^2}{(n+4)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus),

alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1{,}1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1} n!^2}{(2\,n+2)!} x^{2n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2 (n+2)\,(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 77. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2 S''(x) + \left(-9x^3 + 2x\right) S'(x) \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-9x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 9x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-9\,n + 18\right) a_{n-2} + \left((n-1)n + 2\,n\right) a_n\right) x^n + \left(2\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (-9\,n + 18)\, a_{n-2} + ((n-1)n + 2\,n)\, a_n = 0, \\ 2\,a_1 = 0, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $(n-1)n + 2\,n = (n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{9\,n}{(n+3)(n+2)} a_n, \quad \text{et : } \quad a_1 = 0. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = a_0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{9\,(2\,k+1)}{2\,(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(2\,k+1)}{2\,(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(2\,k+1)}{2\,(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 9, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = 9^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2\,n+1} \right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n (2\,n+1)\,(n+1)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{9^n a_0}{2^n (2\,n+1)\,(n+1)!}, \quad a_{2n+1} = 0. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = a_0$). On étudie à présent $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{9\,n |z|^2}{(n+3)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{9\,|z|^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications

$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0.$$

Corrigé 78. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^2+x\right) S''(x) + (-8x+1)\, S'(x) - 4S(x)\\
&= \left(-2x^2+x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (-8x+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 8x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 8\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 8\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-1)n - 8\,n - 4\right) a_n + \left((n+1)n + n + 1\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(-2\,(n-1)n - 8\,n - 4\right) a_n + \left((n+1)n + n + 1\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)n - 8\,n - 4 = -2\,(n+2)(n+1)$ et $(n+1)n + n + 1 = (n+1)^2$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,(n+2)}{n+1} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\,(k+2)}{k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{k+1},$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} = (n+1) = n+1$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n a_0 (n+1). \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2\,(n+2)|z|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (n+1) x^n.$$

Corrigé 79. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(-x^3 - 2x^2\right) S''(x) - \left(6x^2 + 5x\right) S'(x) - (6x+1)\, S(x)$$

$$= \left(-x^3 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(6x^2 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (6x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-(n-1)(n-2) - 6\,n\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n - 1\right) a_n\right) x^n + (-a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(-(n-1)(n-2) - 6\,n\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n - 1\right) a_n & = & 0, \\ -a_0 & = & 2, \end{array} \right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)(n-2) - 6\,n = -(n+2)(n+1)$ et $-2\,(n-1)n - 5\,n - 1 = -(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n+3}{2\,n+3} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{k+3}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+3}{2\,k+3}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+3}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{2\,k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\ &= \frac{2^n (n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=-\frac{2^{n+1}(-1)^n(n+2)(n+1)!^2}{(2n+2)!}.\qquad(\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|=\frac{(n+3)|z|}{2n+3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z|<2$, alors $\frac{1}{2}|z|<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant0}a_nz^n$ converge absolument ;
- si $|z|>2$, alors $\frac{1}{2}|z|>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant0}a_nz^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant2$ et $R\leqslant2$, c'est-à-dire : $R=2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $I=\,]-2,2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}(-1)^n(n+2)(n+1)!^2}{(2n+2)!}x^n.$$

Corrigé 80. Soit $\sum_{n\geqslant0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ ← page 8
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nnx^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}&\left(-x^4-2x^2\right)S''(x)-\left(6x^3+4x\right)S'(x)-4x^2S(x)\\&=\left(-x^4-2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\left(6x^3+4x\right)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\&=-x^4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-6x^3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\&=-\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n+2}-2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-6\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n+2}-4\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2},\\&=-\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n-2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-6\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n-4\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-4\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n,\end{aligned}$$

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8\right)a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 4\,n\right)a_n\right)x^n + (-4\,a_1x)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8\right)a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 4\,n\right)a_n = 0, \\ -4\,a_1 = -8, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-2)(n-3)-6\,n+8 = -(n+2)(n-1)$ et $-2\,(n-1)n-4\,n = -2\,(n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+4)(n+1)}{2\,(n+3)(n+2)}a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{(2\,k+1)(k+2)}{2\,(2\,k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)(k+2)}{2\,(2\,k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)(k+2)}{2\,(2\,k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{n+1}{2\,n+1}\right) \\
&= \frac{n+1}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 2^{-n+1}\,(-1)^n\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2\,n+3}{3\,(n+1)}\right)$$
$$= \frac{2\,n+3}{3\,(n+1)}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-1)^n\, a_0(n+1)}{2^n(2\,n+1)}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-n+1}\,(-1)^n\,(2\,n+3)}{3\,(n+1)}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+4)(n+1)|z|^2}{2\,(n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{2}$ et $R \leqslant \sqrt{2}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3}\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n+1)}{2^n(2\,n+1)}x^{2n} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n+3)}{2^n(n+1)}x^{2n+1}.$$

Corrigé 81. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 8
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-3x^2S''(x) - \left(27x^3+6x\right)S'(x) + \left(-81x^2+6\right)S(x)\\
&= -3x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(27x^3+6x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-81x^2+6\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -3x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 27x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 81x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= -3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 27\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 81\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= -3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 27\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 81\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= -3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 27\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 81\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((-27\,n-27)\,a_{n-2} + (-3\,(n-1)n - 6\,n + 6)\,a_n\right) x^n + (6\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (-27\,n-27)\,a_{n-2} + (-3\,(n-1)n - 6\,n + 6)\,a_n = 0, \\ 6\,a_0 = -6, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-3\,(n-1)n - 6\,n + 6 = -3\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{9\,(n+3)}{(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{9\,(2\,k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9\,(2\,k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9\,(2\,k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -9, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-9)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{2\,(2\,k+1)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{2\,(2\,k+1)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n}\,(2\,n+1)\,\frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (k+1)} \\ &= \frac{2\,n+1}{2^n (n+1) n!} \end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = (-9)^n\, a_1 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2k+1)} \\
&= (3n+3)\frac{1}{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)} \\
&= \frac{3\cdot 2^{n+2}(n+1)(n+2)!}{(2n+4)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n+4}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n+4}\ell}{2^{n+2}(n+2)!} = \frac{(2n+4)!}{2^{n+2}(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2n} = -\frac{(-9)^n(2n+1)}{2^n(n+1)n!},\quad a_{2n+1} = \frac{3\cdot 2^{n+2}(-9)^n a_1(n+1)(n+2)!}{(2n+4)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{9(n+3)|z|^2}{(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{9|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty,+\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-9)^n(2n+1)}{2^n(n+1)n!}x^{2n} + 3a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+2}(-9)^n(n+1)(n+2)!}{(2n+4)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 82. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$
\begin{aligned}
&\left(x^3+10x^2\right) S''(x)+\left(5x^2+25x\right) S'(x)+(3x-10)\, S(x)\\
&=\left(x^3+10x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\left(5x^2+25x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+(3x-10)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+10x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+5x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+25x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n-10\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1}+10\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n}+5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1}+25\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n}+3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}-10\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n}+10\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n}+5\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1) a_{n-1} x^{n}+25\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n}+3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n}-10\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n}+10\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n}+5\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1) a_{n-1} x^{n}+25\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n}+3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n}-10\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left((n-1)(n-2)+5\,n-2\right)a_{n-1}+\left(10\,(n-1)n+25\,n-10\right)a_n\right)x^n+\left(-10\,a_0\right).
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$
\begin{cases}
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left((n-1)(n-2)+5\,n-2\right)a_{n-1}+\left(10\,(n-1)n+25\,n-10\right)a_n = 0,\\
-10\,a_0 = 10,
\end{cases}
$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)(n-2)+5\,n-2=(n+2)n$ et $10\,(n-1)n+25\,n-10=5\,(2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1}=-\frac{n+1}{5\,(2\,n+1)}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0=-1. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=-\frac{k+1}{5\,(2\,k+1)}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{k+1}{5\,(2\,k+1)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{k+1}{5\,(2\,k+1)},
$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{5}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{2\,k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\
&=\frac{2^n n!^2}{(2\,n)!}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2n}\ell}{2^n n!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=-\frac{2^n(-1)^n n!^2}{5^n(2n)!}.\tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|=\frac{(n+1)|z|}{5(2n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{10}|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{10}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z|<10$, alors $\frac{1}{10}|z|<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z|>10$, alors $\frac{1}{10}|z|>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant 10$ et $R\leqslant 10$, c'est-à-dire : $R=10$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-10,10\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 10, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(-1)^n n!^2}{5^n(2n)!}x^n.$$

Corrigé 83. Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ ← page 9
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(10x^4+2x^2\right)S''(x)+\left(90x^3-2x\right)S'(x)+\left(160x^2+2\right)S(x)\\
&=\left(10x^4+2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\left(90x^3-2x\right)\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1}+\left(160x^2+2\right)\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n,\\
&=10x^4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+2x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+90x^3\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1}-2x\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1}+160x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n,\\
&=10\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n+2}+2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^n+90\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n+2}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^n+160\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+2}+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n,\\
&=10\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n+2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^n+90\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^n+160\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$= 10\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n + 90\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n + 160\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(10\,(n-2)(n-3) + 90\,n - 20\right)a_{n-2} + \left(2\,(n-1)n - 2\,n + 2\right)a_n\right)x^n + (2\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (10\,(n-2)(n-3)+90\,n-20)\,a_{n-2} + (2\,(n-1)n-2\,n+2)\,a_n = 0, \\ 2\,a_0 = 0, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $10\,(n-2)(n-3)+90\,n-20 = 10\,(n+2)^2$ et $2\,(n-1)n-2\,n+2 = 2\,(n-1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{5\,(n+4)^2}{(n+1)^2}a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 0. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{5\,(2\,k+5)^2}{4\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{5\,(2\,k+5)^2}{4\,(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{5\,(2\,k+5)^2}{4\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -5, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = (-5)^n\,a_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+5)^2}{4\,(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+5)^2}{4\,(k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+5)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)} \\ &= \frac{1}{2^{2\,n}}\frac{\prod_{k=2}^{n+1}\left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)} \\ &= \frac{2^{-4\,n-4}\,(2\,n+4)!^2}{9\,(n+2)^2(n+1)^2n!^4}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-4n-4}(-5)^n a_1 (2n+4)!^2}{9(n+2)^2(n+1)^2 n!^4}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{5(n+4)^2|z|^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 5|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{5}}$, alors $5|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{5}}$, alors $5|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{5}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{5}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{5}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{5}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\frac{1}{9} a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-4n-4}(-5)^n (2n+4)!^2}{(n+2)^2(n+1)^2 n!^4} x^{2n+1}.$$

Corrigé 84. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - x\right) S''(x) + (6x-1) S'(x) + 6S(x)\\
&= \left(x^2 - x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (6x-1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 6x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1}x^n + 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left((n-1)n + 6\,n + 6\right)a_n + \left(-(n+1)n - n - 1\right)a_{n+1}\right)x^n.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left((n-1)n + 6\,n + 6\right)a_n + \left(-(n+1)n - n - 1\right)a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $(n-1)n+6\,n+6 = (n+3)(n+2)$ et $-(n+1)n-n-1 = -(n+1)^2$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+3)(n+2)}{(n+1)^2} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+3)(k+2)}{(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)(k+2)}{(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)(k+2)}{(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)(k+2)}{(k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2}(n+2)(n+1)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(n+2)(n+1)^2
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2}\,a_0(n+2)(n+1)^2. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+3)(n+2)|z|}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)^2 x^n.$$

Corrigé 85. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-60x^2 S''(x) - 60x S'(x) + (4x+15)\, S(x)\\
&= -60x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 60x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (4x+15) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -60x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 60x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -60 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - 60 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -60 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - 60 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -60 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - 60 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(4a_{n-1} + (-60\,(n-1)n - 60\,n + 15)\, a_n\right) x^n + (15\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 4a_{n-1} + (-60\,(n-1)n - 60\,n + 15)\, a_n &= 0,\\ \hfill 15\, a_0 &= 30, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $4 = 4$ et $-60\,(n-1)n - 60\,n + 15 = -15\,(2\,n+1)(2\,n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{4}{15\,(2\,n+3)(2\,n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4}{15\,(2\,k+3)(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4}{15\,(2\,k+3)(2\,k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4}{15\,(2\,k+3)(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{4}{15}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{4}{15}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2\,k+3)(2\,k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2\,k+3)(2\,k+1)} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{2\,n+2} (2\,n+1)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4^n 2^{2\,n+3} (2\,n+1)\,(n+1)!^2}{15^n\,(2\,n+2)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{4\,|z|}{15\,(2\,n+3)(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{15\,n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \,]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^{2\,n+2} (2\,n+1)\,(n+1)!^2}{15^n\,(2\,n+2)!^2} x^n.$$

Corrigé 86. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-82x^2 S''(x) - \left(3x^2+205x\right) S'(x) + (-3x+82)\, S(x)\\
&= -82x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(3x^2+205x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-3x+82) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -82x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 3x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 205x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 82 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -82 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 205 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 82 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -82 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 205 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 82 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -82 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 205 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 82 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-3\, n a_{n-1} + (-82\,(n-1)n - 205\, n + 82)\, a_n\right) x^n + (82\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad -3\, n a_{n-1} + (-82\,(n-1)n - 205\, n + 82)\, a_n &= 0,\\ 82\, a_0 &= 82, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-82\,(n-1)n - 205\,n + 82 = -41\,(2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{3\,(n+1)}{41\,(2\,n+1)(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{3\,(k+1)}{41\,(2\,k+1)(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(k+1)}{41\,(2\,k+1)(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(k+1)}{41\,(2\,k+1)(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par

$-\frac{3}{41}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(-\dfrac{3}{41}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+3)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+3)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+3)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{n+1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{n+1}(n-1)n\,(n-2)!}{(n+2)(n+1)\,(2\,n)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n-1)n\,(n-2)!}{41^n(n+2)(n+1)\,(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,(n+1)|z|}{41\,(2\,n+1)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|}{82\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-3)^n\,(n-1)n\,(n-2)!}{41^n(n+2)(n+1)\,(2\,n)!}x^n.$$

Corrigé 87. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(4x^2-2x\right)S''(x)+(28x-1)\,S'(x)+32S(x)\\
&=\left(4x^2-2x\right)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+(28x-1)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+32\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=4x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+28x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+32\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n}-2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+28\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+32\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n}-2\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n}+28\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n}+32\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=4\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n}+28\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n}+32\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(4\,(n-1)n+28\,n+32\right)a_n+\left(-2\,(n+1)n-n-1\right)a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(4\,(n-1)n+28\,n+32\right)a_n+\left(-2\,(n+1)n-n-1\right)a_{n+1} \;=\; 0,$$

Après factorisation (on a en effet $4\,(n-1)n+28\,n+32 = 4\,(n+4)(n+2)$ et $-2\,(n+1)n-n-1 = -(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1}=\frac{4\,(n+4)(n+2)}{(2\,n+1)(n+1)}a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{4\,(k+4)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{4\,(k+4)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{4\,(k+4)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 4^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+4)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+4)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\,n + \frac{1}{6}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n+2} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n-1}(n+3)(n+2)\,(n+1)!^2}{3\,(2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4^n 2^{n-1} a_0 (n+3)(n+2)\,(n+1)!^2}{3\,(2\,n)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,(n+4)(n+2)|z|}{(2\,n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{6}\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^n (n+3)(n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 88. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}&\left(4x^2 - 2x\right) S''(x) + (14x-3)\,S'(x) + 4S(x)\\ &= \left(4x^2 - 2x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (14x-3) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 2x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 14x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1} + 14\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n} + 14\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n} + 14\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(4\,(n-1)n + 14\,n + 4\right)a_n + \left(-2\,(n+1)n - 3\,n - 3\right)a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(4\,(n-1)n + 14\,n + 4\right)a_n + \left(-2\,(n+1)n - 3\,n - 3\right)a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation (on a en effet $4\,(n-1)n + 14\,n + 4 = 2\,(2\,n+1)(n+2)$ et $-2\,(n+1)n - 3\,n - 3 = -(2\,n+3)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,(2\,n+1)(n+2)}{(2\,n+3)(n+1)}a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \left(\frac{n+1}{2\,n+1}\right)\\
&= \frac{n+1}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n a_0(n+1)}{2\,n+1}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(2\,n+1)(n+2)|z|}{(2\,n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n+1)}{2\,n+1} x^n.$$

Corrigé 89. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^3 - 2x^2\right) S''(x) + \left(6x^2 - 5x\right) S'(x) + (2x-1)\, S(x)\\
&= \left(2x^3 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(6x^2 - 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (2x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 6x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\,(n-1)(n-2) + 6\,n - 4a_{n-1} + (-2\,(n-1)n - 5\,n - 1)\,a_n\right) x^n + (-a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 2\,(n-1)(n-2) + 6\,n - 4a_{n-1} + (-2\,(n-1)n - 5\,n - 1)\,a_n &= 0,\\ -a_0 &= 1, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)(n-2) + 6\,n - 4 = 2\,n^2$ et $-2\,(n-1)n - 5\,n - 1 = -(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,(n+1)^2}{(2\,n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{n+1} n!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^{2\,n+1} n!^2}{(2\,n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(n+1)^2 |z|}{(2\,n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1} n!^2}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 90. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&8xS''(x) + (2x+4)\,S'(x) + S(x)\\
&= 8x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2x+4)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 8x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 8\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 8\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 8\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2\,n+1)\,a_n + (8\,(n+1)n + 4\,n + 4)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2\,n+1)\,a_n + (8\,(n+1)n + 4\,n + 4)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $8\,(n+1)n + 4\,n + 4 = 4\,(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4\,(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{1}{4\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{4}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} = \frac{1}{n!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n a_0}{4^n n!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{4\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{4\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} x^n.$$

Corrigé 91. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 + 2x^2\right) S''(x) + \left(-3x^3 + 4x\right) S'(x) - 4S(x)\\
&= \left(-x^4 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-3x^3 + 4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 3\,n + 6 \right) a_{n-2} + \left(2\,(n-1)n + 4\,n - 4 \right) a_n \right) x^n + \left(-4\,a_0 \right).$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 3\,n + 6 \right) a_{n-2} + \left(2\,(n-1)n + 4\,n - 4 \right) a_n & = & 0, \\ -4\,a_0 & = & -8, \end{array} \right.$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-2)(n-3)-3\,n+6 = -(n-2)n$ et $2\,(n-1)n+4\,n-4 = 2\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{(n+2)n}{2\,(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 2 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(2\,k+5)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(2\,k+5)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(2\,k+5)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{2\,(2\,k+5)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{2\,(2\,k+5)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1) \prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1) \prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1) \prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1) \prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{3}{(2\,n+3)^2(2\,n+1)} \right) \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} \\
&= \frac{3 \cdot 2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{3\cdot 2^{-3\,n-1}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2},\quad a_{2n+1} = \frac{3\cdot 2^{-3\,n-2}a_1\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0=2$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+2)n|z|^2}{2\,(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z|<\sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z|>\sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant\sqrt{2}$ et $R\leqslant\sqrt{2}$, c'est-à-dire : $R=\sqrt{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6+3\,a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-3\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 92. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 9
est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^3-2x^2\right) S''(x) - \left(7x^2+5x\right) S'(x) + (-3x+2)\, S(x) \\
&= \left(-2x^3-2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(7x^2+5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-3x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 7x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-1)(n-2) - 7\,n + 4\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n + 2\right) a_n\right) x^n + (2\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(-2\,(n-1)(n-2) - 7\,n + 4\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n + 2\right) a_n = 0, \\ 2\,a_0 = 2, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-2\,(n-1)(n-2) - 7\,n + 4 = -(2\,n+1)n$ et $-2\,(n-1)n - 5\,n + 2 = -(2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(2\,n+3)(n+1)}{(2\,n+1)(n+3)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)} \right)$$
$$= \frac{2\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-1)^n\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{(2\,n+3)(n+1)|z|}{(2\,n+1)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)} x^n.$$

Corrigé 93. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 10 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - 2x^2\right) S''(x) + \left(-6x^3 + 2x\right) S'(x) - \left(6x^2 + 2\right) S(x) \\
&= \left(-x^4 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-6x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(6x^2 + 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 6\right) a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n + 2\,n - 2\right) a_n\right) x^n + \left(-2\,a_0\right).$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 6\right) a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n + 2\,n - 2\right) a_n & = \quad 0, \\ -2\,a_0 & = \quad 2, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 6\,n + 6 = -(n+1)n$ et $-2\,(n-1)n + 2\,n - 2 = -2\,(n-1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+3)(n+2)}{2\,(n+1)^2} a_n, \qquad \text{et : } \; a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+1)^2\right)} \\ &= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+1)^2\right)} \\ &= 2^n \left((2\,n+1)^2\right) \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\ &= \frac{2^{2\,n+1}(2\,n+1)^2(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n a_1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left((n+1)^2\right) \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{2^{-2n-1} (2n+2)!}{n!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = -\frac{2^{n+1} (-1)^n (2n+1)^2 (n+1) n!^2}{(2n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-3n-1} (-1)^n a_1 (2n+2)!}{n!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2n+2} z^{2n+2}}{a_{2n} z^{2n}} \right| = \frac{(n+3)(n+2)|z|^2}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{2}$ et $R \leqslant \sqrt{2}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} (-1)^n (2n+1)^2 (n+1) n!^2}{(2n+2)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-3n-1} (-1)^n (2n+2)!}{n!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 94. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 10

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-5x^2S''(x)+\left(32x^3-25x\right)S'(x)+\left(96x^2-20\right)S(x)\\
&=-5x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(32x^3-25x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+\left(96x^2-20\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-5x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+32x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-25x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+96x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n-20\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+32\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2}-25\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+96\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}-20\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+32\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}-25\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+96\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}-20\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-5\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+32\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}-25\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}+96\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}-20\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(32\,n+32\right)a_{n-2}+\left(-5\,(n-1)n-25\,n-20\right)a_n\right)x^n+\left(-45\,a_1x-20\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (32\,n+32)\,a_{n-2}+(-5\,(n-1)n-25\,n-20)\,a_n &=& 0,\\
-20\,a_0 &=& -20,\\
-45\,a_1 &=& 45,
\end{array}\right.$$

Après factorisation (on a en effet $-5\,(n-1)n-25\,n-20=-5\,(n+2)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2}=\frac{32\,(n+3)}{5\,(n+4)^2}a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0=1, \quad a_1=-1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \qquad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{8\,(2\,k+3)}{5\,(k+2)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{8\,(2\,k+3)}{5\,(k+2)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{8\,(2\,k+3)}{5\,(k+2)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{32}{5}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=\left(\frac{32}{5}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+3}{4\,(k+2)^2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+3}{4\,(k+2)^2}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} \left((k+1)^2\right)}$$
$$= \frac{2^{-3\,n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)!^3}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = -\frac{32^n}{5^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+5)^2\right)}$$
$$= 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} \left((2\,k+1)^2\right)}$$
$$= \frac{9 \cdot 2^{3\,n+4} (n+2)^2\,(n+1)!^3}{(2\,n+4)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{32^n 2^{-3\,n-1}\,(2\,n+2)!}{5^n\,(n+1)!^3}, \quad a_{2n+1} = -\frac{9 \cdot 32^n 2^{3\,n+4} (n+2)^2\,(n+1)!^3}{5^n\,(2\,n+4)!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}\, z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{32\,(n+3)|z|^2}{5\,(n+4)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{32\,|z|^2}{5\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 9 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{32^n 2^{-3\,n-1}\,(2\,n+2)!}{5^n\,(n+1)!^3} x^{2n} - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{32^n 2^{3\,n+4} (n+2)^2\,(n+1)!^3}{5^n\,(2\,n+4)!^2} x^{2n+1}.$$

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 95. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 10 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&14x^2 S''(x) - \left(4x^3 + 14x\right) S'(x) + \left(-8x^2 + 14\right) S(x) \\
&= 14x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(4x^3 + 14x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-8x^2 + 14\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 14x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 14x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 8x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 14 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 14 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 14 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 14 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 14 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 14 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-4\, n a_{n-2} + (14\,(n-1)n - 14\,n + 14)\, a_n\right) x^n + (14\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad -4\, n a_{n-2} + (14\,(n-1)n - 14\,n + 14)\, a_n = 0, \\ 14\, a_0 = 0, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $14\,(n-1)n - 14\,n + 14 = 14\,(n-1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2\,(n+2)}{7\,(n+1)^2} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 0. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{2\,k+3}{14\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{14\,(k+1)^2}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{14\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier).

Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{2}{7}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n+1} = \left(\frac{2}{7}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{4\,(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{4\,(k+1)^2} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} = \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} = \frac{2^{-3\,n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^3}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-2\,n-1} a_1\,(2\,n+2)!}{7^n (n+1)n!^3}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,(n+2)|z|^2}{7\,(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{7\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-1}\,(2\,n+2)!}{7^n (n+1)n!^3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 96. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 10

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-4x^3-760x^2\right)S''(x)-\left(12x^2+2660x\right)S'(x)-(3x+760)\,S(x)\\
&=\left(-4x^3-760x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-\left(12x^2+2660x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-(3x+760)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-4x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-760x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-12x^2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-2660x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n-760\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&=-4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+1}-760\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n-12\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1}-2660\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n-3\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1}-760\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-4\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n-760\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n-12\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-2660\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n-3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n-760\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-4\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n-760\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n-12\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-2660\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n-3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n-760\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(-4\,(n-1)(n-2)-12\,n+9\right)a_{n-1}+\left(-760\,(n-1)n-2660\,n-760\right)a_n\right)x^n+\left(-760\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left(-4\,(n-1)(n-2)-12\,n+9\right)a_{n-1}+\left(-760\,(n-1)n-2660\,n-760\right)a_n &= 0,\\ -760\,a_0 &= 1520,\end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-4\,(n-1)(n-2)-12\,n+9=-(2\,n+1)(2\,n-1)$ et $-760\,(n-1)n-2660\,n-760=-380\,(2\,n+1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=-\frac{2\,n+1}{380\,(n+3)}a_n,\qquad \text{et :}\quad a_0=-2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=-\frac{2\,k+1}{380\,(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{380\,(k+3)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{380\,(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{380}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\left(-\frac{1}{380}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{k+3}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)}$$
$$= \frac{2^{-n+1}\,(2\,n)!}{(n+2)(n+1)n!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^{-n+2}\,(-1)^n\,(2\,n)!}{380^n (n+2)(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{(2\,n+1)|z|}{380\,(n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{190}\,|z| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{190}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 190$, alors $\frac{1}{190}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 190$, alors $\frac{1}{190}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 190$ et $R \leqslant 190$, c'est-à-dire : $R = 190$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-190{,}190[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 190, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{380^n 2^n (n+2)(n+1)n!^2} x^n.$$

Corrigé 97. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 10 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(-11x^4 + x^2\right) S''(x) + \left(-77x^3 + 3x\right) S'(x) - 99x^2 S(x)$$
$$= \left(-11x^4 + x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-77x^3 + 3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 99x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -11x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 77x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 99x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -11 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 77 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 99 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},$$

$$= -11 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 77 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 99 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,$$

$$= -11 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 77 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 99 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-11\,(n-2)(n-3) - 77\,n + 55\right) a_{n-2} + \left((n-1)n + 3\,n\right) a_n \right) x^n + (3\,a_1 x)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(-11\,(n-2)(n-3) - 77\,n + 55\right) a_{n-2} + \left((n-1)n + 3\,n\right) a_n & = & 0, \\ 3\,a_1 & = & 6, \end{cases}$$

Après factorisation (on a en effet $-11\,(n-2)(n-3) - 77\,n + 55 = -11\,(n+1)^2$ et $(n-1)n + 3\,n = (n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{11\,(n+3)^2}{(n+4)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{11\,(2\,k+3)^2}{4\,(k+2)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{11\,(2\,k+3)^2}{4\,(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{11\,(2\,k+3)^2}{4\,(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 11, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 11^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)^2}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)^2}{4\,(k+2)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+2)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\ &= 2^{2\,n} \frac{\prod_{k=1}^{n} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{4\,n+4} (2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{(2\,n+4)!^2} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 2\cdot 11^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\ &= 2^{2\,n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\ &= \frac{3\cdot 2^{4\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{(2\,n+4)!^2} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{3\cdot 11^n 2^{4\,n+4}a_0(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{(2\,n+4)!^2},\quad a_{2n+1} = \frac{3\cdot 11^n 2^{4\,n+5}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{(2\,n+4)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{11\,(n+3)^2|z|^2}{(n+4)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 11\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 11\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{11}}$, alors $11|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{11}}$, alors $11|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{11}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{11}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{11}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{11}}, \sqrt{\frac{1}{11}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{11}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{11^n 2^{4\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{(2\,n+4)!^2}x^{2n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{11^n 2^{4\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{(2\,n+4)!^2}x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 98. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 10 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^3 - 2x^2\right) S''(x) - \left(8x^2 + 3x\right) S'(x) + (-4x+1)\, S(x)\\
&= \left(-2x^3 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(8x^2 + 3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-4x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 8x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-1)(n-2) - 8\,n + 4\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 3\,n + 1\right) a_n\right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (-2\,(n-1)(n-2) - 8\,n + 4)\, a_{n-1} + (-2\,(n-1)n - 3\,n + 1)\, a_n = 0,\\ a_0 = -1, \end{cases}$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)(n-2) - 8\,n + 4 = -2\,(n+1)n$ et $-2\,(n-1)n - 3\,n + 1 = -(2\,n-1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(n+1)}{2\,n+1} a_n, \quad \text{et : } a_0 = -1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(k+1)}{2\,k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)}{2\,k+1}, \quad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-2)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{k+1}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{2\,k+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} = \frac{2^n n!^2}{(2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^n\,(-2)^n\, n!^2}{(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2\,(n+1)|z|}{2\,n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \,]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-2)^n\, n!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 99. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ← page 10
est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(x^2 - x\right) S''(x) + (5x - 2)\, S'(x) + 4S(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(x^2 - x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (5x-2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left((n-1)n + 5\,n + 4\right) a_n + \left(-(n+1)n - 2\,n - 2\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left((n-1)n + 5\,n + 4\right) a_n + \left(-(n+1)n - 2\,n - 2\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,
$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n + 5\,n + 4 = (n+2)^2$ et $-(n+1)n - 2\,n - 2 = -(n+2)(n+1)$ pour tout entier n)

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n. \tag{$*$}
$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{k+1}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1},
$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= (n+1) \\
&= n+1
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_0(n+1). \tag{$\dagger$}
$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+2)|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} n + 1 x^n.$$

Corrigé 100. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier : ← page 10

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&3x^2 S''(x) + \left(-6x^3 + 6x\right) S'(x) - 18x^2 S(x)\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-6x^3 + 6x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 18x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 18x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 18 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 18 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 18 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-6\,n - 6\right) a_{n-2} + \left(3\,(n-1)n + 6\,n\right) a_n\right) x^n + \left(6\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(-6\,n - 6\right) a_{n-2} + \left(3\,(n-1)n + 6\,n\right) a_n & = & 0,\\
6\,a_1 & = & 6,
\end{array}\right.$$

Après factorisation et simplification (on a en effet $3\,(n-1)n + 6\,n = 3\,(n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$, on obtient la relation plus joliment écrite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n, \quad \text{et :} \quad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Déterminons les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{1}{k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 2^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(k+1)} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 2^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{a_0}{n!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

Vérifions que réciproquement, cela définit bien des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,|z|^2}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme ci-dessus), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.