Solutions développables en série entière d'une équation différentielle (guidé)

Un exercice incontournable : chercher les solutions d'une équation différentielle qui sont développables en série entière en 0. J'en parle très longuement dans le document *Méthodes* associé (section 2.3).

Commentaire sur la programmation du corrigé. Lorsque la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est d'ordre 2, j'ai un certain nombre de soucis de programmation que je ne parviens pas à résoudre. Par exemple, si $a_0 = 0$, mon programme refuse de remarquer que $a_{2n} = 0$ par récurrence immédiate (et il fait comme si a_{2n} était non nul dans la présentation des solutions), quand bien même j'ai une boucle supposée le faire. Je n'ai pas eu le courage de trouver comment corriger ce problème et d'autres du même acabit. Lisez avec prudence la résolution dans ces cas-là.

Commentaire sur la rédaction de la deuxième question. Pour déterminer une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, j'ai opté pour une rédaction optimale du point de vue de la programmation, mais qui n'est pas la plus naturelle pour l'être humain (notamment, ce corrigé ne remarque pas quand des termes du numérateur et du dénominateur se télescopent, ou bien il conserve des facteurs 2 constants dans le produit pour des raisons bizarres). Pour comprendre comment en arriver à la forme explicite de la suite, vous lirez de précieux conseils dans le document *Méthodes*, *Relations de récurrence dépendant de n (explicitation)*. Le plus visuel reste de réitérer la relation de récurrence, pour parvenir de a_n à a_0, en écrivant informellement le produit (avec des points de suspension), et en observant les simplifications qui apparaissent (ou les produits remarquables : factorielles, produits des entiers pairs ou impairs...). Je vous recommande très chaudement de trouver une façon de raisonner et rédiger qui vous convient, au lieu de mécaniquement imiter cette correction automatisée.

Commentaire sur la résolution de la troisième question. Il peut arriver que vous tombiez sur une série entière usuelle. Auquel cas, il est inutile de recalculer son rayon de convergence. Je le fais systématiquement parce que je n'ai pas « appris » à mon programme à reconnaître les séries entières usuelles.

Exercice 1. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 32

$$\forall x \in I, \quad 2x^2 y''(x) + \left(4x^2 + 5x\right) y'(x) + (4x+1)\, y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{4\,(n+1)}{(2\,n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 33

$$\forall x \in I, \quad 2x^2 y''(x) + \left(9x^3 + 6x\right) y'(x) + 18x^2 y(x) = 12x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{9}{2\,(n+4)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 35

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^3 - 2x^2\right) y''(x) - \left(8x^2 + 3x\right) y'(x) + (-4x + 1)\, y(x) = 1, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(n+1)}{2\,n+1} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 37

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 - 36x^2\right) y''(x) + \left(4x^3 - 108x\right) y'(x) + 2x^2 y(x) = -216x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{36\,(n+4)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 5. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 39

$$\forall x \in I, \quad -7x^2 y''(x) + \left(3x^3 + 7x\right) y'(x) + \left(6x^2 - 7\right) y(x) = -14, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{3\,(n+2)}{7\,(n+1)^2} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 6. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 41

$$\forall x \in I, \quad \left(-45x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(225x^3 + 3x\right) y'(x) - 180x^2 y(x) = -6x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{45\,(n+2)}{n+4} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 7. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 43

$$\forall x \in I, \quad 6x^2 y''(x) + \left(8x^2 + 9x\right) y'(x) + (16x - 3)\, y(x) = -3, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{8}{3\,(2\,n+1)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 8. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 45

$$\forall x \in I, \quad \left(x^3 - 2x^2\right) y''(x) + \left(5x^2 - 9x\right) y'(x) + (3x - 3)\, y(x) = 3, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+3)(n+1)}{(2\,n+3)(n+4)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 9. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 47

$$\forall x \in I, \quad 4x^2 y''(x) + \left(x^2 + 16x\right) y'(x) + (2x + 8)\, y(x) = -16, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4\,(n+3)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 10. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 48

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^2 + 2x\right) y''(x) + (7x+4)\, y'(x) + 2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,n+1}{2\,(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 11. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 50

$$\forall x \in I, \quad -4xy''(x) - (x+4)\, y'(x) - y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4\,(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 12. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 51

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 + 5x^2\right) y''(x) + \left(5x^3 + 15x\right) y'(x) + 3x^2 y(x) = -15x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+3)(n+1)}{5\,(n+4)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 13. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 54

$$\forall x \in I, \quad \left(-20x^2 - 3x\right) y''(x) - (120x + 9)\, y'(x) - 80y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{20\,(n+4)}{3\,(n+3)} a_n. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 14. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 55

$$\forall x \in I, \quad \left(3x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(15x^3 + 2x\right) y'(x) + \left(12x^2 - 2\right) y(x) = -2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3\,(n+2)^2}{(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 15. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 58

$$\forall x \in I, \quad \left(-4x^3 - 2x^2\right) y''(x) - \left(18x^2 + 7x\right) y'(x) + (-6x + 3)\, y(x) = 3, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(n+3)}{n+4} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 16. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 59

$$\forall x \in I, \quad \left(18x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(117x^2 + 5x\right) y'(x) + (108x - 2)\, y(x) = 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{9\,(2\,n+3)(n+4)}{(2\,n+1)(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 17. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 61
$$\forall x \in I, \quad \left(-x^3 - 4x^2\right) y''(x) - \left(6x^2 + 14x\right) y'(x) + (-6x + 6)\, y(x) = 6, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(n+3)(n+2)}{2\,(2\,n+1)(n+4)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 18. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 63
$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(-4x^3 + 2x\right) y'(x) - \left(8x^2 + 2\right) y(x) = -4, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{4\,(n+2)}{(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 19. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 65
$$\forall x \in I, \quad -4x^2 y''(x) - \left(x^2 + 10x\right) y'(x) - (3x + 2)\, y(x) = -2, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n+3}{2\,(2\,n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 20. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 67

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 2x^2\right) y''(x) - \left(2x^3 + 2x\right) y'(x) + 2y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n}{2\,(n+3)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 21. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 69

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^2 - 46x\right) y''(x) + (8x - 23)\, y'(x) + 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,(n+2)}{23\,(2\,n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 22. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 71

$$\forall x \in I, \quad \left(x^3 - 10x^2\right) y''(x) + \left(7x^2 - 45x\right) y'(x) + (9x - 15)\, y(x) = 15, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+3)^2}{5\,(2\,n+3)(n+4)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 23. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 73

$$\forall x \in I, \quad 3x^2 y''(x) + \left(8x^3 + 3x\right) y'(x) + \left(16x^2 - 3\right) y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{8\,(n+2)}{3\,(n+3)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 0. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 24. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 74

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(7x^3 + 2x\right) y'(x) + 8x^2 y(x) = 4x, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+4}{n+3} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 2. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 25. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 77

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(-5x^3 + x\right) y'(x) - \left(3x^2 + 1\right) y(x) = 1, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 1 a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 26. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 78

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^3 - 2x^2\right) y''(x) - \left(9x^2 + 9x\right) y'(x) - (3x + 3)\, y(x) = 6, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(2\,n+1)(n+3)}{(2\,n+3)(n+4)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 27. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 79
$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(7x^2 + 3x\right) y'(x) + (14x+1)\, y(x) = 1, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{7}{n+2} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 28. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 81
$$\forall x \in I, \quad \left(2x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(7x^2 + 5x\right) y'(x) + (3x-2)\, y(x) = -2, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(2\,n+3)(n+1)}{(2\,n+1)(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 29. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 83
$$\forall x \in I, \quad 2x^2 y''(x) + 3x^3 y'(x) + 3x^2 y(x) = 0, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3}{2\,(n+2)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 30. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 84

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^2 - x\right) y''(x) - (9x+2)\, y'(x) - 6y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,n+3}{n+1} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 31. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 86

$$\forall x \in I, \quad \left(-6x^2 + 2x\right) y''(x) + (-33x+6)\, y'(x) - 27y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{3\,(2\,n+3)}{2\,(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 32. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 88

$$\forall x \in I, \quad 3x^2 y''(x) + \left(6x^3 + 6x\right) y'(x) - 6y(x) = 12, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2\,n}{(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 33. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 90

$$\forall x \in I, \quad 2x^2 y''(x) + 8xy'(x) + \left(6x^2 + 4\right) y(x) = -24x - 4, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3}{(n+4)(n+3)} a_n, \quad \text{et : } \; a_0 = -1, \quad a_1 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 34. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 92

$$\forall x \in I, \quad -xy''(x) - (3x+3)\, y'(x) - 3y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{3}{n+3} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 35. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 93

$$\forall x \in I, \quad xy''(x) + (-4x+4)\, y'(x) - 2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,(2\,n+1)}{(n+4)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 36. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 95

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(32x^2 + 3x\right) y'(x) + (64x+1)\, y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{32}{n+2} a_n, \qquad \text{et : } \; a_0 = 2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 37. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 97

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) + \left(4x^3 - 3x\right) y'(x) + \left(12x^2 - 1\right) y(x) = -8x + 1, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{4}{n+3} a_n, \qquad \text{et : } \; a_0 = -1, \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 38. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 99

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + \left(-9x^3 + 4x\right) y'(x) + \left(-36x^2 + 2\right) y(x) = 4, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{9}{n+3} a_n, \qquad \text{et : } \; a_0 = 2, \quad a_1 = 0. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 39. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 101

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - 5x^3 y'(x) - 15x^2 y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{5\,(n+3)}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 40. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 103

$$\forall x \in I, \quad x^2y''(x) + \left(2x^3 + x\right) y'(x) + 6x^2y(x) = x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2\,(n+3)}{(n+2)^2}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 41. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 105

$$\forall x \in I, \quad 6xy''(x) + (x + 12)\, y'(x) + 2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{6\,(n+1)}a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 42. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 106

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - x^2\right) y''(x) + \left(-3x^3 + x\right) y'(x) - \left(x^2 + 1\right) y(x) = 1, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -1a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 43. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 107

$$\forall x \in I, \quad \left(4x^4 - x^2\right) y''(x) + \left(20x^3 - x\right) y'(x) + 12x^2 y(x) = -2x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{4\,(n+3)(n+1)}{(n+2)^2} a_n, \qquad \text{et} : \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 44. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 110

$$\forall x \in I, \quad \left(6x^4 - 6x^2\right) y''(x) + 18x^3 y'(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n}{n+1} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 45. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 112

$$\forall x \in I, \quad \left(3x^2 + x\right) y''(x) + (9x+3)\, y'(x) + 3y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{3\,(n+1)}{n+3} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 46. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 113

$$\forall x \in I, \quad -xy''(x) + (x-3)\, y'(x) + 2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+3)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 47. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 115
$$\forall x \in I, \quad 4x^2 y''(x) + \left(72x^3 + 12x\right) y'(x) + 72x^2 y(x) = -12x, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{18\,(n+1)}{(n+4)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 48. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 117
$$\forall x \in I, \quad \left(9x^4 - 4x^2\right) y''(x) + \left(72x^3 - 8x\right) y'(x) + \left(108x^2 + 8\right) y(x) = -16, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{9\,(n+3)}{4\,(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 49. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 119
$$\forall x \in I, \quad \left(-x^3 - 4x^2\right) y''(x) - \left(4x^2 + 10x\right) y'(x) - (2x+2)\, y(x) = 4, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n+1}{2\,(2\,n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 50. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 121

$$\forall x \in I, \quad 117x^2 y''(x) + \left(-9x^3 + 117x\right) y'(x) - 117y(x) = 234, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n}{13\,(n+3)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 51. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 123

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 + 9x^2\right) y''(x) + \left(8x^3 + 18x\right) y'(x) + \left(12x^2 - 18\right) y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+3}{9\,(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 0. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 52. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 124

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^3 + x^2\right) y''(x) + \left(-11x^2 + 5x\right) y'(x) + (-4x + 3)\, y(x) = -3, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2\,n+1}{n+2} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 53. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 126

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4+x^2\right) y''(x) + \left(-7x^3+4x\right) y'(x) + \left(-8x^2+2\right) y(x) = -12x-2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1, \quad a_1 = -2. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 54. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 128

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - \left(3x^3+3x\right) y'(x) - \left(9x^2+1\right) y(x) = -4x+1, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3}{n+3} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1, \quad a_1 = 1. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 55. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 130

$$\forall x \in I, \quad -2x^2 y''(x) - \left(4x^3+4x\right) y'(x) + 4y(x) = 4, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2\,n}{(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 56. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 132

$$\forall x \in I, \quad \left(-8x^3+2x^2\right) y''(x) + \left(-28x^2+9x\right) y'(x) + (-8x+3)\, y(x) = -6, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{4\,(2\,n+1)(n+2)}{(2\,n+3)(n+4)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 57. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 134

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - \left(3x^3 + 2x\right) y'(x) - 9x^2 y(x) = 2x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3}{n+2} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 58. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 136

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(6x^3 + 2x\right) y'(x) + \left(-4x^2 + 2\right) y(x) = 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -1 a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 59. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 137

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - 4xy'(x) + \left(48x^2 - 2\right) y(x) = -12x - 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{48}{(n+4)(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 60. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 139

$$\forall x \in I, \quad -74x^2y''(x) - 148xy'(x) + \left(16x^2 + 148\right) y(x) = 296, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{8}{37\,(n+4)(n+1)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 61. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 141

$$\forall x \in I, \quad \left(-8x^2 + x\right) y''(x) + (-20x + 1)\, y'(x) - 4y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{4\,(2\,n+1)}{n+1} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 62. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 143

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^2 - 3x\right) y''(x) - (9x + 12)\, y'(x) - 16y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n+4}{3\,(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 63. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 144

$$\forall x \in I, \quad \left(23x^4 - x^2\right) y''(x) + 92x^3 y'(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{23\,(n+3)n}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 64. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 146

$$\forall x \in I, \quad \left(-3x^2 + x\right) y''(x) + (-12x + 3)\, y'(x) - 6y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{3\,(n+2)}{n+3} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 65. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 148

$$\forall x \in I, \quad 2x^2 y''(x) + \left(12x^3 + 2x\right) y'(x) + 12x^2 y(x) = -2x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{6\,(n+1)}{(n+2)^2} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = -1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 66. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 150

$$\forall x \in I, \quad -10xy''(x) + (3x - 30)\, y'(x) + 3y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{3}{10\,(n+3)} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 67. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 151
$$\forall x \in I, \quad xy''(x) + (2x+1)\,y'(x) + y(x) = 0, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,n+1}{(n+1)^2} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 68. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 153
$$\forall x \in I, \quad \left(22x^4 + x^2\right) y''(x) + 176x^3 y'(x) + 264x^2 y(x) = 0, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{22\,(n+4)(n+3)}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 69. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 155
$$\forall x \in I, \quad \left(x^2 + 8x\right) y''(x) + (5x+16)\,y'(x) + 3y(x) = 0, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n+3}{8\,(n+2)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
   Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 70. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 157

$$\forall x \in I, \quad -5x^2y''(x) + \left(4x^3 - 25x\right)y'(x) + \left(16x^2 - 20\right)y(x) = 90x + 20, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{4}{5\,(n+4)}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1, \quad a_1 = -2. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
   Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 71. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 159

$$\forall x \in I, \quad 58x^2y''(x) + \left(4x^2 + 87x\right)y'(x) + (8x - 29)\,y(x) = 29, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{4}{29\,(2\,n+1)}a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
   Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 72. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 161

$$\forall x \in I, \quad \left(x^2 - 2x\right)y''(x) + (4x - 3)\,y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{2\,n+3}a_n. \qquad (*)$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
   Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 73. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 162

$$\forall x \in I, \quad \left(6x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(36x^2 + 5x\right) y'(x) + (24x + 1)\, y(x) = -2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{6\,(n+4)(n+1)}{(2\,n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2. \qquad (*)$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 74. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 164

$$\forall x \in I, \quad \left(-4x^2 - x\right) y''(x) - (12x + 3)\, y'(x) - 4y(x) = 0, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{4\,(n+1)}{n+3} a_n. \qquad (*)$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 75. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 166

$$\forall x \in I, \quad -x^2 y''(x) - \left(4x^2 + 4x\right) y'(x) - (2x + 2)\, y(x) = 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(2\,n+1)}{(n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -1. \qquad (*)$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 76. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 168

$$\forall x \in I, \quad -2x^2 y''(x) - 5xy'(x) - (4x + 1)\, y(x) = 2, \qquad (E)$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{4}{(2\,n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 77. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 169

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(13x^2 + 6x\right) y'(x) + (12x + 2)\, y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(2\,n+3)(n+4)}{2\,(n+2)^2} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 78. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 171

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^3 - 2x^2\right) y''(x) - \left(5x^2 + 5x\right) y'(x) - (3x + 1)\, y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(n+3)(n+1)}{(2\,n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 79. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 173

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 40x^2\right) y''(x) - \left(6x^3 + 120x\right) y'(x) - 4x^2 y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+1}{40\,(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 0. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 80. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 175

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - 2x^2\right) y''(x) - \left(6x^3 + 2x\right) y'(x) + \left(-4x^2 + 2\right) y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+4}{2\,(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 0. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 81. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 177

$$\forall x \in I, \quad \left(16x^3 - 2x^2\right) y''(x) + \left(112x^2 - 7x\right) y'(x) + (128x + 3)\, y(x) = -3, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{16\,(n+2)}{2\,n+1} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 82. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 179

$$\forall x \in I, \quad \left(-x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(5x^3 + 4x\right) y'(x) - \left(3x^2 + 2\right) y(x) = -12x + 4, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n+1}{n+4} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2, \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 83. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 181

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^3 - 20x^2\right) y''(x) - \left(7x^2 + 70x\right) y'(x) + (-3x + 30)\, y(x) = 60, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(2\,n+3)(n+1)}{10\,(2\,n+1)(n+4)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 84. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 183

$$\forall x \in I, \quad \left(-4x^4 - x^2\right) y''(x) - \left(24x^3 + x\right) y'(x) + \left(-16x^2 + 1\right) y(x) = -2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{4\,(n+4)}{n+3} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 85. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 185

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^2 - 16x\right) y''(x) + (11x - 64)\, y'(x) + 9y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(2\,n+3)(n+3)}{16\,(n+4)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 86. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 187

$$\forall x \in I, \quad \left(2x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(6x^2 + 7x\right) y'(x) + (2x - 3)\, y(x) = 3, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(n+1)^2}{(2\,n+1)(n+4)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 87. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 189

$$\forall x \in I, \quad 22x^2 y''(x) + \left(-6x^3 + 44x\right) y'(x) - 12x^2 y(x) = 44x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{3}{11\,(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 88. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 191

$$\forall x \in I, \quad x y''(x) + (-16x + 2)\, y'(x) - 16 y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{16}{n+2} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 89. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 192

$$\forall x \in I, \quad \left(x^2 - 2x\right) y''(x) + (5x - 3)\, y'(x) + 3y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+3}{2\,n+3} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 90. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 194

$$\forall x \in I, \quad \left(8x^4 + 3x^2\right) y''(x) + \left(72x^3 + 3x\right) y'(x) + 128x^2 y(x) = -6x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{8\,(n+4)^2}{3\,(n+2)^2} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 91. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 196

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(8x^3 + 4x\right) y'(x) + \left(12x^2 + 2\right) y(x) = 6x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -1 a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 92. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 197

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 + 4x^2\right) y''(x) + \left(5x^3 + 8x\right) y'(x) - 8y(x) = 8, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{n}{4\,(n+1)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -1. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 93. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 199

$$\forall x \in I, \quad \left(x^3 + 2x^2\right) y''(x) + \left(6x^2 + 7x\right) y'(x) + (4x + 2)\, y(x) = -4, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{(n+4)(n+1)}{(2\,n+3)(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = -2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 94. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 201

$$\forall x \in I, \quad \left(3x^4 + 2x^2\right) y''(x) + \left(24x^3 + 6x\right) y'(x) + \left(36x^2 + 2\right) y(x) = -16x + 2, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3\,(n+4)}{2\,(n+3)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 95. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 203

$$\forall x \in I, \quad \left(-2x^2 + 4x\right) y''(x) + (-7x + 4)\, y'(x) - 2y(x) = 0, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(2\,n+1)(n+2)}{4\,(n+1)^2} a_n. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 96. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 205

$$\forall x \in I, \quad \left(-4x^3 - 6x^2\right) y''(x) - \left(14x^2 + 9x\right) y'(x) + (-6x + 3)\, y(x) = 3, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{2\,(2\,n+3)(n+1)}{3\,(2\,n+1)(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_0 = 1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 97. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 206
$$\forall x \in I, \quad -4x^2 y''(x) - \left(8x^3 + 12x\right) y'(x) - 16x^2 y(x) = -12x, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2}{n+4} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 1. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 98. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 208
$$\forall x \in I, \quad 7x^2 y''(x) + \left(3x^3 + 21x\right) y'(x) + 12x^2 y(x) = 42x, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{3}{7\,(n+2)} a_n, \qquad \text{et : } \quad a_1 = 2. \tag{$*$}$$
2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 99. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 210
$$\forall x \in I, \quad \left(-4x^4 + x^2\right) y''(x) - 20x^3 y'(x) = 0, \tag{E}$$
qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{4\,(n+4)n}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 100. On cherche à déterminer les solutions de cette équation différentielle : → page 213

$$\forall x \in I, \quad \left(x^4 + x^2\right) y''(x) + \left(3x^3 + 2x\right) y'(x) + x^2 y(x) = -4x, \tag{E}$$

qui sont développables en série entière en 0 (ici I est un intervalle centré en 0 et à déterminer).

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R non nul, montrer que sa somme S vérifie (E) sur $I =]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+1)^2}{(n+3)(n+2)} a_n, \qquad \text{et :} \quad a_1 = -2. \tag{$*$}$$

2. Déterminer la forme explicite des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(*)$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$, et en déduire la forme explicite des solutions de (E) développables en série entière en 0.
Il sera en général impossible d'exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Corrigé 1.

← page 1

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&2x^2S''(x)+\left(4x^2+5x\right)S'(x)+(4x+1)\,S(x)\\
&=2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(4x^2+5x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+(4x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+4x^2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+5x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+4x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+4\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1}+5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+4\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n}+5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+4\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n}+5\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}+4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(4\,na_{n-1}+\left(2\,(n-1)n+5\,n+1\right)a_n\right)x^n+(a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 4\,na_{n-1}+\left(2\,(n-1)n+5\,n+1\right)a_n = 0,\\ a_0 = 2,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)n+5\,n+1=(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=-\frac{4\,(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4\,(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4\,(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -4, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-4)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{(2\,k+3)(k+2)}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n+1} n!}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^n\,(-4)^{n+1}\,n!}{(2\,n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,(n+1)|z|}{(2\,n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-4)^n\,n!}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 2. ← page 1

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$2x^2 S''(x) + \left(9x^3 + 6x\right) S'(x) + 18x^2 S(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \left(9x^3+6x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 18x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 9x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 6x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 18x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 9\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 18\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2},\\
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 9\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 18\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n},\\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 9\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} + 18\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(9\,na_{n-2} + \left(2\,(n-1)n + 6\,n\right)a_n\right)x^n + \left(6\,a_1x\right).
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad 9\,na_{n-2} + \left(2\,(n-1)n+6\,n\right)a_n = 0,\\ 6\,a_1 = 12, \end{cases}
$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)n+6\,n = 2\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$
\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{9}{4\,(k+2)}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9}{4\,(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9}{4\,(k+2)},
$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{9}{2}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{9}{2}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+2)} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\
&= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}\\
&= \frac{3\cdot 2^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$
\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.
$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 2^{-n+1}\,(-9)^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\ &= \frac{3\cdot 2^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{12\,(-9)^n\,a_0\,(n+2)!}{(2\,n+4)!},\quad a_{2n+1} = \frac{24\,(-9)^n\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{9\,|z|^2}{2\,(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{9\,|z|^2}{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-\infty,+\infty\right[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,(-9)^n\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}x^{2n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4\,(-9)^n\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 3. ← page 2

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned} &\left(-2x^3-2x^2\right)S''(x) - \left(8x^2+3x\right)S'(x) + (-4x+1)\,S(x) \\ &= \left(-2x^3-2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(8x^2+3x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-4x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -2x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 8x^2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 3x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 4x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 8\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -2\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 8\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - 8\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-1)(n-2) - 8\,n + 4\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 3\,n + 1\right) a_n\right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$
\begin{cases}
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (-2\,(n-1)(n-2) - 8\,n + 4)\,a_{n-1} + (-2\,(n-1)n - 3\,n + 1)\,a_n = 0,\\
a_0 = 1,
\end{cases}
$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)(n-2) - 8\,n + 4 = -2\,(n+1)n$ et $-2\,(n-1)n - 3\,n + 1 = -(2\,n-1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(k+1)}{2\,k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)}{2\,k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{2\,k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}\\
&= \frac{2^n n!^2}{(2\,n)!}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n\,(-2)^n\,n!^2}{(2\,n)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(n+1)|z|}{2\,n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1{,}1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-2)^n\,n!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 4. ← page 2

1. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 - 36x^2\right) S''(x) + \left(4x^3 - 108x\right) S'(x) + 2x^2 S(x)\\
&= \left(x^4 - 36x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(4x^3 - 108x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 36x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 108x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 36 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 108 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 36 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 108 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 36 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 108 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n-2)(n-3) + 4\,n - 6\right) a_{n-2} + \left(-36\,(n-1)n - 108\,n\right) a_n\right) x^n + \left(-108\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad ((n-2)(n-3)+4\,n-6)\,a_{n-2}+(-36\,(n-1)n-108\,n)\,a_n &= 0, \\ -108\,a_1 &= -216, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-2)(n-3)+4\,n-6=(n-1)n$ et $-36\,(n-1)n-108\,n=-36\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{2\,k+1}{72\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{72\,(k+2)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{72\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{36}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=\left(\frac{1}{36}\right)^n a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}\\ &= \frac{1}{2^n}\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}\\ &= \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}(n+1)n!^2}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!}=\frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1} &= \frac{2}{36^n}\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\ &= 2^n\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^{2\,n+2}(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+4)!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{a_0\,(2\,n)!}{36^n 2^{2\,n}(n+1)n!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{3 \cdot 2^{2\,n+3}(n+2)(n+1)n!^2}{36^n\,(2\,n+4)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+1)|z|^2}{36\,(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{36}\,|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{36}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 6$, alors $\frac{1}{36}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 6$, alors $\frac{1}{36}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 6$ et $R \leqslant 6$, c'est-à-dire : $R = 6$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-6{,}6[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 6, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)!}{36^n 2^{2\,n}(n+1)n!^2}x^{2n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+2}(n+2)(n+1)n!^2}{36^n\,(2\,n+4)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 5. ← page 2

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-7x^2 S''(x) + \left(3x^3 + 7x\right) S'(x) + \left(6x^2 - 7\right) S(x) \\
&= -7x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(3x^3+7x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(6x^2-7\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -7x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 7x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 7\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -7\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 7\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$\begin{aligned}
&= -7\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 7\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + 6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n - 7\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -7\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 7\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n + 6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n - 7\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(3\,na_{n-2} + \left(-7\,(n-1)n + 7\,n - 7\right)a_n\right)x^n + (-7\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad 3\,na_{n-2} + \left(-7\,(n-1)n + 7\,n - 7\right)a_n &= 0,\\ \qquad\qquad -7\,a_0 &= -14, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-7\,(n-1)n + 7\,n - 7 = -7\,(n-1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{6\,(k+1)}{7\,(2\,k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{6\,(k+1)}{7\,(2\,k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{6\,(k+1)}{7\,(2\,k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{3}{7}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{3}{7}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)}{(2\,k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+1)}{(2\,k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+1)^2\right)}\\
&= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+1)^2\right)}\\
&= \frac{2^{3\,n} n!^3}{(2\,n)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = \frac{3^n a_1}{7^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}$$
$$= \frac{2^{-3\,n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^3}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{3^n 2^{3\,n+1} n!^3}{7^n\,(2\,n)!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{3^n 2^{-3\,n-1} a_1\,(2\,n+2)!}{7^n (n+1) n!^3}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,(n+2)|z|^2}{7\,(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{7\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{3\,n} n!^3}{7^n\,(2\,n)!^2} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{-3\,n-1}\,(2\,n+2)!}{7^n (n+1) n!^3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 6. ← page 2

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(-45x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(225x^3 + 3x\right) S'(x) - 180x^2 S(x)$$
$$= \left(-45x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(225x^3 + 3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 180x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= -45x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 225x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 180x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= -45\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 225\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 180\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},$$
$$= -45\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 225\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 180\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,$$
$$= -45\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 225\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 180\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(-45\,(n-2)(n-3) - 225\,n + 270 a_{n-2} + (-(n-1)n - 3\,n)\,a_n\right)x^n + (-3\,a_1 x).$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad -45\,(n-2)(n-3) - 225\,n + 270 a_{n-2} + (-(n-1)n - 3\,n)\,a_n &= 0,\\ -3\,a_1 &= -6,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-45\,(n-2)(n-3) - 225\,n + 270 = -45\,n^2$ et $-(n-1)n - 3\,n = -(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{45\,(k+1)}{k+2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{45\,(k+1)}{k+2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{45\,(k+1)}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -45, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-45)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k+2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k+2} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} = \left(\frac{3}{2\,n+3}\right) = \frac{3}{2\,n+3}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = 2\,(-45)^n\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}$$
$$= \left(\frac{3}{2\,n+3}\right)$$
$$= \frac{3}{2\,n+3}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{3\,(-45)^n\,a_0}{2\,n+3}, \quad a_{2n+1} = \frac{6\,(-45)^n}{2\,n+3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{45\,(n+2)|z|^2}{n+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 45\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 45\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$, alors $45|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$, alors $45|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$ et $R \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-45)^n}{2\,n+3} x^{2n} + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-45)^n}{2\,n+3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 7. ← page 3

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$6x^2 S''(x) + \left(8x^2 + 9x\right) S'(x) + (16x - 3)\,S(x)$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$\begin{aligned}
&= 6x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \left(8x^2+9x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + (16x-3)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 6x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 8x^2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 9x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 16x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 6\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1} + 9\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 6\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 8\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n} + 9\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 16\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 6\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n} + 9\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} + 16\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((8\,n+8)\,a_{n-1} + (6\,(n-1)n + 9\,n - 3)\,a_n\right)x^n + (-3\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad (8\,n+8)\,a_{n-1} + (6\,(n-1)n+9\,n-3)\,a_n &=& 0,\\ -3\,a_0 &=& -3,\end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $6\,(n-1)n+9\,n-3 = 3\,(2\,n-1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{8}{3\,(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8}{3\,(2\,k+1)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8}{3\,(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{8}{3}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{8}{3}\right)^n a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,k+1} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\ &= \frac{2^n n!}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n\,(-8)^n\,n!}{3^n\,(2\,n)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{8\,|z|}{3\,(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\,|z|}{3\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse.
En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-8)^n\,n!}{3^n\,(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 8. ← page 3

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 - 2x^2\right) S''(x) + \left(5x^2 - 9x\right) S'(x) + (3x-3)\,S(x) \\
&= \left(x^3 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(5x^2 - 9x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (3x-3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left((n-1)(n-2) + 5\,n - 2\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 9\,n - 3\right) a_n\right) x^n + \left(-3\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad ((n-1)(n-2) + 5\,n - 2)\,a_{n-1} + (-2\,(n-1)n - 9\,n - 3)\,a_n = 0, \\ -3\,a_0 = 3, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n-1)(n-2)+5\,n-2=(n+2)n$ et $-2\,(n-1)n-9\,n-3=-(2\,n+1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+4)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+4)}&=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\&=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\&=\left(\frac{3}{(n+3)^2(n+2)(n+1)}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}\\&=\frac{3\cdot 2^{n+1}(n+1)(n-1)^2(n-2)^2n^2\,(n-3)!^2}{(n+3)\,(2\,n+2)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=-\frac{3\cdot 2^{n+1}(n+1)(n-1)^2(n-2)^2n^2\,(n-3)!^2}{(n+3)\,(2\,n+2)!}.\tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|=\frac{(n+3)(n+1)|z|}{(2\,n+3)(n+4)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\,|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-2,2\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)(n-1)^2(n-2)^2 n^2\,(n-3)!^2}{(n+3)\,(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 9. ← page 3

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&4x^2 S''(x) + \left(x^2 + 16x\right) S'(x) + (2x+8)\, S(x)\\
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(x^2 + 16x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (2x+8) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 16x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)\, a_{n-1} + (4\,(n-1)n + 16\,n + 8)\, a_n\right) x^n + (8\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (n+1)\, a_{n-1} + (4\,(n-1)n + 16\,n + 8)\, a_n &= 0,\\ 8\, a_0 &= -16, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $4\,(n-1)n + 16\,n + 8 = 4\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{1}{4\,(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4\,(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4\,(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{4}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)} \\ &= \frac{2}{(n+2)!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{4^{-n+1}\,(-1)^n}{(n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{|z|}{4\,(n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|z|}{4\,n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n\,(n+2)!} x^n.$$

Corrigé 10. ← page 4

1. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^2+2x\right) S''(x) + (7x+4)\, S'(x) + 2S(x) \\
&= \left(2x^2+2x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (7x+4) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 7x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2\,(n-1)n + 7\,n + 2)\, a_n + (2\,(n+1)n + 4\,n + 4)\, a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2\,(n-1)n + 7\,n + 2)\, a_n + (2\,(n+1)n + 4\,n + 4)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)n + 7\,n + 2 = (2\,n+1)(n+2)$ et $2\,(n+1)n + 4\,n + 4 = 2\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{2\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{2\,k+1}{k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{(2\,n)!}{2^n n!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\, a_0\, (2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+1)|z|}{2\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2} x^n.$$

Corrigé 11. ← page 4

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-4xS''(x) - (x+4)\,S'(x) - S(x)\\
&= -4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (x+4)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-n-1)\,a_n + (-4\,(n+1)n - 4\,n - 4)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-n-1)\,a_n + (-4\,(n+1)n - 4\,n - 4)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-4\,(n+1)n - 4\,n - 4 = -4\,(n+1)^2$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{1}{4\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{4}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)} = \frac{1}{n!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\,a_0}{4^n n!}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{4\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{4\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty,+\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} x^n.$$

Corrigé 12. ← page 4

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :
$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :
$$\begin{aligned}
&\left(x^4+5x^2\right)S''(x) + \left(5x^3+15x\right)S'(x) + 3x^2 S(x)\\
&= \left(x^4+5x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(5x^3+15x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 15x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + 5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 15\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + 5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 15\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 5\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 15\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n-2)(n-3)+5\,n-7\right)a_{n-2} + \left(5\,(n-1)n + 15\,n\right)a_n\right)x^n + \left(15\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$
On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left((n-2)(n-3)+5\,n-7\right)a_{n-2} + \left(5\,(n-1)n+15\,n\right)a_n &=& 0,\\ 15\,a_1 &=& -15, \end{array}\right.$$
d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n-2)(n-3)+5\,n-7 = (n+1)(n-1)$ et $5\,(n-1)n + 15\,n = 5\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{20\,(k+2)(k+1)}.$$
En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{20\,(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{20\,(k+2)(k+1)},$$
expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{5}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(k+2)(k+1)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (k+1)}$$

$$= \frac{2^{-4\,n-2}(n+1)\,(2\,n+2)!^2}{(2\,n+1)\,(n+1)!^4}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = -\frac{(-1)^n}{5^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}$$

$$= 2^{2\,n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}$$

$$= \frac{3\cdot 2^{4\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{(n+1)\,(2\,n+4)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{2^{-4\,n-2}\,(-1)^n\,a_0(n+1)\,(2\,n+2)!^2}{5^n(2\,n+1)\,(n+1)!^4},\quad a_{2n+1} = -\frac{3\cdot 2^{4\,n+4}\,(-1)^n\,(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{5^n(n+1)\,(2\,n+4)!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+3)(n+1)|z|^2}{5\,(n+4)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{5}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{5}$, alors $\frac{1}{5}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{5}$, alors $\frac{1}{5}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{5}$ et $R \leqslant \sqrt{5}$, c'est-à-dire : $R=\sqrt{5}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{5},\sqrt{5}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{5}$, et c'est une solution

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-4\,n-2}\,(-1)^n\,(n+1)\,(2\,n+2)!^2}{5^n(2\,n+1)\,(n+1)!^4} x^{2n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{4\,n+4}\,(-1)^n\,(2\,n+3)(n+2)^2\,(n+1)!^4}{5^n(n+1)\,(2\,n+4)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 13. ← page 5

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-20x^2-3x\right) S''(x) - (120x+9)\,S'(x) - 80S(x)\\
&= \left(-20x^2-3x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (120x+9)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 80\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -20x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 3x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 120x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 80\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -20\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 120\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 80\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -20\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 120\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 80\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -20\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 120\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 80\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-20\,(n-1)n - 120\,n - 80\right) a_n + \left(-3\,(n+1)n - 9\,n - 9\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-20\,(n-1)n - 120\,n - 80)\,a_n + (-3\,(n+1)n - 9\,n - 9)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-20\,(n-1)n - 120\,n - 80 = -20\,(n+4)(n+1)$ et $-3\,(n+1)n - 9\,n - 9 = -3\,(n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{20\,(k+4)}{3\,(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{20\,(k+4)}{3\,(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{20\,(k+4)}{3\,(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{20}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{20}{3}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}\\ &= \frac{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}\\ &= \left(\frac{1}{3}n+1\right)\\ &= \frac{1}{3}n+1\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 3^{-n-1}\left(-20\right)^n a_0(n+3). \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{20\,(n+4)|z|}{3\,(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{20}{3}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{20}{3}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{3}{20}$, alors $\frac{20}{3}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{3}{20}$, alors $\frac{20}{3}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{3}{20}$ et $R \leqslant \frac{3}{20}$, c'est-à-dire : $R = \frac{3}{20}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{3}{20}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3}\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-20\right)^n (n+3)}{3^n} x^n.$$

Corrigé 14. ← page 5

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$\left(3x^4 + x^2\right) S''(x) + \left(15x^3 + 2x\right) S'(x) + \left(12x^2 - 2\right) S(x)$

$$= \left(3x^4+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(15x^3+2x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(12x^2-2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 3x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 15x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 15\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 3\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 15\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= 3\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 15\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(3\,(n-2)(n-3) + 15\,n - 18a_{n-2} + ((n-1)n + 2\,n - 2)\,a_n\right) x^n + (-2\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad 3\,(n-2)(n-3)+15\,n-18a_{n-2}+((n-1)n+2\,n-2)\,a_n & = & 0,\\ -2\,a_0 & = & -2,\end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $3\,(n-2)(n-3)+15\,n-18 = 3\,n^2$ et $(n-1)n+2\,n-2 = (n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{6\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{6\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+2)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{6\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-3)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\ &= 2^n\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\ &= 2^n\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{2\,n}(n-1)^2 n^2\,(n-2)!^2}{(n+1)\,(2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= (-3)^n\,a_1\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}\\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{(2\,n+3)^2}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\
&= \frac{3\cdot 2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(n+2)(n+1)n!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{2^{2\,n}\,(-3)^n\,(n-1)^2 n^2\,(n-2)!^2}{(n+1)\,(2\,n)!},\quad a_{2n+1} = -\frac{2^{-2\,n-2}\,(-3)^{n+1}\,a_1\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(n+2)(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,(n+2)^2|z|^2}{(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{3}}$, alors $3|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{3}}$, alors $3|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{3}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{3}}$, et c'est une solution

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n}\,(-3)^n\,(n-1)^2 n^2\,(n-2)!^2}{(n+1)\,(2\,n)!} x^{2n} + 3\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-2}\,(-3)^n\,(2\,n+4)!}{(2\,n+3)^2(n+2)(n+1)n!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 15. ← page 5

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-4x^3-2x^2\right) S''(x) - \left(18x^2+7x\right) S'(x) + (-6x+3)\,S(x)\\
&= \left(-4x^3-2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(18x^2+7x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-6x+3)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 18x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 7x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 18\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 18\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 18\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 7\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 6\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-4\,(n-1)(n-2) - 18\,n + 12\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 7\,n + 3\right) a_n\right) x^n + (3\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left(-4\,(n-1)(n-2) - 18\,n + 12\right) a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 7\,n + 3\right) a_n & = & 0,\\ 3\,a_0 & = & 3,\end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-4\,(n-1)(n-2) - 18\,n + 12 = -2\,(2\,n-1)(n+2)$ et $-2\,(n-1)n - 7\,n + 3 = -(2\,n-1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(k+3)}{k+4}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+3)}{k+4},\qquad \text{donc :}\quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+3)}{k+4},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{k+4}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{k+4} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)} = \left(\frac{3}{n+3}\right) = \frac{3}{n+3}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3\,(-2)^n}{n+3}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(n+3)|z|}{n+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+3} x^n.$$

Corrigé 16. ← page 5

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(18x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(117x^2 + 5x\right) S'(x) + (108x - 2)\, S(x)\\
&= \left(18x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(117x^2 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (108x - 2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 18x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 117x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 108x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= 18 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 117 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 108 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 18 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 117 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 108 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= 18 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 117 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 108 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(18\,(n-1)(n-2) + 117\,n - 9\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n - 2\right) a_n\right) x^n + \left(-2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(18\,(n-1)(n-2) + 117\,n - 9\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n - 2\right) a_n &= 0,\\ -2\,a_0 &= 2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $18\,(n-1)(n-2) + 117\,n - 9 = 9\,(2\,n+1)(n+3)$ et $2\,(n-1)n + 5\,n - 2 = (2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{9\,(2\,k+3)(k+4)}{(2\,k+1)(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9\,(2\,k+3)(k+4)}{(2\,k+1)(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9\,(2\,k+3)(k+4)}{(2\,k+1)(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -9, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-9)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+4)}{(2\,k+1)(k+3)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+4)}{(2\,k+1)(k+3)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+4) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}\\
&= \frac{\prod_{k=3}^{n+2} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}\\
&= \left(\frac{1}{3}\,(2\,n+1)(n+3)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\,(2\,n+1)(n+3)$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{1}{3}\,(-9)^n\,(2\,n+1)(n+3). \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{9\,(2\,n+3)(n+4)|z|}{(2\,n+1)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 9\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 9\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{9}$, alors $9|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{9}$, alors $9|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{9}$ et $R \leqslant \frac{1}{9}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{9}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{9}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} (-9)^n\,(2\,n+1)(n+3)x^n.$$

Corrigé 17. ← page 6

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^3-4x^2\right) S''(x) - \left(6x^2+14x\right) S'(x) + (-6x+6)\,S(x)\\
&= \left(-x^3-4x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(6x^2+14x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-6x+6)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 14x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 14\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 14\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 14\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(-(n-1)(n-2) - 6\,n\right)a_{n-1} + \left(-4\,(n-1)n - 14\,n + 6\right)a_n\right)x^n + \left(6\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (-(n-1)(n-2)-6\,n)\,a_{n-1} + (-4\,(n-1)n - 14\,n + 6)\,a_n &= 0, \\ 6\,a_0 &= 6, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-(n-1)(n-2)-6\,n = -(n+2)(n+1)$ et $-4\,(n-1)n - 14\,n + 6 = -2\,(2\,n-1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(k+3)(k+2)}{2\,(2\,k+1)(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(k+3)(k+2)}{2\,(2\,k+1)(k+4)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(k+3)(k+2)}{2\,(2\,k+1)(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)(k+2)}{(2\,k+1)(k+4)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)(k+2)}{(2\,k+1)(k+4)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\ &= \left(\frac{3}{(n+3)^2(n+2)}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\ &= \frac{3\cdot 2^n(n+1)(n-1)^2(n-2)^2 n^2\,(n-3)!^2}{(n+3)\,(2\,n)!} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3\,(-1)^n\,(n+1)(n-1)^2(n-2)^2 n^2\,(n-3)!^2}{(n+3)\,(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+3)(n+2)|z|}{2\,(2\,n+1)(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 4$, alors $\frac{1}{4}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 4$, alors $\frac{1}{4}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 4$ et $R \leqslant 4$, c'est-à-dire : $R = 4$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-4{,}4[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 4, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n+1)(n-1)^2(n-2)^2 n^2\,(n-3)!^2}{(n+3)\,(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 18. ← page 6

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2S''(x) + \left(-4x^3+2x\right)S'(x) - \left(8x^2+2\right)S(x)\\
&= x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-4x^3+2x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(8x^2+2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 8x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-4\,n a_{n-2} + ((n-1)n + 2\,n - 2)\,a_n\right)x^n + (-2\,a_0).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad -4\,n a_{n-2} + ((n-1)n + 2\,n - 2)\,a_n & = & 0,\\ -2\,a_0 & = & -4, \end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n-1)n + 2\,n - 2 = (n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{4\,(k+1)}{(2\,k+1)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+1)}{(2\,k+1)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(k+1)}{(2\,k+1)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 4^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{k+1}{(2\,k+1)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+2)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^n n\,(n-1)!}{(n+1)\,(2\,n)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 4^n a_1 \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod\limits_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{3}{2\,n+3}\right) \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{3}{2^n (2\,n+3) n!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{4^n 2^{n+1} n\,(n-1)!}{(n+1)\,(2\,n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{3 \cdot 4^n a_1}{2^n (2\,n+3) n!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{4\,(n+2)|z|^2}{(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^n n\,(n-1)!}{(n+1)\,(2\,n)!} x^{2n} + 3\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{2^n (2\,n+3) n!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 19. ← page 6

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-4x^2 S''(x) - \left(x^2 + 10x\right) S'(x) - (3x+2)\,S(x)\\
&= -4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(x^2 + 10x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (3x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 10x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 10 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 10 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 10 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-n-2)\, a_{n-1} + (-4\,(n-1)n - 10\,n - 2)\, a_n \right) x^n + (-2\, a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (-n-2)\, a_{n-1} + (-4\,(n-1)n - 10\,n - 2)\, a_n &= 0, \\ -2\, a_0 &= -2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-4\,(n-1)n - 10\,n - 2 = -2\,(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{k+3}{2\,(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+3}{2\,(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+3}{2\,(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\,n+1\right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\ &= \frac{2^n\,(n+2)!}{(2\,n+2)!} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\,(n+2)!}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+3)|z|}{2\,(2\,n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{4\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n\,(n+2)!}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 20. ← page 7

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - 2x^2\right) S''(x) - \left(2x^3 + 2x\right) S'(x) + 2S(x)\\
&= \left(-x^4 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(2x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 2\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 2\,n + 4\right) a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 2\,n + 2\right) a_n\right) x^n + \left(2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 2\,n + 4\right) a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 2\,n + 2\right) a_n & = & 0,\\ 2\,a_0 & = & -2, \end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 2\,n + 4 = -(n-1)(n-2)$ et $-2\,(n-1)n - 2\,n + 2 = -2\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = -1 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{2\,k+1}{4\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{4\,(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{4\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+2)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)} = \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)} = \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}(n+1)n!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n\,a_1\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = -1$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{n|z|^2}{2\,(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{2}$ et $R \leqslant \sqrt{2}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = - + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 21. ← page 7

1. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\big(2x^2 - 46x\big)\, S''(x) + (8x - 23)\, S'(x) + 4S(x) \\
&= \big(2x^2 - 46x\big) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (8x - 23) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 46x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 8x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 23 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 46 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 23 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 46 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 23 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 46 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 23 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \big((2\,(n-1)n + 8\,n + 4)\, a_n + (-46\,(n+1)n - 23\,n - 23)\, a_{n+1} \big)\, x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2\,(n-1)n + 8\,n + 4)\, a_n + (-46\,(n+1)n - 23\,n - 23)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)n + 8\,n + 4 = 2\,(n+2)(n+1)$ et $-46\,(n+1)n - 23\,n - 23 = -23\,(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n).

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\,(k+2)}{23\,(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{23\,(2\,k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{23\,(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{2}{23}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{2}{23}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{2\,k+1} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^n (n+1) n!^2}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{2\,n} a_0 (n+1) n!^2}{23^n\,(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2\,(n+2)|z|}{23\,(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{23}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{23}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 23$, alors $\frac{1}{23}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 23$, alors $\frac{1}{23}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 23$ et $R \leqslant 23$, c'est-à-dire : $R = 23$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans

la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-23,23[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 23, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n}(n+1)n!^2}{23^n\,(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 22. ← page 7

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^3-10x^2\right) S''(x) + \left(7x^2-45x\right) S'(x) + (9x-15)\,S(x)\\
&= \left(x^3-10x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(7x^2-45x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (9x-15) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 10x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 7x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 45x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 10 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 45 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 10 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 45 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 10 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 45 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left((n-1)(n-2)+7\,n+2\right) a_{n-1} + \left(-10\,(n-1)n - 45\,n - 15\right) a_n\right) x^n + \left(-15\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left((n-1)(n-2)+7\,n+2\right) a_{n-1} + \left(-10\,(n-1)n - 45\,n - 15\right) a_n & = & 0,\\ -15\,a_0 & = & 15, \end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n-1)(n-2)+7\,n+2 = (n+2)^2$ et $-10\,(n-1)n - 45\,n - 15 = -5\,(2\,n+1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+3)^2}{5\,(2\,k+3)(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)^2}{5\,(2\,k+3)(k+4)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)^2}{5\,(2\,k+3)(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{5}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)^2}{(2\,k+3)(k+4)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+3)^2}{(2\,k+3)(k+4)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((k+3)^2\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+4) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} \left((k+1)^2\right)}{\prod\limits_{k=3}^{n+2} (k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{3}{2\,(n+3)^2}\right) \frac{\prod\limits_{k=0}^{n+2} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{3 \cdot 2^n (n+2)(n+1)^2 n^2\,(n-1)!^2}{(n+3)\,(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{3 \cdot 2^n (n+2)(n+1)^2 n^2\,(n-1)!^2}{5^n (n+3)\,(2\,n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+3)^2 |z|}{5\,(2\,n+3)(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{10}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 10$, alors $\frac{1}{10}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 10$, alors $\frac{1}{10}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 10$ et $R \leqslant 10$, c'est-à-dire : $R = 10$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-10,10[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 10, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} (n+2)(n+1)^2 n^2\,(n-1)!^2}{5^n (n+3)\,(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 23.

← page 8

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&3x^2 S''(x) + \left(8x^3+3x\right) S'(x) + \left(16x^2-3\right) S(x)\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(8x^3+3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(16x^2-3\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 8x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 16x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + 8 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(8\, n a_{n-2} + \left(3\,(n-1)n + 3\,n - 3\right) a_n\right) x^n + \left(-3\, a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad 8\, n a_{n-2} + \left(3\,(n-1)n + 3\,n - 3\right) a_n &= 0,\\ -3\, a_0 &= 0, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $3\,(n-1)n + 3\,n - 3 = 3\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{2\,(2\,k+3)}{3\,(k+2)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+3)}{3\,(k+2)(k+1)}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+3)}{3\,(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{8}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n+1} = \left(-\frac{8}{3}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{4\,(k+2)(k+1)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} = \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (k+1)} = \frac{2^{-3\,n-1}(n+1)\,(2\,n+2)!}{(n+1)!^3}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-3\,n-1}\,(-8)^n\,a_1(n+1)\,(2\,n+2)!}{3^n\,(n+1)!^3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{8\,(n+2)|z|^2}{3\,(n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8\,|z|^2}{3\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-3\,n-1}\,(-8)^n\,(n+1)\,(2\,n+2)!}{3^n\,(n+1)!^3} x^{2n+1}.$$

Corrigé 24. ← page 8

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4+x^2\right) S''(x) + \left(7x^3+2x\right) S'(x) + 8x^2 S(x)\\
&= \left(x^4+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(7x^3+2x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 7x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 8\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 7\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 8\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 7\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 8\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n-2)(n-3)+7\,n-6\right)a_{n-2} + \left((n-1)n+2\,n\right)a_n\right)x^n + \left(2\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left((n-2)(n-3)+7\,n-6\right)a_{n-2} + \left((n-1)n+2\,n\right)a_n = 0,\\ 2\,a_1 = 4, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-2)(n-3)+7\,n-6 = (n+2)n$ et $(n-1)n+2\,n = (n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+2)}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-1)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+3} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}$$

$$= 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = 2\,(-1)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}$$
$$= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}$$
$$= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{2\,n+1}\,(-1)^n\,a_0\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-2\,n-1}\,(-1)^n\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}\,z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}\,z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}\,z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+4)|z|^2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3}\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1}\,(-1)^n\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!} x^{2n} + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-2}\,(-1)^n\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 25. ← page 8

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4+x^2\right) S''(x) + \left(-5x^3+x\right) S'(x) - \left(3x^2+1\right) S(x)\\
&= \left(-x^4+x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-5x^3+x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(3x^2+1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 7\right) a_{n-2} + \left((n-1)n + n - 1\right) a_n\right) x^n + (-a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 7\right) a_{n-2} + \left((n-1)n + n - 1\right) a_n & = & 0,\\ -a_0 & = & 1, \end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 5\,n + 7 = -(n+1)(n-1)$ et $(n-1)n + n - 1 = (n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La suite $(a_{2\,n})_{n\geqslant 0}$ est manifestement constante, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = a_0 = -1$. De même pour $(a_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, qui est constante égale à a_1.

3. D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{2\,n} z^n = -\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est géométrique, donc on sait montrer facilement que son rayon de convergence est $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} 1 x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} 1 x^{2n+1}.$$

Corrigé 26. ← page 8

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^3-2x^2\right)S''(x) - \left(9x^2+9x\right)S'(x) - (3x+3)\,S(x)\\
&= \left(-2x^3-2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(9x^2+9x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (3x+3)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 9x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 9\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-1)(n-2) - 9\,n + 6\right)a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 9\,n - 3\right)a_n\right)x^n + \left(-3\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left(-2\,(n-1)(n-2)-9\,n+6\right)a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 9\,n-3\right)a_n = 0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -3\,a_0 = 6,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-2\,(n-1)(n-2)-9\,n+6 = -(2\,n-1)(n+2)$ et $-2\,(n-1)n-9\,n-3 = -(2\,n+1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(2\,k+1)(k+3)}{(2\,k+3)(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)(k+3)}{(2\,k+3)(k+4)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)(k+3)}{(2\,k+3)(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)(k+3)}{(2k+3)(k+4)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)(k+3)}{(2k+3)(k+4)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3)}\\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}\\ &= \left(\frac{3}{(2n+1)(n+3)}\right)\\ &= \frac{3}{(2n+1)(n+3)}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{6\,(-1)^n}{(2n+1)(n+3)}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2n+1)(n+3)|z|}{(2n+3)(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+3)} x^n.$$

Corrigé 27. ← page 9

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2 S''(x) + \left(7x^2+3x\right) S'(x) + (14x+1)\, S(x)\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(7x^2+3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (14x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 7x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 14x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 14 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 14 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((7\,n+7)\, a_{n-1} + ((n-1)n + 3\,n+1)\, a_n\right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (7\,n+7)\, a_{n-1} + ((n-1)n+3\,n+1)\, a_n &= 0,\\ a_0 &= 1, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n+3\,n+1 = (n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{7}{k+2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{7}{k+2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{7}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -7, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-7)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}\\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-7)^n}{(n+1)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{7\,|z|}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse.
En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-7)^n}{(n+1)!} x^n.$$

Corrigé 28. ← page 9

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(7x^2 + 5x\right) S'(x) + (3x-2)\, S(x) \\
&= \left(2x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(7x^2 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (3x-2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 7x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(2\,(n-1)(n-2) + 7\,n - 4\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n - 2\right) a_n\right) x^n + \left(-2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(2\,(n-1)(n-2) + 7\,n - 4\right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 5\,n - 2\right) a_n = 0, \\ -2\,a_0 = -2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)(n-2) + 7\,n - 4 = (2\,n+1)n$ et $2\,(n-1)n + 5\,n - 2 = (2\,n-1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+3)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{2\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)}\right) \\
&= \frac{2\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-1)^n\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+3)(n+1)|z|}{(2\,n+1)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1{,}1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n+1)}{(n+2)(n+1)} x^n.$$

Corrigé 29.

← page 9

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&2x^2 S''(x) + 3x^3 S'(x) + 3x^2 S(x)\\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 3 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((3\,n-3)\,a_{n-2} + (2\,(n-1)n)\,a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad (3\,n-3)\,a_{n-2} + (2\,(n-1)n)\,a_n \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)n = 2\,(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3}{4\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{4\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{4\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{3}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{3}{2}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(k+1)} = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = \frac{(-3)^n\,a_1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}$$
$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2\,(-3)^n\,a_0\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2\,(-3)^n\,a_1\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,|z|^2}{2\,(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \,]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-3)^n\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-3)^n\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 30.

← page 10

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^2 - x\right) S''(x) - (9x+2)\, S'(x) - 6S(x) \\
&= \left(-2x^2 - x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - (9x+2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 9x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n} - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n} - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-2\,(n-1)n - 9\,n - 6)\, a_n + (-(n+1)n - 2\,n - 2)\, a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-2\,(n-1)n - 9\,n - 6)\, a_n + (-(n+1)n - 2\,n - 2)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)n - 9\,n - 6 = -(2\,n+3)(n+2)$ et $-(n+1)n - 2\,n - 2 = -(n+2)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,k+3}{k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+3}{k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+3}{k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{k+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}$$
$$= \frac{2^{-n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{-n-1}\,(-1)^n\, a_0\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+3)|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n-1}\,(-1)^n\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^2} x^n.$$

Corrigé 31. ← page 10

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}&\left(-6x^2+2x\right) S''(x) + (-33x+6)\, S'(x) - 27 S(x)\\ &= \left(-6x^2+2x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (-33x+6) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 27 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -6x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 2x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 33x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 27\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -6\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1} - 33\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 27\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -6\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n} - 33\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n} - 27\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= -6\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n} - 33\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n} - 27\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-6\,(n-1)n - 33\,n - 27\right)a_n + \left(2\,(n+1)n + 6\,n + 6\right)a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left(-6\,(n-1)n - 33\,n - 27\right)a_n + \left(2\,(n+1)n + 6\,n + 6\right)a_{n+1} \quad=\quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-6\,(n-1)n - 33\,n - 27 = -3\,(2\,n+3)(n+3)$ et $2\,(n+1)n + 6\,n + 6 = 2\,(n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3\,(2\,k+3)}{2\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{3\,(2\,k+3)}{2\,(k+1)},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{3\,(2\,k+3)}{2\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{3}{2}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+3}{k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+3}{k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\
&= \frac{2^{-n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3^n 2^{-2n-1} a_0 \,(2n+2)!}{(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,(2n+3)|z|}{2\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{3}$, alors $3|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{3}$, alors $3|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{3}$ et $R \leqslant \frac{1}{3}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{-2n-1}\,(2n+2)!}{(n+1)n!^2} x^n.$$

Corrigé 32. ← page 10

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&3x^2 S''(x) + \left(6x^3 + 6x\right) S'(x) - 6S(x)\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(6x^3 + 6x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((6n-12)\, a_{n-2} + (3\,(n-1)n + 6n - 6)\, a_n\right) x^n + (-6\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (6\,n-12)\,a_{n-2} + (3\,(n-1)n + 6\,n - 6)\,a_n &= 0, \\ \qquad\qquad -6\,a_0 &= 12, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $3\,(n-1)n + 6\,n - 6 = 3\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = -2 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{2\,k+1}{(2\,k+5)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(2\,k+5)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(2\,k+5)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = (-2)^n\, a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+5)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+5)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{3}{(2\,n+3)(2\,n+1)} \right) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{3}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{3\,(-2)^{n+1}}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!}, \quad a_{2n+1} = \frac{3\,(-2)^n\, a_1}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = -2$). On étudie à présent $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{2\,n|z|^2}{(n+4)(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-\infty,+\infty\right[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -6+3\,a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 33. ← page 11

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&2x^2S''(x)+8xS'(x)+\left(6x^2+4\right)S(x)\\
&=2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+8x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+\left(6x^2+4\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+8x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+6x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n+4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+8\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+6\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}+4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+8\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+8\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}+6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(6a_{n-2}+\left(2\,(n-1)n+8\,n+4\right)a_n\right)x^n+\left(12\,a_1x+4\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad 6a_{n-2}+\left(2\,(n-1)n+8\,n+4\right)a_n &=& 0,\\
4\,a_0 &=& -4,\\
12\,a_1 &=& -24,
\end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $6=6$ et $2\,(n-1)n+8\,n+4=2\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3}{2\,(2\,k+3)(k+2)}.$$
En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2\,(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2\,(2\,k+3)(k+2)},$$
expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-3)^n\, a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2\,(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :
$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$
où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :
$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$
En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :
$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -2\ (-3)^n \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1) \prod\limits_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{12\,(n+2)}{(2\,n+4)!}
\end{aligned}$$
On a donc montré :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2\ (-3)^n}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{8\ (-3)^{n+1}\,(n+2)}{(2\,n+4)!}. \tag{†}$$
Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:
$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{3\,|z|^2}{(n+4)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [∗], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-3)^n}{(2\,n+2)!} x^{2n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,(-3)^n\,(n+2)}{(2\,n+4)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 34.

← page 11

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-xS''(x) - (3x+3)\,S'(x) - 3S(x)\\
&= -x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - (3x+3) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-3\,n-3)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-3\,n-3)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n+1)n - 3\,n - 3 = -(n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

∗. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{3}{k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-3)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)} \\ &= \frac{2}{(n+2)!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-3)^n a_0}{(n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,|z|}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(n+2)!} x^n.$$

Corrigé 35. ← page 11

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&xS''(x) + (-4x+4)\,S'(x) - 2S(x) \\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (-4x+4)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-4\,n-2)\,a_n + ((n+1)n + 4\,n + 4)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-4\,n-2)\,a_n + ((n+1)n + 4\,n + 4)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n+1)n + 4\,n + 4 = (n+4)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\,(2\,k+1)}{(k+4)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(2\,k+1)}{(k+4)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(2\,k+1)}{(k+4)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+4)(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+4)(k+1)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (k+4)}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=3}^{n+2} (k+1)}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^{-n+1}\,(2\,n)!}{(n+3)(n+2)(n+1)(n-1)^3(n-2)^3 n^3\,(n-3)!^3}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{6\,a_0\,(2\,n)!}{(n+3)(n+2)(n+1)(n-1)^3(n-2)^3 n^3\,(n-3)!^3}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2\,(2\,n+1)|z|}{(n+4)(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4\,|z|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)!}{(n+3)(n+2)(n+1)(n-1)^3(n-2)^3 n^3\,(n-3)!^3} x^n.$$

Corrigé 36. ← page 11

1. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned} &x^2 S''(x) + \left(32x^2 + 3x\right) S'(x) + (64x+1)\,S(x) \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(32x^2 + 3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (64x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 32x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 64x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 32 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 64 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 32 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 64 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 32 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 64 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((32\,n+32)\, a_{n-1} + ((n-1)n + 3\,n + 1)\, a_n \right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (32\,n+32)\, a_{n-1} + ((n-1)n + 3\,n+1)\, a_n &= 0,\\ \hfill a_0 &= 2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n + 3\,n + 1 = (n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{32}{k+2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{32}{k+2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{32}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -32, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-32)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}\\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-32)^n}{(n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{32\,|z|}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{32\,|z|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse.
En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-32)^n}{(n+1)!} x^n.$$

Corrigé 37. ← page 12

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
& - x^2 S''(x) + \left(4x^3 - 3x\right) S'(x) + \left(12x^2 - 1\right) S(x) \\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(4x^3 - 3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(12x^2 - 1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((4\,n+4)\, a_{n-2} + (-(n-1)n - 3\,n - 1)\, a_n \right) x^n + (-4\, a_1 x - a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (4\,n+4)\, a_{n-2} + (-(n-1)n - 3\,n - 1)\, a_n &= 0, \\ -a_0 &= 1, \\ -4\, a_1 &= -8, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)n - 3\,n - 1 = -(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{4}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 4^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\ &= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 2 \cdot 4^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n\,(n+1)!} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{4^n 2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{4^n 2^{-n+1}}{(n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{4\,|z|^2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la

question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{2^n\,(n+1)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 38. ← page 12

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&x^2 S''(x) + \left(-9x^3 + 4x\right) S'(x) + \left(-36x^2 + 2\right) S(x)\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-9x^3 + 4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-36x^2 + 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 9x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 36x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 36 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 36 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 36 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((-9\,n - 18)\, a_{n-2} + ((n-1)n + 4\,n + 2)\, a_n\right) x^n + (6\,a_1 x + 2\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (-9\,n - 18)\, a_{n-2} + ((n-1)n + 4\,n + 2)\, a_n &= 0,\\ 2\,a_0 &= 4,\\ 6\,a_1 &= 0, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n + 4\,n + 2 = (n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{9}{2\,k+3}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 9, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 9^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 0 \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n\,(n+1)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{9^n 2^{n+2}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = 0. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{9\,|z|^2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{9\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9^n 2^{n+1} (n+1)!}{(2n+2)!} x^{2n}.$$

Corrigé 39. ← page 12

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&- x^2 S''(x) - 5x^3 S'(x) - 15x^2 S(x) \\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 15x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 15x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 15 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 15 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 15 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((-5n - 5)\, a_{n-2} + (-(n-1)n)\, a_n \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad (-5n - 5)\, a_{n-2} + (-(n-1)n)\, a_n \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-(n-1)n = -(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2k$ et en divisant par $a_{2k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = -\frac{5(2k+3)}{2(2k+1)(k+1)}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{5\,(2\,k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{5\,(2\,k+3)}{2\,(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -5, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-5)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{2\,(2\,k+1)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{2\,(2\,k+1)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} (2\,n+1) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{2\,n+1}{2^n n\,(n-1)!}
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} = (-5)^n\, a_1 &\frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= (n+1) \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^n\,(n+1)!}{(2\,n+1)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-5)^n\, a_0 (2\,n+1)}{2^n n\,(n-1)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^n\,(-5)^n\, a_1\,(n+1)!}{(2\,n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:
$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{5\,(n+3)|z|^2}{(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5)^n\,(2\,n+1)}{2^n n\,(n-1)!}x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-5)^n\,(n+1)!}{(2\,n+1)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 40. ← page 13

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :
$$\begin{aligned}
&x^2 S''(x) + \left(2x^3 + x\right) S'(x) + 6x^2 S(x)\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(2x^3 + x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((2\,n+2)\,a_{n-2} + (n-1)n + n a_n\right) x^n + (a_1 x)\,.
\end{aligned}$$
On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (2\,n+2)\,a_{n-2} + (n-1)n + n a_n &= 0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_1 &= 1,\end{cases}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n-1)n+n=n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=-\frac{2\,k+3}{2\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+3}{2\,(k+1)^2},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+3}{2\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=(-2)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+3}{4\,(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+3}{4\,(k+1)^2}&=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}\\&=\frac{1}{2^{2\,n}}\frac{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}\\&=\frac{2^{-3\,n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^3}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=(-2)^n\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}\\&=2^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}\\&=\frac{2^{3\,n+2}\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=\frac{2^{-3\,n-1}\,(-2)^n\,a_0\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^3},\quad a_{2n+1}=\frac{2^{3\,n}\,(-2)^{n+2}\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2}.\qquad(\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,(n+3)|z|^2}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-3\,n-1}\,(-2)^n\,(2\,n+2)!}{(n+1)n!^3} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3\,n}\,(-2)^{n+2}\,(n+1)!^3}{(2\,n+2)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 41.

← page 13

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&6xS''(x) + (x+12)\,S'(x) + 2S(x)\\
&= 6x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x+12)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 6x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 6\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 6\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 12\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 6\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 12\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)\,a_n + (6\,(n+1)n + 12\,n + 12)\,a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)\, a_n + (6\,(n+1)n + 12\,n + 12)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $6\,(n+1)n + 12\,n + 12 = 6\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{1}{6\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{6\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{6\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{6}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\ &= \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\, a_0}{6^n n!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{6\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{6\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6^n n!} x^n.$$

Corrigé 42. ← page 13

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4-x^2\right) S''(x) + \left(-3x^3+x\right) S'(x) - \left(x^2+1\right) S(x)\\
&= \left(-x^4-x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-3x^3+x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(x^2+1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 3\,n + 5\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n + n - 1\right) a_n\right) x^n + (-a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 3\,n + 5\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n + n - 1\right) a_n &= 0,\\ -a_0 &= 1, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 3\,n + 5 = -(n-1)^2$ et $-(n-1)n + n - 1 = -(n-1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La suite $(a_{2\,n})_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison -1. On a donc immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-1)^n a_0 = -(-1)^n$. De même : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = (-1)^n a_1$.

3. D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{2\,n} z^n = -\sum_{n\geqslant 0} (-z)^n$ est géométrique, donc on sait montrer facilement que son rayon de convergence est $R=1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}.$$

Corrigé 43. ← page 14

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(4x^4 - x^2\right) S''(x) + \left(20x^3 - x\right) S'(x) + 12x^2 S(x)\\
&= \left(4x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(20x^3 - x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 20x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 20 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= 4 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 20 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 20 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((4\,(n-2)(n-3) + 20\,n - 28)\, a_{n-2} - -(n-1)n - n a_n\right) x^n + (-a_1 x)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (4\,(n-2)(n-3) + 20\,n - 28)\, a_{n-2} - -(n-1)n - n a_n &= 0,\\ -a_1 &= -2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $4\,(n-2)(n-3) + 20\,n - 28 = 4\,(n+1)(n-1)$ et $-(n-1)n - n = -n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{(k+1)^2}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 4^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(2\,k+1)}{4\,(k+1)^2} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1) \prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2\right)}$$
$$= \frac{2^{-4\,n-2}\,(2\,n+2)!^2}{(2\,n+1)(n+1)^2 n!^4}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = 2 \cdot 4^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+3)^2\right)}$$
$$= 2^{2\,n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((2\,k+1)^2\right)}$$
$$= \frac{2^{4\,n+2}\,(n+1)!^4}{(n+1)\,(2\,n+2)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{4^n 2^{-4\,n-2} a_0\,(2\,n+2)!^2}{(2\,n+1)(n+1)^2 n!^4}, \quad a_{2n+1} = \frac{4^n 2^{4\,n+3}\,(n+1)!^4}{(n+1)\,(2\,n+2)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{4\,(n+3)(n+1)|z|^2}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^{-4\,n-2}\,(2\,n+2)!^2}{(2\,n+1)(n+1)^2 n!^4} x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^{4\,n+2}\,(n+1)!^4}{(n+1)\,(2\,n+2)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 44. ← page 14

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(6x^4-6x^2\right) S''(x) + 18x^3 S'(x)\\
&= \left(6x^4-6x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 18x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&= 6x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 18x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&= 6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 18 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2},\\
&= 6 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 18 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n},\\
&= 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 18 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(6\,(n-2)(n-3)+18\,n-36\right) a_{n-2} + \left(-6\,(n-1)n\right) a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(6\,(n-2)(n-3)+18\,n-36\right) a_{n-2} + \left(-6\,(n-1)n\right) a_n \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $6\,(n-2)(n-3)+18\,n-36 = 6\,(n-2)n$ et $-6\,(n-1)n = -6\,(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2=0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n}=0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $a_0 = a_0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1}\neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{2\,(k+1)} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)} = \frac{1}{2^n} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)} = \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{a_0\,(2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{a_1\,(2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = a_0$). On étudie à présent $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{n|z|^2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \,]-1{,}1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n} n!^2} x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 45.

← page 14

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(3x^2+x\right) S''(x) + (9x+3)\, S'(x) + 3S(x)\\
&= \left(3x^2+x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (9x+3) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 9x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n} + 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((3\,(n-1)n + 9\,n + 3)\, a_n + ((n+1)n + 3\,n + 3)\, a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (3\,(n-1)n + 9\,n + 3)\, a_n + ((n+1)n + 3\,n + 3)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $3\,(n-1)n + 9\,n + 3 = 3\,(n+1)^2$ et $(n+1)n + 3\,n + 3 = (n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{3\,(k+1)}{k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(k+1)}{k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(k+1)}{k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-3)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+3} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)} = \left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-3)^n\, a_0}{(n+2)(n+1)}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,(n+1)|z|}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{3}$, alors $3|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{3}$, alors $3|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{3}$ et $R \leqslant \frac{1}{3}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(n+2)(n+1)} x^n.$$

Corrigé 46. ← page 14

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-xS''(x) + (x-3)\,S'(x) + 2S(x)\\
&= -x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x-3)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)\,a_n + (-(n+1)n - 3\,n - 3)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-(n+1)n - 3\,n - 3 = -(n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{(k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{(k+3)(k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+3)}\\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=2}^{n+1}(k+1)}\\
&= (2\,n+2)\,\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n+1}(k+1)}\\
&= \frac{2\,(n+1)}{(n+2)\,(n+1)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,a_0(n+1)}{(n+2)\,(n+1)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+2)|z|}{(n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)\,(n+1)!} x^n.$$

Corrigé 47. ← page 15

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :
$$\begin{aligned}
&4x^2 S''(x) + \left(72x^3 + 12x\right) S'(x) + 72x^2 S(x)\\
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(72x^3 + 12x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 72x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 72x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 72x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 72 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 72 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 72 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 72 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 72 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 72 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((72\,n - 72)\, a_{n-2} + (4\,(n-1)n + 12\,n)\, a_n\right) x^n + (12\, a_1 x).
\end{aligned}$$
On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (72\,n - 72)\, a_{n-2} + (4\,(n-1)n + 12\,n)\, a_n &= 0,\\ 12\, a_1 &= -12,\end{cases}$$
d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $4\,(n-1)n + 12\,n = 4\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.
2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{9\,(2\,k+1)}{2\,(k+2)(k+1)}.$$
En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9\,(2\,k+1)}{2\,(k+2)(k+1)}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{9\,(2\,k+1)}{2\,(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -18, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n} = (-18)^n\, a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)} \\
&= \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)} \\
&= \frac{(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\,(-18)^n \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)} \\
&= 2^n \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)\prod\limits_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{3\cdot 2^{3\,n+4}(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{2\,n} = \frac{(-18)^n\, a_0\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3},\quad a_{2n+1} = -\frac{3\cdot 2^{3\,n+4}\,(-18)^n\,(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2}. \quad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{18\,(n+1)|z|^2}{(n+4)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{18\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle

est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-18)^n\,(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3} x^{2n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3\,n+4}\,(-18)^n\,(2\,n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+4)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 48. ← page 15

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(9x^4-4x^2\right) S''(x) + \left(72x^3-8x\right) S'(x) + \left(108x^2+8\right) S(x)\\
&= \left(9x^4-4x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(72x^3-8x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(108x^2+8\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 9x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 72x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 8x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 108x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= 9 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 72 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 108 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 9 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 72 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 108 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 9 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 72 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 108 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(9\,(n-2)(n-3)+72\,n-36\right) a_{n-2} + \left(-4\,(n-1)n-8\,n+8\right) a_n\right) x^n + \left(8\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(9\,(n-2)(n-3)+72\,n-36\right) a_{n-2} + \left(-4\,(n-1)n-8\,n+8\right) a_n = 0,\\ 8\,a_0 = -16, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $9\,(n-2)(n-3)+72\,n-36 = 9\,(n+2)(n+1)$ et $-4\,(n-1)n-8\,n+8 = -4\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{9\,(2\,k+3)}{4\,(2\,k+1)}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(2\,k+3)}{4\,(2\,k+1)}, \qquad \text{donc} : \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{9\,(2\,k+3)}{4\,(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{9}{4}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\frac{9}{4}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+3}{2\,k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= (2\,n+1) \\
&= 2\,n+1
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{9^n a_1}{4^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= (n+1) \\
&= n+1
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2 \cdot 9^n (2\,n+1)}{4^n}, \quad a_{2n+1} = \frac{9^n a_1 (n+1)}{4^n}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{9\,(n+3)|z|^2}{4\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{9}{4}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{4}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{2}{3}$, alors $\frac{9}{4}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{2}{3}$, alors $\frac{9}{4}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{2}{3}$ et $R \leqslant \frac{2}{3}$, c'est-à-dire : $R = \frac{2}{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans

la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{2}{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9^n (2n+1)}{4^n} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9^n (n+1)}{4^n} x^{2n+1}.$$

Corrigé 49. ← page 15

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^3 - 4x^2\right) S''(x) - \left(4x^2 + 10x\right) S'(x) - (2x+2)\, S(x) \\
&= \left(-x^3 - 4x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(4x^2 + 10x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (2x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 10x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 10 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 10 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 10 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-(n-1)(n-2) - 4\,n + 2\right) a_{n-1} + \left(-4\,(n-1)n - 10\,n - 2\right) a_n\right) x^n + (-2\,a_0).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(-(n-1)(n-2) - 4\,n + 2\right) a_{n-1} + \left(-4\,(n-1)n - 10\,n - 2\right) a_n = 0, \\ -2\,a_0 = 4, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)(n-2) - 4\,n + 2 = -(n+1)n$ et $-4\,(n-1)n - 10\,n - 2 = -2\,(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{k+1}{2\,(2\,k+3)}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+1}{2\,(2\,k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+1}{2\,(2\,k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{k+1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{2\,k+3} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} = \frac{2^{n+1}(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{4\,(-1)^n\,(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{(n+1)|z|}{2\,(2\,n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,|z| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{4}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 4$, alors $\frac{1}{4}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 4$, alors $\frac{1}{4}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 4$ et $R \leqslant 4$, c'est-à-dire : $R = 4$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-4{,}4[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 4, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n\,(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 50.

← page 16

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&117x^2 S''(x) + \left(-9x^3 + 117x\right) S'(x) - 117 S(x)\\
&= 117x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-9x^3 + 117x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 117 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 117x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 9x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 117x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 117 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 117 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 117 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 117 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 117 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 117 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 117 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 117 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 9 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 117 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 117 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-9\,n + 18\right) a_{n-2} + \left(117\,(n-1)n + 117\,n - 117\right) a_n\right) x^n + \left(-117\, a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad (-9\,n + 18)\, a_{n-2} + (117\,(n-1)n + 117\,n - 117)\, a_n &= 0,\\ -117\, a_0 &= 234, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $117\,(n-1)n + 117\,n - 117 = 117\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = -2 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{2\,k+1}{52\,(k+2)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{52\,(k+2)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{52\,(k+2)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{13}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n+1} = \left(\dfrac{1}{13}\right)^n a_1 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+2)(k+1)} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)} = \frac{1}{2^{2\,n}} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)} = \frac{(2\,n)!}{2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2^{-3\,n+1}\,(2\,n)!}{13^n(n+1)n^3\,(n-1)!^3}, \quad a_{2n+1} = \frac{a_1\,(2\,n)!}{13^n 2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = -2$). On étudie à présent $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{n|z|^2}{13\,(n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{13\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2 + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)!}{13^n 2^{3\,n}(n+1)n^3\,(n-1)!^3} x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 51. ← page 16

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4+9x^2\right) S''(x) + \left(8x^3+18x\right) S'(x) + \left(12x^2-18\right) S(x)\\
&= \left(x^4+9x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(8x^3+18x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(12x^2-18\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 9x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 8x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 18x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 18 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + 9 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 18 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 18 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + 9 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 18 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 18 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 18 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 18 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n-2)(n-3) + 8\,n - 4\right) a_{n-2} + \left(9\,(n-1)n + 18\,n - 18\right) a_n\right) x^n + \left(-18\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left((n-2)(n-3)+8\,n-4\right) a_{n-2} + \left(9\,(n-1)n + 18\,n - 18\right) a_n &= 0,\\ \hfill -18\,a_0 &= 0, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-2)(n-3)+8\,n-4 = (n+2)(n+1)$ et $9\,(n-1)n + 18\,n - 18 = 9\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{k+2}{9\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{9\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+2}{9\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{9}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2\,n+1} = \left(-\frac{1}{9}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\ &= (n+1)\\ &= n+1\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n\, a_1 (n+1)}{9^n}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+3)|z|^2}{9\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{9}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{9}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 3$, alors $\frac{1}{9}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 3$, alors $\frac{1}{9}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 3$ et $R \leqslant 3$, c'est-à-dire : $R = 3$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-3{,}3[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 3, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n+1)}{9^n} x^{2n+1}.$$

Corrigé 52. ← page 16

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^3+x^2\right)S''(x)+\left(-11x^2+5x\right)S'(x)+(-4x+3)\,S(x)\\
&=\left(-2x^3+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(-11x^2+5x\right)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+(-4x+3)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=-2x^3\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-11x^2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+5x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=-2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-11\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n+1}+5\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}+3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=-2\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-11\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+5\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-4\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=-2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-11\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+5\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-4\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(-2\,(n-1)(n-2)-11\,n+7\right)a_{n-1}+\left((n-1)n+5\,n+3\right)a_n\right)x^n+(3\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(-2\,(n-1)(n-2)-11\,n+7\right)a_{n-1}+\left((n-1)n+5\,n+3\right)a_n &= \quad 0,\\ \hfill 3\,a_0 &= \quad -3,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)(n-2)-11\,n+7 = -(2\,n-1)(n+3)$ et $(n-1)n+5\,n+3=(n+3)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{2\,k+1}{k+2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{k+2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{k+2}&=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}\\&=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}\\&=\frac{(2\,n)!}{2^n(n+1)n!^2}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{(2n)!}{2^n(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2n+1)|z|}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $2|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $2|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n+1)n!^2}x^n.$$

Corrigé 53. ← page 17

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4+x^2\right)S''(x) + \left(-7x^3+4x\right)S'(x) + \left(-8x^2+2\right)S(x)\\
&= \left(-x^4+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(-7x^3+4x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-8x^2+2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 7x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 8x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-(n-2)(n-3) - 7\,n + 6\right)a_{n-2} + \left((n-1)n + 4\,n + 2\right)a_n\right)x^n + \left(6\,a_1 x + 2\,a_0\right).$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3)-7\,n+6\right)a_{n-2} + \left((n-1)n+4\,n+2\right)a_n &= 0,\\ 2\,a_0 &= -2,\\ 6\,a_1 &= -12,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3)-7\,n+6 = -(n+2)n$ et $(n-1)n+4\,n+2 = (n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{2\,(k+1)}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+1)}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+1)}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(k+1)}{2\,k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\ &= 2^n\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\ &= \frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = -2\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}$$

$$= \frac{2^{-2\,n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)!^2}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = -\frac{(2\,n+2)!}{2^{2\,n}\,(n+1)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+2)|z|^2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!} x^{2n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 54. ← page 17

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned} &-x^2 S''(x) - \left(3x^3+3x\right) S'(x) - \left(9x^2+1\right) S(x) \\ &= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(3x^3+3x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(9x^2+1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 3x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 9\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 9\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-3\,n-3\right)a_{n-2} + \left(-(n-1)n-3\,n-1\right)a_n\right)x^n + \left(-4\,a_1 x - a_0\right).
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\begin{cases}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (-3\,n-3)\,a_{n-2} + (-(n-1)n-3\,n-1)\,a_n & = \ 0,\\
-a_0 & = \ 1,\\
-4\,a_1 & = \ -4,
\end{cases}
$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)n-3\,n-1 = -(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2\,k+3},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-3)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,k+3} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= (-3)^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n\,(n+1)!} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = -\frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{(-3)^n}{2^n\,(n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{3\,|z|^2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\infty, +\infty\right[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^n\,(n+1)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 55. ← page 17

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned} &-2x^2 S''(x) - \left(4x^3 + 4x\right) S'(x) + 4S(x) \\ &= -2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(4x^3 + 4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

[*] Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 4\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 4\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-4\,n+8\right)a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 4\,n + 4\right)a_n\right)x^n + \left(4\,a_0\right).
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\begin{cases}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (-4\,n+8)\,a_{n-2} + (-2\,(n-1)n - 4\,n+4)\,a_n = 0,\\
\hfill 4\,a_0 = 4,
\end{cases}
$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-2\,(n-1)n - 4\,n + 4 = -2\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar\cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $a_0 = 1\neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{2\,k+1}{(2\,k+5)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(2\,k+5)(k+1)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\quad a_{2\,n+1} = a_1\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(2\,k+5)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = (-2)^n\,a_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+5)(k+1)}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(2\,k+5)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\
&= \frac{1}{2^n}\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}\\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{(2\,n+3)(2\,n+1)}\right)\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\
&= \frac{3}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{3\,(-2)^n}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!}, \quad a_{2n+1} = \frac{3\,(-2)^n\,a_1}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = 1$). On étudie à présent $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{2\,n|z|^2}{(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3 + 3\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(2\,n+3)(2\,n+1)n!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 56. ← page 17

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-8x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(-28x^2 + 9x\right) S'(x) + (-8x+3)\,S(x)\\
&= \left(-8x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-28x^2 + 9x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-8x+3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 28x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 8x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 28 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= -8\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n - 28\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 9\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n - 8\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$
$$= -8\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n - 28\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 9\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n - 8\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(-8\,(n-1)(n-2) - 28\,n + 20\right)a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 9\,n + 3\right)a_n\right)x^n + (3\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (-8\,(n-1)(n-2) - 28\,n + 20)\,a_{n-1} + (2\,(n-1)n + 9\,n + 3)\,a_n &= 0,\\ 3\,a_0 &= -6, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-8\,(n-1)(n-2) - 28\,n + 20 = -4\,(2\,n-1)(n+1)$ et $2\,(n-1)n + 9\,n + 3 = (2\,n+1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{4\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+4)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{4\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = 4^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+4)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+4)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\ &= \left(\frac{6}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)}\right)\\ &= \frac{6}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{3\cdot 4^{n+1}}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right| = \frac{4\,(2\,n+1)(n+2)|z|}{(2\,n+3)(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{4}$, alors $4|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{4}$, alors $4|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{4}$ et $R \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{4}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{4}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse.
En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)} x^n.$$

Corrigé 57. ← page 18

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&- x^2 S''(x) - \left(3x^3 + 2x\right) S'(x) - 9x^2 S(x)\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(3x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 3x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 9 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((-3\,n-3)\, a_{n-2} + (-(n-1)n - 2\,n)\, a_n\right) x^n + (-2\, a_1 x)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad (-3\,n-3)\, a_{n-2} + (-(n-1)n - 2\,n)\, a_n & = & 0,\\ -2\, a_1 & = & 2, \end{array} \right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)n - 2\,n = -(n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3}{2\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{a_{2n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3}{2(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = (-3)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1} &= -(-3)^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3)} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} \\ &= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1) \prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n+2} \ell}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = \frac{(-3)^n a_0}{2^n n!}, \quad a_{2n+1} = -\frac{2^{n+1}(-3)^n (n+1)!}{(2n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2n+2} z^{2n+2}}{a_{2n} z^{2n}} \right| = \frac{3|z|^2}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3|z|^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la

question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^n n!} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(-3)^n (n+1)!}{(2\,n+2)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 58. ← page 18

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(6x^3 + 2x\right) S'(x) + \left(-4x^2 + 2\right) S(x) \\
&= \left(-x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(6x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-4x^2 + 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 2\,n + 2\right) a_n\right) x^n + (2\,a_0).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 2\,n + 2\right) a_n & = & 0, \\ 2\,a_0 & = & 2, \end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8 = -(n+2)(n-1)$ et $-(n-1)n - 2\,n + 2 = -(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La suite $(a_{2\,n})_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison -1. On a donc immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-1)^n a_0 = (-1)^n$. De même : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = (-1)^n a_1$.

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

3. D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{2\,n} z^n = \sum_{n\geqslant 0} (-z)^n$ est géométrique, donc on sait montrer facilement que son rayon de convergence est $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}.$$

Corrigé 59. ← page 18

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-x^2 S''(x) - 4x S'(x) + \left(48x^2 - 2\right) S(x)\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(48x^2 - 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 48x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 48 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 48 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 48 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(48 a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 4\,n - 2\right) a_n\right) x^n + \left(-6\, a_1 x - 2\, a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad 48 a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 4\,n - 2\right) a_n &= 0,\\ -2\, a_0 &= -2,\\ -6\, a_1 &= -12, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $48 = 48$ et $-(n-1)n - 4\,n - 2 = -(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{24}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{24}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{24}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 48, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = 48^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 2 \cdot 48^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{12\,(n+2)}{(2\,n+4)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2 \cdot 48^n}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{24 \cdot 48^n (n+2)}{(2\,n+4)!}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{48\,|z|^2}{(n+4)(n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{48\,|z|^2}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I=]-\infty,+\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\cdot 48^n}{(2\,n+2)!}x^{2n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4\cdot 48^n(n+2)}{(2\,n+4)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 60. ← page 19

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-74x^2S''(x)-148xS'(x)+\left(16x^2+148\right)S(x)\\
&=-74x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-148x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+\left(16x^2+148\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-74x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-148x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+16x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n+148\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-74\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-148\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+16\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}+148\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-74\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-148\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+16\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+148\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-74\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-148\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}+16\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n}+148\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(16a_{n-2}+\left(-74\,(n-1)n-148\,n+148\right)a_n\right)x^n+\left(148\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad 16a_{n-2}+\left(-74\,(n-1)n-148\,n+148\right)a_n &= 0,\\ 148\,a_0 &= 296,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $16=16$ et $-74\,(n-1)n-148\,n+148=-74\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

---

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n\text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{4}{37\,(2\,k+1)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{4}{37\,(2\,k+1)(k+2)},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{4}{37\,(2\,k+1)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{8}{37}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=\left(\frac{8}{37}\right)^n a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(2\,k+1)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(2\,k+1)(k+2)}&=\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\&=\frac{1}{2^n}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\&=\frac{1}{(n+1)\,(2\,n)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!}=\frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=\frac{8^n a_1}{37^n}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\&=\frac{1}{2^n}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}\\&=\frac{12\,(n+2)(n+1)}{(2\,n+4)!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=\frac{2\cdot 8^n}{37^n(n+1)\,(2\,n)!},\quad a_{2n+1}=\frac{12\cdot 8^n a_1(n+2)(n+1)}{37^n\,(2\,n+4)!}.\tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right|=\left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right|=\frac{8\,|z|^2}{37\,(n+4)(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{8\,|z|^2}{37\,n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n}{37^n (n+1)\,(2\,n)!} x^{2n} + 3\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4 \cdot 8^n (n+2)(n+1)}{37^n\,(2\,n+4)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 61. ← page 19

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-8x^2 + x\right) S''(x) + (-20x + 1)\, S'(x) - 4S(x)\\
&= \left(-8x^2 + x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (-20x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 20x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - 20 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - 20 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -8 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - 20 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-8\,(n-1)n - 20\,n - 4)\, a_n + ((n+1)n + n + 1)\, a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-8\,(n-1)n - 20\,n - 4)\, a_n + ((n+1)n + n + 1)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-8\,(n-1)n - 20\,n - 4 = -4\,(2\,n+1)(n+1)$ et $(n+1)n + n + 1 = (n+1)^2$ pour tout entier n).

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4\,(2\,k+1)}{k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(2\,k+1)}{k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4\,(2\,k+1)}{k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 4^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{k+1} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4^n a_0\,(2\,n)!}{2^n n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{4\,(2\,n+1)|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{8}$, alors $8|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{8}$, alors $8|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{8}$ et $R \leqslant \frac{1}{8}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{8}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{8}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En

utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(2\,n)!}{2^n n!^2} x^n.$$

Corrigé 62.

← page 19

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^2-3x\right) S''(x) - (9x+12)\,S'(x) - 16S(x)\\
&= \left(-x^2-3x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (9x+12)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 3x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 9x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 12\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 9\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 12\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-(n-1)n - 9\,n - 16\right) a_n + \left(-3\,(n+1)n - 12\,n - 12\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left(-(n-1)n - 9\,n - 16\right) a_n + \left(-3\,(n+1)n - 12\,n - 12\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-1)n - 9\,n - 16 = -(n+4)^2$ et $-3\,(n+1)n - 12\,n - 12 = -3\,(n+4)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{k+4}{3\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+4}{3\,(k+1)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+4}{3\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+4}{k+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+4)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\ &= \frac{\prod_{k=3}^{n+2} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\ &= \left(\frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n-1} (-1)^n a_0 (n+3)(n+2)(n+1). \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+4)|z|}{3\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 3$, alors $\frac{1}{3}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 3$, alors $\frac{1}{3}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 3$ et $R \leqslant 3$, c'est-à-dire : $R = 3$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-3,3[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 3, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{6} a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+3)(n+2)(n+1)}{3^n} x^n.$$

Corrigé 63. ← page 20

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(23x^4 - x^2\right) S''(x) + 92x^3 S'(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(23x^4 - x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 92x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&= 23x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 92x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&= 23 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 92 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2},\\
&= 23 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 92 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n},\\
&= 23 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 92 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(23\,(n-2)(n-3) + 92\,n - 184\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n\right) a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(23\,(n-2)(n-3) + 92\,n - 184\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n\right) a_n \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $23\,(n-2)(n-3) + 92\,n - 184 = 23\,(n+1)(n-2)$ et $-(n-1)n = -(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = a_0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{23\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{23\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{23\,(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 23, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = 23^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(2\,k+3)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \left(\frac{n+1}{2\,n+1}\right)\\
&= \frac{n+1}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{23^n a_0(n+1)}{2\,n+1}, \quad a_{2n+1} = \frac{23^n a_1(n+1)}{2\,n+1}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = a_0$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{23\,(n+3)n|z|^2}{(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 23\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 23\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{23}}$, alors $23|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{23}}$, alors $23|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{23}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{23}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{23}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{23}}, \sqrt{\frac{1}{23}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ [∗], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{23}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{23^n(n+1)}{2\,n+1} x^{2n+1}.$$

Corrigé 64. ← page 20

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-3x^2 + x\right) S''(x) + (-12x+3)\, S'(x) - 6S(x) \\
&= \left(-3x^2 + x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (-12x+3) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 12x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

∗. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= -3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n - 12\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n - 12\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-3\,(n-1)n - 12\,n - 6\right) a_n + \left((n+1)n + 3\,n + 3\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(-3\,(n-1)n - 12\,n - 6\right) a_n + \left((n+1)n + 3\,n + 3\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-3\,(n-1)n - 12\,n - 6 = -3\,(n+2)(n+1)$ et $(n+1)n + 3\,n + 3 = (n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3\,(k+2)}{k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(k+2)}{k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\,(k+2)}{k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 3, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+3}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)}\\
&= \left(\frac{2}{n+2}\right)\\
&= \frac{2}{n+2}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2 \cdot 3^n a_0}{n+2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{3\,(n+2)|z|}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{3}$, alors $3|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{3}$, alors $3|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{3}$ et $R \leqslant \frac{1}{3}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+2} x^n.$$

Corrigé 65. ← page 20

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&2x^2 S''(x) + \left(12x^3 + 2x\right) S'(x) + 12x^2 S(x) \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(12x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 12x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 12 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 12 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((12\, n - 12)\, a_{n-2} + 2\, (n-1) n + 2\, n a_n \right) x^n + (2\, a_1 x)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad (12\, n - 12)\, a_{n-2} + 2\, (n-1) n + 2\, n a_n &= 0, \\ 2\, a_1 &= -2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $2\,(n-1)n + 2\, n = 2\, n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3\,(2\,k+1)}{2\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(2\,k+1)}{2\,(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(2\,k+1)}{2\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -6, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-6)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{4\,(k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+3)^2\right)} \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} \left((2\,k+1)^2\right)} \\
&= \frac{2^{3\,n+2}(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\,(-6)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+3)^2\right)} \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} \left((2\,k+1)^2\right)} \\
&= \frac{2^{3\,n+2}(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{3\,n+2}\,(-6)^n\,a_0 (n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2}, \quad a_{2n+1} = -\frac{2^{3\,n+2}\,(-6)^n\,(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{6\,(n+1)|z|^2}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z\in\mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I=]-\infty,+\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{3\,n+2}\,(-6)^n\,(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2}x^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{3\,n+2}\,(-6)^n\,(n+1)^2 n!^3}{(2\,n+2)!^2}x^{2n+1}.$$

Corrigé 66. ← page 20

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-10xS''(x)+(3x-30)\,S'(x)+3S(x)\\
&=-10x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+(3x-30)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=-10x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}-30\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=-10\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}+3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n}-30\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=-10\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n}+3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n}-30\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n}+3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=-10\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n}+3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n}-30\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n}+3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((3\,n+3)\,a_n+(-10\,(n+1)n-30\,n-30)\,a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (3\,n+3)\,a_n+(-10\,(n+1)n-30\,n-30)\,a_{n+1}\;=\;0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-10\,(n+1)n-30\,n-30=-10\,(n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n=\sum_{n\text{ pair}}+\sum_{n\text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{10\,(k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3}{10\,(k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3}{10\,(k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{3}{10}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1} (k+1)} \\
&= \frac{2}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2 \cdot 3^n a_0}{10^n\,(n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{3\,|z|}{10\,(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|}{10\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{10^n\,(n+2)!} x^n.$$

Corrigé 67. ← page 21

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&xS''(x) + (2x+1)\,S'(x) + S(x) \\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2x+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2\,n+1)\,a_n + ((n+1)n + n + 1)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2\,n+1)\,a_n + ((n+1)n + n + 1)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n+1)n + n + 1 = (n+1)^2$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,k+1}{(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+1}{(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+1)^2} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}$$

$$= \frac{(2\,n)!}{2^n n!^3}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\,a_0\,(2\,n)!}{2^n n!^3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+1)|z|}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{2^n n!^3} x^n.$$

Corrigé 68. ← page 21

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(22x^4 + x^2\right) S''(x) + 176x^3 S'(x) + 264x^2 S(x)\\
&= \left(22x^4 + x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 176x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 264x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 22x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 176x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 264x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 22 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 176 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 264 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 22\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 176\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 264\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,\\
&= 22\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 176\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 264\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(22\,(n-2)(n-3)+176\,n-88\right)a_{n-2}+\left((n-1)n\right)a_n\right)x^n.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (22\,(n-2)(n-3)+176\,n-88)\,a_{n-2}+((n-1)n)\,a_n \quad=\quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $22\,(n-2)(n-3)+176\,n-88 = 22\,(n+2)(n+1)$ et $(n-1)n=(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{22\,(2\,k+3)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{22\,(2\,k+3)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{22\,(2\,k+3)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -22, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=(-22)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(k+2)}{(2\,k+1)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}\\
&= ((2\,n+1)(n+1))\\
&= (2\,n+1)(n+1)
\end{aligned}
$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$
\begin{aligned}
a_{2n+1} &= (-22)^n\,a_1\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{1}{3}(2n+3)(n+1)\right)$$
$$= \frac{1}{3}(2n+3)(n+1)$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = (-22)^n a_0 (2n+1)(n+1), \quad a_{2n+1} = \frac{1}{3}(-22)^n a_1(2n+3)(n+1). \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{22\,(n+4)(n+3)|z|^2}{(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 22\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 22\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{22}}$, alors $22|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{22}}$, alors $22|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{22}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{22}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{22}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{1}{22}}, \sqrt{\frac{1}{22}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{1}{22}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3} a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-22)^n (2n+1)(n+1)x^{2n} + \frac{1}{3} a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-22)^n (2n+3)(n+1)x^{2n+1}.$$

Corrigé 69. ← page 21

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+8x\right)S''(x) + (5x+16)\,S'(x) + 3S(x) \\
&= \left(x^2+8x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (5x+16)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 8x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n + 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 16\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 16\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left((n-1)n + 5\,n + 3\right) a_n + \left(8\,(n+1)n + 16\,n + 16\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left((n-1)n + 5\,n + 3\right) a_n + \left(8\,(n+1)n + 16\,n + 16\right) a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n + 5\,n + 3 = (n+3)(n+1)$ et $8\,(n+1)n + 16\,n + 16 = 8\,(n+2)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{k+3}{8\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+3}{8\,(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{k+3}{8\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{8}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{1}{8}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{k+2}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+3}{k+2} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)}\\
&= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}\\
&= \left(\frac{1}{2}\,n+1\right)\\
&= \frac{1}{2}\,n+1
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n\, a_0 (n+2)}{2 \cdot 8^n}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+3)|z|}{8\,(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{8}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 8$, alors $\frac{1}{8}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 8$, alors $\frac{1}{8}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 8$ et $R \leqslant 8$, c'est-à-dire : $R = 8$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-8,8[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 8, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n+2)}{8^n} x^n.$$

Corrigé 70. ← page 22

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-5x^2 S''(x) + \left(4x^3 - 25x\right) S'(x) + \left(16x^2 - 20\right) S(x)\\
&= -5x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(4x^3 - 25x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(16x^2 - 20\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -5x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 25x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 16x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 20 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -5 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 25 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 20 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -5 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 25 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 20 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -5 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - 25 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 20 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((4\,n+8)\, a_{n-2} + (-5\,(n-1)n - 25\,n - 20)\, a_n\right) x^n + (-45\, a_1 x - 20\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (4\,n+8)\, a_{n-2} + (-5\,(n-1)n - 25\,n - 20)\, a_n & = & 0,\\
-20\, a_0 & = & 20,\\
-45\, a_1 & = & 90,
\end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-5\,(n-1)n - 25\,n - 20 = -5\,(n+2)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{2}{5\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2}{5\,(k+2)},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2}{5\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{4}{5}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=\left(\frac{4}{5}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+2)}&=\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}\\&=\frac{1}{2^n}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}\\&=\frac{1}{2^n\,(n+1)!}\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=-\frac{2\cdot 4^n}{5^n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\&=\frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}\\&=\frac{3\cdot 2^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!}=\frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=-\frac{4^n}{5^n2^n\,(n+1)!},\quad a_{2n+1}=-\frac{3\cdot 4^n 2^{n+3}\,(n+2)!}{5^n\,(2\,n+4)!}.\tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right|=\left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right|=\frac{4\,|z|^2}{5\,(n+4)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4\,|z|^2}{5\,n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n 2^n\,(n+1)!} x^{2n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^{n+2}\,(n+2)!}{5^n\,(2\,n+4)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 71. ← page 22

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&58x^2 S''(x) + \left(4x^2 + 87x\right) S'(x) + (8x - 29)\, S(x) \\
&= 58x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(4x^2 + 87x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (8x - 29) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 58x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 87x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 8x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 29 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 58 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 87 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 29 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 58 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 87 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 29 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 58 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 87 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 29 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((4\,n+4)\, a_{n-1} + (58\,(n-1)n + 87\,n - 29)\, a_n\right) x^n + (-29\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (4\,n+4)\, a_{n-1} + (58\,(n-1)n + 87\,n - 29)\, a_n & = & 0, \\ -29\, a_0 & = & 29, \end{array} \right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $58\,(n-1)n + 87\,n - 29 = 29\,(2\,n-1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{4}{29\,(2\,k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4}{29\,(2\,k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4}{29\,(2\,k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{4}{29}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\dfrac{4}{29}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+1} &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\ &= \frac{2^n n!}{(2\,n)!} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^n\,(-4)^n\,n!}{29^n\,(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,|z|}{29\,(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|}{29\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-4)^n\,n!}{29^n\,(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 72.

← page 22

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^2-2x\right) S''(x) + (4x-3)\,S'(x) + 2S(x)\\
&= \left(x^2-2x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (4x-3)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left((n-1)n+4\,n+2\right)a_n + \left(-2\,(n+1)n-3\,n-3\right)a_{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left((n-1)n+4\,n+2\right)a_n + \left(-2\,(n+1)n-3\,n-3\right)a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n+4\,n+2 = (n+2)(n+1)$ et $-2\,(n+1)n-3\,n-3 = -(2\,n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{2\,k+3} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{n+1} a_0\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+2)|z|}{2\,n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2{,}2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 73. ← page 23

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left(6x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(36x^2 + 5x\right) S'(x) + (24x+1)\,S(x)$$
$$= \left(6x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(36x^2 + 5x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (24x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$
\begin{aligned}
&= 6x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 36x^2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 5x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + 24x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 6\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+1} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 36\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 24\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 6\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 36\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} + 24\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= 6\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} + 36\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n} + 24\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(6\,(n-1)(n-2)+36\,n-12\right)a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n+5\,n+1\right)a_n \right)x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left(6\,(n-1)(n-2)+36\,n-12\right)a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n+5\,n+1\right)a_n &=& 0,\\
a_0 &=& -2,
\end{array}
\right.
$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $6\,(n-1)(n-2)+36\,n-12 = 6\,(n+3)n$ et $2\,(n-1)n+5\,n+1=(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$
\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{6\,(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{6\,(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{6\,(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)},
$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -6, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-6)^n\,a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+4)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod\limits_{k=3}^{n+2}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \left(\frac{1}{6\,(n+1)}\right)\frac{\prod\limits_{k=0}^{n+2}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \frac{2^n(n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{3\ (2\,n+2)!}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=-\frac{2^{n+1}\,(-6)^n\,(n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{3\,(2\,n+2)!}.\qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|=\frac{6\,(n+4)(n+1)|z|}{(2\,n+3)(n+2)}\underset{n\to+\infty}{\sim}3\,|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}3\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z|<\frac{1}{3}$, alors $3|z|<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ converge absolument ;
— si $|z|>\frac{1}{3}$, alors $3|z|>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant\frac{1}{3}$ et $R\leqslant\frac{1}{3}$, c'est-à-dire : $R=\frac{1}{3}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S: x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{3}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}\,(-6)^n\,(n+3)(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}x^n.$$

Corrigé 74. ← page 23

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S: x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nnx^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}&\left(-4x^2-x\right)S''(x)-(12x+3)\,S'(x)-4S(x)\\&=\left(-4x^2-x\right)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-(12x+3)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\&=-4x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-12x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\&=-4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-12\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\end{aligned}$$

$$= -4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n - 12\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= -4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n - 12\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-4\,(n-1)n - 12\,n - 4\right)a_n + \left(-(n+1)n - 3\,n - 3\right)a_{n+1}\right)x^n.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(-4\,(n-1)n - 12\,n - 4\right)a_n + \left(-(n+1)n - 3\,n - 3\right)a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-4\,(n-1)n - 12\,n - 4 = -4\,(n+1)^2$ et $-(n+1)n - 3\,n - 3 = -(n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{4\,(k+1)}{k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+1)}{k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{4\,(k+1)}{k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-4)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}\\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}\\ &= \left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)\\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\,(-4)^n\, a_0}{(n+2)(n+1)}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4\,(n+1)|z|}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{4}$, alors $4|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{4}$, alors $4|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{4}$ et $R \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{4}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{4}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(n+2)(n+1)} x^n.$$

Corrigé 75. ← page 23

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-x^2 S''(x) - \left(4x^2 + 4x\right) S'(x) - (2x+2)\, S(x)\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(4x^2 + 4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (2x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-4\,n + 2)\, a_{n-1} + (-(n-1)n - 4\,n - 2)\, a_n\right) x^n + (-2\, a_0).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (-4\,n + 2)\, a_{n-1} + (-(n-1)n - 4\,n - 2)\, a_n &= 0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2\, a_0 &= 2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-(n-1)n - 4\,n - 2 = -(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(2\,k+1)}{(k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+1)}{(k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+1)}{(k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+1}{(k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (k+3)} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (k+1)} \\ &= \frac{2^{-n+1}\,(2\,n)!}{(n+2)(n+1)^2 n^3\,(n-1)!^3}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-2)^{n+1}\,(2\,n)!}{2^n (n+2)(n+1)^2 n^3\,(n-1)!^3}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(2\,n+1)|z|}{(n+3)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4\,|z|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,(2\,n)!}{2^n (n+2)(n+1)^2 n^3\,(n-1)!^3} x^n.$$

Corrigé 76.

← page 23

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-2x^2S''(x)-5xS'(x)-(4x+1)\,S(x)\\
&=-2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-5x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-(4x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-5x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-4x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-4\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-5\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=-2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}-5\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}-4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-4a_{n-1}+\left(-2\,(n-1)n-5\,n-1\right)a_n\right)x^n+(-a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad -4a_{n-1}+\left(-2\,(n-1)n-5\,n-1\right)a_n &= 0,\\ \hfill -a_0 &= 2,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-4=-4$ et $-2\,(n-1)n-5\,n-1=-(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=-\frac{4}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{4}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -4, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-4)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2\,k+3)(k+2)}=\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n+1}}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n\,(-4)^{n+1}}{(2\,n+2)!}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}\,z^{n+1}}{a_n\,z^n}\right| = \frac{4\,|z|}{(2\,n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse.
En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-4)^n}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 77. ← page 24

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(13x^2 + 6x\right) S'(x) + (12x+2)\,S(x) \\
&= \left(2x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(13x^2 + 6x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (12x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 13x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 13\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 13\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 13\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(2\,(n-1)(n-2) + 13\,n - 1\right)a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 6\,n + 2\right)a_n\right)x^n + (2\,a_0)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left(2\,(n-1)(n-2)+13\,n-1\right)a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n+6\,n+2\right)a_n &=& 0,\\
2\,a_0 &=& -2,
\end{array}\right.
$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)(n-2)+13\,n-1 = (2\,n+1)(n+3)$ et $2\,(n-1)n+6\,n+2 = 2\,(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$
\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(2\,k+3)(k+4)}{2\,(k+2)^2}.
$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$
\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+4)}{2\,(k+2)^2},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+4)}{2\,(k+2)^2},
$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(k+4)}{(k+2)^2}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+3)(k+4)}{(k+2)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left((k+2)^2\right)}\\
&= \frac{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)^2\right)}\\
&= \left(\frac{1}{6}\,(n+3)^2(n+2)^2\right)\frac{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)}\\
&= \frac{2^{-n-2}(n+3)(n+2)\,(2\,n+2)!}{3\,(n+1)^2(n-1)^2(n-2)^2n^2\,(n-3)!^2}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2n+2}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n+2}\ell}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{2^{-2n-2}(-1)^n(n+3)(n+2)(2n+2)!}{3(n+1)^2(n-1)^2(n-2)^2 n^2 (n-3)!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2n+3)(n+4)|z|}{2(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z|<1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z|>1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R=1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-2n-1}(-1)^n(n+3)(n+2)(2n+2)!}{(n+1)^2(n-1)^2(n-2)^2 n^2(n-3)!^2}x^n.$$

Corrigé 78. ← page 24

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^3-2x^2\right)S''(x) - \left(5x^2+5x\right)S'(x) - (3x+1)S(x)\\
&= \left(-x^3-2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(5x^2+5x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (3x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 5x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(-(n-1)(n-2) - 5\,n + 2\right)a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n - 1\right)a_n\right)x^n + (-a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(-(n-1)(n-2) - 5\,n + 2\right)a_{n-1} + \left(-2\,(n-1)n - 5\,n - 1\right)a_n &= 0, \\ -a_0 &= -2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-(n-1)(n-2) - 5\,n + 2 = -(n+2)n$ et $-2\,(n-1)n - 5\,n - 1 = -(2\,n+1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)(k+1)}{(2\,k+3)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{2\,(n+1)}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)} \\
&= \frac{2^n(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{n+1}\,(-1)^n\,(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+3)(n+1)|z|}{(2\,n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2,2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-1)^n\,(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 79. ← page 24

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - 40x^2\right) S''(x) - \left(6x^3 + 120x\right) S'(x) - 4x^2 S(x) \\
&= \left(-x^4 - 40x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(6x^3 + 120x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 40x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 120x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 40 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 120 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}, \\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 40 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 120 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - 40 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 120 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8\right) a_{n-2} + \left(-40\,(n-1)n - 120\,n\right) a_n\right) x^n + \left(-120\, a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (-(n-2)(n-3)-6\,n+8)\,a_{n-2}+(-40\,(n-1)n-120\,n)\,a_n & = & 0,\\ -120\,a_1 & = & 0,\end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3)-6\,n+8=-(n+2)(n-1)$ et $-40\,(n-1)n-120\,n=-40\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=-\frac{2\,k+1}{80\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{80\,(k+1)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{80\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{40}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=\left(-\frac{1}{40}\right)^n a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}&=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\&=\frac{1}{2^n}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}\\&=\frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}n!^2}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!}=\frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=0\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\&=2^n\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{2\,n+1}(n+1)n!^2}{(2\,n+2)!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-1)^n\, a_0\,(2\,n)!}{40^n 2^{2\,n} n!^2}, \quad a_{2n+1} = 0. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+1)|z|^2}{40\,(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{40}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{40}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 2\sqrt{10}$, alors $\frac{1}{40}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 2\sqrt{10}$, alors $\frac{1}{40}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2\sqrt{10}$ et $R \leqslant 2\sqrt{10}$, c'est-à-dire : $R = 2\sqrt{10}$. Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $2\sqrt{10}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{40^n 2^{2\,n} n!^2} x^{2n}.$$

Corrigé 80. ← page 25

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - 2x^2\right) S''(x) - \left(6x^3 + 2x\right) S'(x) + \left(-4x^2 + 2\right) S(x) \\
&= \left(-x^4 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(6x^3 + 2x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-4x^2 + 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= -\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8\right)a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 2\,n + 2\right)a_n\right)x^n + (2\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8\right)a_{n-2} + \left(-2\,(n-1)n - 2\,n + 2\right)a_n = 0, \\ 2\,a_0 = 0, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3) - 6\,n + 8 = -(n+2)(n-1)$ et $-2\,(n-1)n - 2\,n + 2 = -2\,(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2 = 0$ (prendre $n = 0$), et par récurrence immédiate $a_{2n} = 0$ pour tout entier n (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \bigstar \cdot a_{2n} = 0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $a_0 = 0 \neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = -\frac{2\,k+5}{4\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+5}{4\,(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n+1} = a_1 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,k+5}{4\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+5}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,k+5}{2\,(k+2)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)} = \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)} = \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\prod_{k=1}^{n+2}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4}\ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-3\,n-2}\,(-1)^n\, a_1\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+4)|z|^2}{2\,(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{2}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{2}$ et $R \leqslant \sqrt{2}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-3\,n-2}\,(-1)^n\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 81. ← page 25

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(16x^3 - 2x^2\right) S''(x) + \left(112x^2 - 7x\right) S'(x) + (128x+3)\,S(x)\\
&= \left(16x^3 - 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(112x^2 - 7x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (128x+3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 16x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 112x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 7x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 128x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= 16 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 112 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 128 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 16 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 112 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 128 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= 16\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n + 112\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 7\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n + 128\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left((16\,(n-1)(n-2)+112\,n+16)\,a_{n-1}+(-2\,(n-1)n-7\,n+3)\,a_n\right)x^n+(3\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (16\,(n-1)(n-2)+112\,n+16)\,a_{n-1}+(-2\,(n-1)n-7\,n+3)\,a_n &= 0, \\ 3\,a_0 &= -3, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $16\,(n-1)(n-2)+112\,n+16 = 16\,(n+3)(n+1)$ et $-2\,(n-1)n-7\,n+3=-(2\,n-1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{16\,(k+2)}{2\,k+1}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{16\,(k+2)}{2\,k+1}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{16\,(k+2)}{2\,k+1},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 16, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=16^na_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{2\,k+1}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{2\,k+1}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}=\frac{2^n(n+1)n!^2}{(2\,n)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^nn!}=\frac{(2\,n)!}{2^nn!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_n=-\frac{16^n2^n(n+1)n!^2}{(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{16\,(n+2)|z|}{2\,n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{8}$, alors $8|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{8}$, alors $8|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{8}$ et $R \leqslant \frac{1}{8}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{8}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{8}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16^n 2^n (n+1)n!^2}{(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 82. ← page 25

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(5x^3 + 4x\right) S'(x) - \left(3x^2 + 2\right) S(x) \\
&= \left(-x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(5x^3 + 4x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \left(3x^2 + 2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 5x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 7\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 4\,n - 2\right) a_n\right) x^n + \left(-6\,a_1 x - 2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \left(-(n-2)(n-3) - 5\,n + 7\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - 4\,n - 2\right) a_n & = & 0, \\
-2\,a_0 & = & 4, \\
-6\,a_1 & = & -12,
\end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-(n-2)(n-3)-5\,n+7=-(n+1)(n-1)$ et $-(n-1)n-4\,n-2=-(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=-\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)},\qquad \text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=(-1)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(k+2)}&=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)}\\&=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}\\&=\frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}(n+1)n!^2}\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!}=\frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=2\,(-1)^n\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}\\&=2^n\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(2\,k+1)}\\&=\frac{3\cdot 2^{2\,n+2}(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+4)!}\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=-\frac{2^{-2\,n+1}\,(-1)^n\,(2\,n)!}{(n+1)n!^2},\quad a_{2n+1}=\frac{3\cdot 2^{2\,n+3}\,(-1)^n\,(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+4)!}.\qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+1)|z|^2}{n+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1,1[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{2^{2\,n}(n+1)n!^2}x^{2n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+2}\,(-1)^n\,(n+2)(n+1)n!^2}{(2\,n+4)!}x^{2n+1}.$$

Corrigé 83. ← page 26

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^3 - 20x^2\right) S''(x) - \left(7x^2 + 70x\right) S'(x) + (-3x+30)\, S(x)\\
&= \left(-2x^3 - 20x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(7x^2+70x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-3x+30)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 20x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 7x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 70x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 30\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - 20\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 70\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 30\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 20\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 70\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 30\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 20\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 7\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 70\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 30\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-2\,(n-1)(n-2) - 7\,n + 4\right) a_{n-1} + \left(-20\,(n-1)n - 70\,n + 30\right) a_n\right) x^n + (30\,a_0)\,.$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(-2\,(n-1)(n-2) - 7\,n + 4\right) a_{n-1} + \left(-20\,(n-1)n - 70\,n + 30\right) a_n &= 0, \\ 30\,a_0 &= 60, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-2\,(n-1)(n-2)-7\,n+4 = -(2\,n+1)n$ et $-20\,(n-1)n-70\,n+30 = -10\,(2\,n-1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{10\,(2\,k+1)(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{10\,(2\,k+1)(k+4)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+3)(k+1)}{10\,(2\,k+1)(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{10}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+4)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+4)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+4) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=3}^{n+2} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\ &= \left(\frac{6\,(2\,n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}\right) \\ &= \frac{6\,(2\,n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{12\,(-1)^n\,(2\,n+1)}{10^n (n+3)(n+2)(n+1)}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+3)(n+1)|z|}{10\,(2\,n+1)(n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{10}\,|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{10}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 10$, alors $\frac{1}{10}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 10$, alors $\frac{1}{10}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 10$ et $R \leqslant 10$, c'est-à-dire : $R = 10$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-10,10[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 10, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse.
En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n+1)}{10^n(n+3)(n+2)(n+1)} x^n.$$

Corrigé 84. ← page 26

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-4x^4 - x^2\right) S''(x) - \left(24x^3 + x\right) S'(x) + \left(-16x^2 + 1\right) S(x)\\
&= \left(-4x^4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \left(24x^3 + x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(-16x^2 + 1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 24x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 24 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 24 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(-4\,(n-2)(n-3) - 24\,n + 32\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - n + 1\right) a_n\right) x^n + (a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-4\,(n-2)(n-3) - 24\,n + 32\right) a_{n-2} + \left(-(n-1)n - n + 1\right) a_n &= 0,\\ a_0 &= -2, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-4\,(n-2)(n-3) - 24\,n + 32 = -4\,(n+2)(n-1)$ et $-(n-1)n - n + 1 = -(n+1)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{8\,(k+2)}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8\,(k+2)}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8\,(k+2)}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -4, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-4)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} = (-4)^n\, a_1 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} &= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{2\,n}\,(-4)^{n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-2\,n-2}\,(-4)^n\, a_1\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{4\,(n+4)|z|^2}{n+3} \underset{n \to +\infty}{\sim} 4\,|z|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 4\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ [*], qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1}\,(-4)^n\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!} x^{2n} + \frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-2}\,(-4)^n\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 85. ← page 26

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\big(2x^2 - 16x\big)\, S''(x) + (11x - 64)\, S'(x) + 9S(x) \\
&= \big(2x^2 - 16x\big) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (11x - 64) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 16x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 11x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 64 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 11 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 64 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 11 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 64 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 11 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 64 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2\,(n-1)n + 11\,n + 9)\, a_n + (-16\,(n+1)n - 64\,n - 64)\, a_{n+1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2\,(n-1)n + 11\,n + 9)\, a_n + (-16\,(n+1)n - 64\,n - 64)\, a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)n + 11\,n + 9 = (2\,n+3)(n+3)$ et $-16\,(n+1)n - 64\,n - 64 = -16\,(n+4)(n+1)$ pour tout entier n).

[*]. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2\,k+3)(k+3)}{16\,(k+4)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+3)}{16\,(k+4)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+3)}{16\,(k+4)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{16}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+3)}{(k+4)(k+1)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+3)}{(k+4)(k+1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)} \\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)} \\
&= (3\,(n+2)(n+1))\,\frac{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)} \\
&= \frac{3\cdot 2^{-n-1}\,(2\,n+2)!}{(n+3)(n+1)n^2\,(n-1)!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3\cdot 2^{-n-1} a_0\,(2\,n+2)!}{16^n (n+3)(n+1)n^2\,(n-1)!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+3)(n+3)|z|}{16\,(n+4)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{8}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 8$, alors $\frac{1}{8}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 8$, alors $\frac{1}{8}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 8$ et $R \leqslant 8$, c'est-à-dire : $R = 8$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-8,8[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 8, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n-1}\,(2\,n+2)!}{16^n (n+3)(n+1)n^2\,(n-1)!^2} x^n.$$

Corrigé 86. ← page 26

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(2x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(6x^2 + 7x\right) S'(x) + (2x-3)\, S(x)\\
&= \left(2x^3+2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(6x^2+7x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (2x-3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 6x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 7x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\,(n-1)(n-2) + 6\,n - 4 a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 7\,n - 3\right) a_n\right) x^n + (-3\, a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 2\,(n-1)(n-2) + 6\,n - 4a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 7\,n - 3\right) a_n & = & 0,\\ \hfill -3\, a_0 & = & 3, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $2\,(n-1)(n-2) + 6\,n - 4 = 2\,n^2$ et $2\,(n-1)n + 7\,n - 3 = (2\,n-1)(n+3)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+4)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+4)}, \qquad \text{donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+4)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+4)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{(2\,k+1)(k+4)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+4) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=3}^{n+2} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{6}{(n+3)^2(n+2)^2(n+1)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n+2} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)} \\
&= \frac{3 \cdot 2^{n+1} (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2 (n-4)^2 (n-5)^2 n^2\, (n-6)!^2}{(n+3)(n+2)(n+1)\,(2\,n)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3 \cdot 2^n\, (-2)^{n+1}\, (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2 (n-4)^2 (n-5)^2 n^2\, (n-6)!^2}{(n+3)(n+2)(n+1)\,(2\,n)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(n+1)^2 |z|}{(2\,n+1)(n+4)} \underset{n \to +\infty}{\sim} |z| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans

la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-1{,}1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-2)^n\,(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2(n-4)^2(n-5)^2 n^2\,(n-6)!^2}{(n+3)(n+2)(n+1)\,(2\,n)!} x^n.$$

Corrigé 87. ← page 27

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&22x^2 S''(x) + \left(-6x^3 + 44x\right) S'(x) - 12x^2 S(x)\\
&= 22x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(-6x^3 + 44x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 22x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 44x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 22 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 44 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= 22 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 44 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= 22 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + 44 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 12 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-6\,n a_{n-2} + (22\,(n-1)n + 44\,n)\,a_n\right) x^n + (44\,a_1 x)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad -6\,n a_{n-2} + (22\,(n-1)n + 44\,n)\,a_n &=& 0,\\ 44\,a_1 &=& 44, \end{array}\right.$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $22\,(n-1)n + 44\,n = 22\,(n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{3}{11\,(2\,k+3)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3}{11\,(2\,k+3)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3}{11\,(2\,k+3)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{3}{11}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(\dfrac{3}{11}\right)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,k+3} = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2\,k+1)} = \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = \frac{3^n}{11^n} \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+2)} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)} = \frac{1}{2^n\,(n+1)!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{3^n 2^{n+1} a_0\,(n+1)!}{11^n\,(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{3^n}{11^n 2^n\,(n+1)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,|z|^2}{11\,(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{11\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\infty, +\infty\right[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n 2^{n+1}\,(n+1)!}{11^n\,(2\,n+2)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{11^n 2^n\,(n+1)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 88. ← page 27

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&xS''(x) + (-16x+2)\,S'(x) - 16S(x)\\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (-16x+2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 16x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-16\,n-16)\,a_n + ((n+1)n + 2\,n+2)\,a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-16\,n-16)\,a_n + ((n+1)n+2\,n+2)\,a_{n+1} \quad = \quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n+1)n+2\,n+2 = (n+2)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{16}{k+2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{16}{k+2}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{16}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 16, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 16^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{16^n a_0}{(n+1)!}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{16\,|z|}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{16\,|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16^n}{(n+1)!} x^n.$$

Corrigé 89. ← page 27

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - 2x\right) S''(x) + (5x-3)\, S'(x) + 3S(x) \\
&= \left(x^2 - 2x\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (5x-3) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left((n-1)n + 5\,n + 3\right) a_n + \left(-2\,(n+1)n - 3\,n - 3\right) a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left((n-1)n+5\,n+3\right)a_n + \left(-2\,(n+1)n-3\,n-3\right)a_{n+1} \;=\; 0,$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-1)n+5\,n+3=(n+3)(n+1)$ et $-2\,(n+1)n-3\,n-3=-(2\,n+3)(n+1)$ pour tout entier n).

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k+3}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+3}{2\,k+3},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+3}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+3}{2\,k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\
&= \frac{2^n(n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{2^n a_0(n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}.\tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:
$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+3)|z|}{2\,n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|.$$
D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z|<2$, alors $\frac{1}{2}|z|<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z|>2$, alors $\frac{1}{2}|z|>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant 2$ et $R\leqslant 2$, c'est-à-dire : $R=2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2{,}2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+2)\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}x^n.$$

Corrigé 90. ← page 28

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :
$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :
$$\begin{aligned}
&\left(8x^4+3x^2\right)S''(x) + \left(72x^3+3x\right)S'(x) + 128x^2 S(x)\\
&= \left(8x^4+3x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(72x^3+3x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 128x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 8x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 72x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 128x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 8\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 72\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 128\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= 8\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 72\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 128\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,\\
&= 8\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 72\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 128\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left((8\,(n-2)(n-3)+72\,n-16)\,a_{n-2} + 3\,(n-1)n + 3\,n a_n\right)x^n + (3\,a_1 x)\,.
\end{aligned}$$
On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (8\,(n-2)(n-3)+72\,n-16)\,a_{n-2} + 3\,(n-1)n + 3\,n a_n & = & 0,\\ 3\,a_1 & = & -6, \end{array}\right.$$
d'où le résultat après factorisation (on a en effet $8\,(n-2)(n-3)+72\,n-16 = 8\,(n+2)^2$ et $3\,(n-1)n + 3\,n = 3\,n^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{8\,(k+2)^2}{3\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8\,(k+2)^2}{3\,(k+1)^2}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{8\,(k+2)^2}{3\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{8}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{8}{3}\right)^n a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+5)^2\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+3)^2\right)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} \left((2\,k+1)^2\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left((2\,k+1)^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{9}\,(2\,n+3)^2\right) \\
&= \frac{1}{9}\,(2\,n+3)^2
\end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -\frac{2\,(-8)^n}{3^n} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+5)^2\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+3)^2\right)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} \left((2\,k+1)^2\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left((2\,k+1)^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{9}\,(2\,n+3)^2\right) \\
&= \frac{1}{9}\,(2\,n+3)^2
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = 3^{-n-2}\,(-8)^n\,a_0 (2\,n+3)^2, \quad a_{2n+1} = -2 \cdot 3^{-n-2}\,(-8)^n\,(2\,n+3)^2. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{8\,(n+4)^2 |z|^2}{3\,(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{3}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{3}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, alors $\frac{8}{3}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, alors $\frac{8}{3}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{9}\, a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n\,(2\,n+3)^2}{3^n} x^{2n} - \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n\,(2\,n+3)^2}{3^n} x^{2n+1}.$$

Corrigé 91. ← page 28

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 + x^2\right) S''(x) + \left(8x^3 + 4x\right) S'(x) + \left(12x^2 + 2\right) S(x)\\
&= \left(x^4 + x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(8x^3 + 4x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(12x^2 + 2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 8x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 12x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 8\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2} x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n-2)(n-3) + 8\,n - 4\right) a_{n-2} + \left((n-1)n + 4\,n + 2\right) a_n\right) x^n + \left(6\,a_1 x + 2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left((n-2)(n-3) + 8\,n - 4\right) a_{n-2} + \left((n-1)n + 4\,n + 2\right) a_n & = & 0,\\
2\,a_0 & = & 0,\\
6\,a_1 & = & 6,
\end{array}\right.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-2)(n-3)+8\,n-4=(n+2)(n+1)$ et $(n-1)n+4\,n+2=(n+2)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La suite $(a_{2\,n})_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison -1. On a donc immédiatement : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2\,n}=(-1)^n\,a_0=0$. De même : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2\,n+1}=(-1)^n\,a_1=(-1)^n$.
3. D'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_{2\,n}z^n=0\sum_{n\geqslant 0}(-z)^n$ est géométrique, donc on sait montrer facilement que son rayon de convergence est $R=1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $I=\left]-1{,}1\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{2n+1}.$$

Corrigé 92. ← page 28

1. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nnx^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4+4x^2\right)S''(x)+\left(5x^3+8x\right)S'(x)-8S(x)\\
&=\left(x^4+4x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(5x^3+8x\right)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-8\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=x^4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+4x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+5x^3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+8x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-8\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n+2}+4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+5\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n+2}+8\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-8\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n+4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+5\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n+8\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-8\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n+4\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+5\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n+8\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-8\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n-2)(n-3)+5\,n-10\right)a_{n-2}+\left(4\,(n-1)n+8\,n-8\right)a_n\right)x^n+\left(-8\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad \left((n-2)(n-3)+5\,n-10\right)a_{n-2}+\left(4\,(n-1)n+8\,n-8\right)a_n &= 0,\\ \qquad -8\,a_0 &= 8,\end{cases}$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\displaystyle\sum_n=\sum_{n\text{ pair}}+\sum_{n\text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $(n-2)(n-3)+5\,n-10=(n+2)(n-2)$ et $4\,(n-1)n+8\,n-8=4\,(n+2)(n-1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2=0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n}=0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)}=a_{2n+2}=\bigstar\cdot a_{2n}=0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $a_0=-1\neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1}\neq 0$) :
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=-\frac{2\,k+1}{8\,(k+1)}.$$
En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=\frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{8\,(k+1)},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n+1}=a_1\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{2\,k+1}{8\,(k+1)},$$
expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{1}{4}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n+1}=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n a_1\prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{2\,k+1}{2\,(k+1)}$. Ensuite :
$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,k+1}{2\,(k+1)}=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}=\frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}n!^2}$$
où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :
$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n}\ell}{2^n n!}=\frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$
On a donc montré :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2\,n}=-\frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{4^n 2^{2\,n}n!^2},\quad a_{2n+1}=\frac{(-1)^n\,a_1\,(2\,n)!}{4^n 2^{2\,n}n!^2}.\tag{$\dagger$}$$
Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n}z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0=-1$). On étudie à présent $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n+1}z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:
$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right|=\left|\frac{a_{2\,n+2}z^{2\,n+2}}{a_{2\,n}z^{2\,n}}\right|=\frac{n|z|^2}{4\,(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}\,|z|^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{4}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{4}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2{,}2[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = - + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{4^n 2^{2\,n} n!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 93. ← page 29

1. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 + 2x^2\right) S''(x) + \left(6x^2 + 7x\right) S'(x) + (4x+2)\,S(x) \\
&= \left(x^3 + 2x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(6x^2 + 7x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (4x+2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 6x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 7x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left((n-1)(n-2) + 6\,n - 2 \right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 7\,n + 2 \right) a_n \right) x^n + (2\,a_0)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left((n-1)(n-2) + 6\,n - 2 \right) a_{n-1} + \left(2\,(n-1)n + 7\,n + 2 \right) a_n & = & 0, \\ 2\,a_0 & = & -4, \end{array} \right.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_n = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n-1)(n-2)+6\,n-2=(n+3)n$ et $2\,(n-1)n+7\,n+2=(2\,n+1)(n+2)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=k$ et en divisant par $a_k\neq 0$) :
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=-\frac{(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+3)}.$$
En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+3)},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+3)},$$
expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-1)^n\,a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+3)}$. Ensuite :
$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+4)(k+1)}{(2\,k+3)(k+3)}&=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+4)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+3)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}\\&=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}\\&=\left(\frac{1}{3\,(n+2)(n+1)}\right)\frac{\prod_{k=0}^{n+2}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(2\,k+1)}\\&=\frac{2^{n+1}(n+3)(n+1)n^2\,(n-1)!^2}{3\,(2\,n+2)!}\end{aligned}$$
où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :
$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)}=\frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2\,n+2}\ell\cdot\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2}\ell}{2^{n+1}\,(n+1)!}=\frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$
On a donc montré :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=-\frac{2^{n+2}\,(-1)^n\,(n+3)(n+1)n^2\,(n-1)!^2}{3\,(2\,n+2)!}.\tag{†}$$
Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n!=(n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z\in\mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:
$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|=\frac{(n+4)(n+1)|z|}{(2\,n+3)(n+3)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\,|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\,|z|.$$
D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2,2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse.
En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-1)^n\,(n+3)(n+1)n^2\,(n-1)!^2}{(2\,n+2)!} x^n.$$

Corrigé 94. ← page 29

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(3x^4+2x^2\right) S''(x) + \left(24x^3+6x\right) S'(x) + \left(36x^2+2\right) S(x)\\
&= \left(3x^4+2x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(24x^3+6x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(36x^2+2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 24x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 36x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 24\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 36\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3\sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 24\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + 36\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= 3\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + 24\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} + 36\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(3\,(n-2)(n-3)+24\,n-12\right)a_{n-2} + \left(2\,(n-1)n+6\,n+2\right)a_n\right)x^n + \left(8\,a_1 x + 2\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(3\,(n-2)(n-3)+24\,n-12\right)a_{n-2} + \left(2\,(n-1)n+6\,n+2\right)a_n = 0,\\ 2\,a_0 = 2,\\ 8\,a_1 = -16,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $3\,(n-2)(n-3) + 24\,n - 12 = 3\,(n+2)(n+1)$ et $2\,(n-1)n + 6\,n + 2 = 2\,(n+1)^2$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{3\,(k+2)}{2\,k+3}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(k+2)}{2\,k+3}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{3\,(k+2)}{2\,k+3},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{3}{2}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = \left(-\frac{3}{2}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+3}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2\,(k+2)}{2\,k+3} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -2^{-n+1}\,(-3)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(n+2)\,(n+1)!^2}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{-3\,n-1}\,(-3)^{n-1}\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^2}. \qquad (\dagger)$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{3\,(n+4)|z|^2}{2\,(n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3}{2}\,|z|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{\frac{2}{3}}$, alors $\frac{3}{2}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{\frac{2}{3}}$, alors $\frac{3}{2}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\sqrt{\frac{2}{3}}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n+1)!^2}{(2\,n+2)!} x^{2n} - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-3\,n-2}\,(-3)^n\,(2\,n+4)!}{(n+2)\,(n+1)!^2} x^{2n+1}.$$

Corrigé 95. ← page 29

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-2x^2+4x\right) S''(x) + (-7x+4)\, S'(x) - 2S(x)\\
&= \left(-2x^2+4x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (-7x+4)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 7x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n - 7\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n - 7\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-2\,(n-1)n - 7\,n - 2)\, a_n + (4\,(n+1)n + 4\,n + 4)\, a_{n+1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-2\,(n-1)n - 7\,n - 2)\, a_n + (4\,(n+1)n + 4\,n + 4)\, a_{n+1} \;=\; 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-2\,(n-1)n - 7\,n - 2 = -(2\,n+1)(n+2)$ et $4\,(n+1)n + 4\,n + 4 = 4\,(n+1)^2$ pour tout entier n).

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2\,k+1)(k+2)}{4\,(k+1)^2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{4\,(k+1)^2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{4\,(k+1)^2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $\frac{1}{4}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(k+1)^2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+1)(k+2)}{(k+1)^2} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)} \\
&= \left((n+1)^2\right) \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (k+1)} \\
&= \frac{(n+1)\,(2\,n)!}{2^n n!^2}
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n} \ell}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n} \ell}{2^n n!} = \frac{(2\,n)!}{2^n n!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{a_0 (n+1)\,(2\,n)!}{4^n 2^n n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(2\,n+1)(n+2)|z|}{4\,(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{2}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > 2$, alors $\frac{1}{2}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2$ et $R \leqslant 2$, c'est-à-dire : $R = 2$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-2,2[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\,(2\,n)!}{4^n 2^n n!^2} x^n.$$

Corrigé 96. ← page 29

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-4x^3 - 6x^2\right) S''(x) - \left(14x^2 + 9x\right) S'(x) + (-6x+3)\,S(x)\\
&= \left(-4x^3 - 6x^2\right) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(14x^2 + 9x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (-6x+3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 14x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 9x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 14 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 14 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 9 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 14 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(-4\,(n-1)(n-2) - 14\,n + 8\right) a_{n-1} + \left(-6\,(n-1)n - 9\,n + 3\right) a_n\right) x^n + \left(3\,a_0\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(-4\,(n-1)(n-2) - 14\,n + 8\right) a_{n-1} + \left(-6\,(n-1)n - 9\,n + 3\right) a_n &= 0, \\ 3\,a_0 &= 3, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-4\,(n-1)(n-2) - 14\,n + 8 = -2\,(2\,n+1)n$ et $-6\,(n-1)n - 9\,n + 3 = -3\,(2\,n-1)(n+1)$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+1$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = k$ et en divisant par $a_k \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{2\,(2\,k+3)(k+1)}{3\,(2\,k+1)(k+2)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+3)(k+1)}{3\,(2\,k+1)(k+2)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{2\,(2\,k+3)(k+1)}{3\,(2\,k+1)(k+2)},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{2}{3}$, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+2)}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\,k+3)(k+1)}{(2\,k+1)(k+2)} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=1}^{n}(2\,k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)} \\
&= \left(\frac{2\,n+1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2\,n+1}{n+1}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-2)^n\,(2\,n+1)}{3^n(n+1)}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer le rayon de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2\,(2\,n+3)(n+1)|z|}{3\,(2\,n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}\,|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{3}{2}$, alors $\frac{2}{3}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{3}{2}$, alors $\frac{2}{3}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{3}{2}$ et $R \leqslant \frac{3}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{3}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{3}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,(2\,n+1)}{3^n(n+1)} x^n.$$

Corrigé 97. ← page 30

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&-4x^2 S''(x) - \left(8x^3+12x\right) S'(x) - 16x^2 S(x)\\
&= -4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \left(8x^3+12x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 8x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 12x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 16x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} - 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= -4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - 8 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 12 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= -4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} - 12 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n},\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-8\, n a_{n-2} + \left(-4\,(n-1)n - 12\,n\right) a_n\right) x^n + \left(-12\, a_1 x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad -8\, n a_{n-2} + \left(-4\,(n-1)n - 12\,n\right) a_n & = \quad 0,\\ \qquad\qquad -12\, a_1 & = \quad -12, \end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $-4\,(n-1)n - 12\,n = -4\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $a_0 \neq 0$ (le cas où $a_0 = 0$ étant facile : on a $a_{2\,n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n = 2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k} \neq 0$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{1}{k+2}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{k+2}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{k+2},$$

expression qui est également valable pour $a_0 = 0$, puisque cette relation donne $0 = 0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n = 0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -2, et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-2)^n\, a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(k+2)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\,(k+2)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)}$$
$$= \frac{1}{2^n (n+1)!}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= (-2)^n \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2\,k+5)} \\ &= \frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!} \end{aligned}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod\limits_{k=0}^{n+1} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n+1} (2k+1) \prod\limits_{k=1}^{n+2} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+2} (2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4} \ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2} \prod\limits_{k=1}^{n+2} k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-2)^n\, a_0}{2^n\,(n+1)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{3 \cdot 2^n\,(-2)^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{2\,|z|^2}{n+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|z|^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 3\,a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n\,(n+1)!} x^{2n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(-2)^{n+2}\,(n+2)!}{(2\,n+4)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 98. ← page 30

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum\limits_{n} = \sum\limits_{n \text{ pair}} + \sum\limits_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&7x^2S''(x)+\left(3x^3+21x\right)S'(x)+12x^2S(x)\\
&=7x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(3x^3+21x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+12x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=7x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+3x^3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+21x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+12x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,\\
&=7\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+3\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+2}+21\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+12\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2},\\
&=7\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+3\sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}+21\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}+12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n},\\
&=7\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n}+3\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n}+21\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n}+12\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n},\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(3\,n+6\right)a_{n-2}+\left(7\left(n-1\right)n+21\,n\right)a_n\right)x^n+\left(21\,a_1x\right).
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad (3\,n+6)\,a_{n-2}+(7\,(n-1)n+21\,n)\,a_n &= 0,\\ 21\,a_1 &= 42,\end{cases}$$

d'où le résultat après factorisation et simplification (on a en effet $7\,(n-1)n+21\,n=7\,(n+2)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=-\frac{3}{14\,(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}}=\frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n}}{a_0}=\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3}{14\,(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_{2\,n}=a_0\prod_{k=0}^{n-1}-\frac{3}{14\,(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par $-\frac{3}{7}$, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n}=\left(-\frac{3}{7}\right)^n a_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\,(k+1)}=\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}$$
$$= \frac{1}{2^n n!}$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$a_{2n+1} = \frac{2\,(-3)^n}{7^n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)}$$
$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$
$$= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{(-3)^n\,a_0}{7^n 2^n n!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2^{n+2}\,(-3)^n\,(n+1)!}{7^n\,(2\,n+2)!}. \tag{$\dagger$}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{3\,|z|^2}{7\,(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3\,|z|^2}{7\,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, +\infty[$ puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en $(\dagger)$, on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{7^n 2^n n!} x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\,(-3)^n\,(n+1)!}{7^n\,(2\,n+2)!} x^{2n+1}.$$

Corrigé 99. ← page 30

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}, \quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x\in]-R,R[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left(-4x^4+x^2\right)S''(x)-20x^3S'(x)\\
&=\left(-4x^4+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-20x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&=-4x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-20x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\\
&=-4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2}+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n}-20\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2},\\
&=-4\sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n-20\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n,\\
&=-4\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n-20\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n,\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(-4\,(n-2)(n-3)-20\,n+40\right)a_{n-2}+\left((n-1)n\right)a_n\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \left(-4\,(n-2)(n-3)-20\,n+40\right)a_{n-2}+\left((n-1)n\right)a_n \quad=\quad 0,$$

d'où le résultat après factorisation (on a en effet $-4\,(n-2)(n-3)-20\,n+40=-4\,(n+2)(n-2)$ et $(n-1)n=(n-1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. La relation de récurrence $(*)$ permet de démontrer aisément que $a_2=0$ (prendre $n=0$), et par récurrence immédiate $a_{2n}=0$ pour tout entier n non nul (remplacer n par $2n$ dans $(*)$ pour voir en quoi la récurrence démontre ceci immédiatement : on écrit $a_{2(n+1)}=a_{2n+2}=\bigstar\cdot a_{2n}=0$ pour l'hérédité). Étudions désormais le cas où les indices sont impairs, c'est-à-dire donnons une expression explicite de a_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n+1}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $a_0=a_0\neq 0$, et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k+1$ et en divisant par $a_{2\,k+1}\neq 0$) :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad \frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=\frac{2\,(2\,k+5)(2\,k+1)}{(2\,k+3)(k+1)}.$$

En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+3}}{a_{2\,k+1}}=\frac{a_{2\,n+1}}{a_1}$ (produit télescopique), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \frac{a_{2\,n+1}}{a_1}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(2\,k+5)(2\,k+1)}{(2\,k+3)(k+1)}, \qquad \text{donc :} \quad \forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad a_{2\,n+1}=a_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2\,(2\,k+5)(2\,k+1)}{(2\,k+3)(k+1)},$$

expression qui est également valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par 4, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n+1}=4^n a_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{2\,(2\,k+3)(k+1)}$. Ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+5)(2\,k+1)}{2\,(2\,k+3)(k+1)}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+5)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+1) \prod_{k=2}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{3\,(2\,n+1)} \right) \frac{\prod_{k=0}^{n+1} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}$$

$$= \frac{2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{3\,(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2}$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) \prod_{k=1}^{n+2}(2k)}{\prod_{k=1}^{n+2}(2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+4} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2} \prod_{k=1}^{n+2} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+4} \ell}{2^{n+2}\,(n+2)!} = \frac{(2\,n+4)!}{2^{n+2}\,(n+2)!}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{4^n 2^{-2\,n-2} a_0\,(2\,n+4)!}{3\,(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2}, \quad a_{2n+1} = \frac{4^n 2^{-2\,n-2} a_1\,(2\,n+4)!}{3\,(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2}. \tag{†}$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Comme on l'a vu ci-dessus, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ a tous ses coefficients nuls : on en déduit qu'elle est de rayon de convergence infini (et que sa somme est constante égale à $a_0 = a_0$). On étudie à présent $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} \right| = \left| \frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}} \right| = \frac{4\,(n+4)n|z|^2}{(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4\,|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ (au moins), puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{3}\,a_0 + \frac{1}{3}\,a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n 2^{-2\,n-2}\,(2\,n+4)!}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)n!^2} x^{2n+1}.$$

*. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.

Corrigé 100. ← page 31

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R>0$, et on a en particulier :
$$\forall x \in]-R,R[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1},\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :
$$\begin{aligned}
&\left(x^4+x^2\right)S''(x) + \left(3x^3+2x\right)S'(x) + x^2 S(x)\\
&= \left(x^4+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(3x^3+2x\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2},\\
&= \sum_{n=4}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n,\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n-2)(n-3)+3\,n-5\right)a_{n-2} + \left((n-1)n+2\,n\right)a_n\right)x^n + \left(2\,a_1 x\right).
\end{aligned}$$
On en déduit, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0, que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad \left((n-2)(n-3)+3\,n-5\right)a_{n-2} + \left((n-1)n+2\,n\right)a_n &=& 0,\\ 2\,a_1 &=& -4,\end{array}\right.$$
d'où le résultat après factorisation (on a en effet $(n-2)(n-3)+3\,n-5 = (n-1)^2$ et $(n-1)n+2\,n = (n+1)n$ pour tout entier n), puis en changeant n en $n+2$ pour avoir exactement la relation de récurrence $(*)$ de l'énoncé.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $(*)$. De $(*)$, on déduit que $a_{2\,n}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $a_0\neq 0$ (le cas où $a_0=0$ étant facile : on a $a_{2\,n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aussi par récurrence), et dans ce cas on a (en écrivant $(*)$ pour $n=2\,k$ et en divisant par $a_{2\,k}\neq 0$) :
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = -\frac{(2\,k+1)^2}{2\,(2\,k+3)(k+1)}.$$
En faisant le produit dans cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), on a $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2\,k+2}}{a_{2\,k}} = \frac{a_{2\,n}}{a_0}$ (produit télescopique), donc :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_{2\,n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)^2}{2\,(2\,k+3)(k+1)},\qquad\text{donc :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_{2\,n} = a_0\prod_{k=0}^{n-1} -\frac{(2\,k+1)^2}{2\,(2\,k+3)(k+1)},$$
expression qui est également valable pour $a_0=0$, puisque cette relation donne $0=0$ dans ce cas d'après ce qu'on a dit plus haut, et elle est aussi valable pour $n=0$ si on adopte la convention qu'un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1 (ainsi je n'ai pas à poursuivre ma distinction de cas : je ne suppose plus rien de particulier). Simplifions à présent le produit du membre de droite. On factorise chaque terme du produit par -1, et on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2\,n} = (-1)^n a_0 \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)^2}{2\,(2\,k+3)(k+1)}$. Ensuite :
$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2\,k+1)^2}{2\,(2\,k+3)(k+1)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+3)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((2\,k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{(2\,n+1)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} \\
&= \frac{2^{-2\,n-1}\,(2\,n+2)!}{(2\,n+1)^2 (n+1) n!^2}
\end{aligned}
$$

où l'on a simplifié le produit $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ en multipliant et divisant par tous les entiers pairs qui manquent, afin de faire apparaître une factorielle :

$$
\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \prod_{k=1}^{n+1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (2k)} = \frac{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{2\,n+2} \ell \cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ pair}}}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k} = \frac{\prod_{k=1}^{2\,n+2} \ell}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2\,n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!}.
$$

En raisonnant de même avec les coefficients d'indice impair, on trouve :

$$
\begin{aligned}
a_{2n+1} &= -2\,(-1)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (2\,k+3)} \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^2\right)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1) \prod_{k=1}^{n} (2\,k+1)} \\
&= 2^n \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{\prod_{k=0}^{n} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n} (2\,k+1)} \\
&= \frac{2^{2\,n+1} n!^2}{(2\,n+2)!}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2\,n} = \frac{2^{-2\,n-1}\,(-1)^n\, a_0\,(2\,n+2)!}{(2\,n+1)^2 (n+1) n!^2}, \quad a_{2n+1} = -\frac{2^{2\,n+2}\,(-1)^n\, n!^2}{(2\,n+2)!}. \tag{†}
$$

Remarque. Je n'arrive pas à convaincre Python de simplifier quelques produits « évidents » (exemple : $(n+1)n! = (n+1)!$). J'ai laissé tomber. Je vous encourage à le faire si la situation se présente.

3. Nous allons déterminer les rayons de convergence avec la règle de D'Alembert, l'identité $(*)$ facilitant le calcul du quotient. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul et tout n au voisinage de $+\infty$:

$$
\left|\frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2\,n+2} z^{2\,n+2}}{a_{2\,n} z^{2\,n}}\right| = \frac{(n+1)^2 |z|^2}{(n+3)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2.
$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2\,n}$ diverge.
On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.
Cette étude montre que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $(*)$ (et dont nous avons explicité la forme dans la question précédente), alors l'application $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-1,1\right[$ (au moins),

puisqu'elle est la somme des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *, qui sont bien de classe C^∞ sur I en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence 1, et c'est une solution de (E) puisque, d'après la première question, cette assertion équivaut au fait que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $(*)$, ce qui est vrai par hypothèse. En utilisant l'explicitation d'une telle suite, obtenue en (†), on en déduit que les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2\,n-1} \left(-1\right)^n (2\,n+2)!}{(2\,n+1)^2 (n+1) n!^2} x^{2n} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2\,n+1} \left(-1\right)^n n!^2}{(2\,n+2)!} x^{2n+1}.$$

$*$. Chose qui paraît évidente mais devrait en principe être démontrée rigoureusement, en écrivant l'identité $\sum_{n} = \sum_{n \text{ pair}} + \sum_{n \text{ impair}}$ avec les sommes partielles et en passant à la limite.