Distance à une droite ou un plan de $\mathbb{R}^3$

Calcul d'une distance à d'un plan ou d'une droite de $\mathbb{R}^3$: cela passe par des calculs de projections orthogonales, dont les expressions sont faciles à établir dans ce contexte.

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (3, 1, 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ à P. → page 9

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0, 0, 1)$ et $\vec{e}_2 = (15, -45, 1)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0, -1, -2)$ à P. → page 9

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0, -1, 8)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (4, 0, -1)$ à D. → page 9

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2, -1, 5)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1, 0, 0)$ à P. → page 10

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-4, -5, 13)$ et $\vec{e}_2 = (6, 1, -13)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0, 1, 1)$ à P. → page 10

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1, 4, 3)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1, 447, 1)$ à P. → page 10

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1, -2, 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ à D. → page 11

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0, 1, 51)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-5, 5, 0)$ à D. → page 11

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2, 3, -2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (2, -2, -1)$ à D. → page 11

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2, 1, -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-4, 1, -3)$ à P. → page 12

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{e}_2 = (-2, -2, -3)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (25, -1, 0)$ à P. → page 12

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-3, -1, -5)$ et $\vec{e}_2 = (-1, 0, 0)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ à P. → page 12

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ 0,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (2,\ -1,\ -2)$ à D. → page 13

Exercice 14. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\ -2,\ 5)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (6,\ 0,\ 0)$ à D. → page 13

Exercice 15. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 4,\ -10)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 1,\ -8)$ à D. → page 14

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -1,\ 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-5,\ 0,\ 0)$ à D. → page 14

Exercice 17. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ 1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ 4,\ 6)$ à D. → page 14

Exercice 18. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (3,\ -1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ -1,\ -4)$ à D. → page 14

Exercice 19. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ -1,\ -2)$ à D. → page 15

Exercice 20. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-75,\ 1,\ 7)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ 1,\ -2)$ à D. → page 15

Exercice 21. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ -7,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 1,\ -8)$ à D. → page 15

Exercice 22. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-14,\ -1,\ -2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ -1,\ -1)$ à D. → page 16

Exercice 23. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0,\ 2,\ 1)$ et $\vec{e}_2 = (2,\ -1,\ -1)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ -180,\ -4)$ à P. → page 16

Exercice 24. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (12,\ 1,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ -19,\ 0)$ à D. → page 16

Exercice 25. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-5,\ 3,\ -1)$ à D. → page 17

Exercice 26. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-9,\ 13,\ -65)$ et $\vec{e}_2 = (-5,\ 1,\ -5)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ 1,\ 1)$ à P. → page 17

Exercice 27. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-1,\ 2,\ -151)$ et $\vec{e}_2 = (1,\ -6,\ 147)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-3,\ 1,\ -1)$ à P. → page 17

Exercice 28. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 2,\ -8)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-2,\ 1,\ -3)$ à D. → page 18

Exercice 29. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -2,\ -3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (27,\ 0,\ -1)$ à D. → page 18

Exercice 30. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ -4,\ -80)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 1,\ 9)$ à P. → page 19

Exercice 31. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -1,\ -2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 0,\ -1)$ à D. → page 19

Exercice 32. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ -5,\ 10)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-19,\ 0,\ 4)$ à P. → page 19

Exercice 33. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (3,\ 0,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 2,\ 1)$ à D. → page 19

Exercice 34. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-26,\ -3,\ -26)$ et $\vec{e}_2 = (56,\ -1,\ 56)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-2,\ 2,\ 1)$ à P. → page 20

Exercice 35. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-2,\ -1,\ -1)$ et $\vec{e}_2 = (-93,\ 28,\ 28)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-2,\ 1,\ 3)$ à P. → page 20

Exercice 36. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ 0,\ 0)$ à P. → page 21

Exercice 37. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (4,\ 0,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ -1,\ 1)$ à D. → page 21

Exercice 38. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (10,\ -1,\ 2)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (2,\ 1,\ -1)$ à P. → page 21

Exercice 39. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (1,\ 1,\ 4)$ et $\vec{e}_2 = (-2,\ -1,\ -7)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-9,\ -6,\ 2)$ à P. → page 22

Exercice 40. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-13,\ -3,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 0,\ -1)$ à D. → page 22

Exercice 41. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (75,\ 25,\ -34)$ et $\vec{e}_2 = (0,\ 25,\ -1)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 1,\ -9)$ à P. → page 22

Exercice 42. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ -7,\ -1)$ à D. → page 23

Exercice 43. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 4,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 1,\ -1)$ à P. → page 23

Exercice 44. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 4,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 1,\ 3)$ à D. → page 24

Exercice 45. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 1,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (8,\ -1,\ 0)$ à D. → page 24

Exercice 46. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 2,\ 2)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ -1,\ 0)$ à P. → page 24

Exercice 47. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 10)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 1,\ -2)$ à D. → page 24

Exercice 48. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ -1,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 1,\ -2)$ à P. → page 25

Exercice 49. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ 5,\ 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (5,\ -3,\ -1)$ à D. → page 25

Exercice 50. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (6,\ 0,\ 18)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (4,\ -1,\ 1)$ à D. → page 25

Exercice 51. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0,\ -1,\ 1)$ et $\vec{e}_2 = (-1,\ 0,\ 0)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ -2,\ 1)$ à P. → page 26

Exercice 52. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (3, -1, -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1, 1, 13)$ à P. → page 26

Exercice 53. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2, 0, -5)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (3, 1, -2)$ à D. → page 26

Exercice 54. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1, -2, 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1, 6, -3)$ à D. → page 27

Exercice 55. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2, -1, 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0, 3, -1)$ à D. → page 27

Exercice 56. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-1, -5, -1)$ et $\vec{e}_2 = (-12, 13, -12)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0, 0, 1)$ à P. → page 27

Exercice 57. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0, -23, -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0, 3, 1)$ à D. → page 28

Exercice 58. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (2, -1, 7)$ et $\vec{e}_2 = (-1, 0, -4)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1, 0, 0)$ à P. → page 28

Exercice 59. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2, 14, -8)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ à D. → page 29

Exercice 60. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0, 1, -2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (3, 1, 0)$ à D. → page 29

Exercice 61. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (4, -1, -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1, 2, 0)$ à P. → page 29

Exercice 62. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-13, -2, 37)$ et $\vec{e}_2 = (5, -3, -18)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-3, 1, -2)$ à P. → page 30

Exercice 63. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (6, -2, 3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0, 2, 1)$ à D. → page 30

Exercice 64. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1, 2, 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0, -1, 1)$ à D. → page 30

Exercice 65. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit → page 31

$\vec{n} = (9,\ 0,\ -4)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (3,\ 0,\ 1)$ à D.

Exercice 66. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 0,\ 7)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 1,\ 0)$ à P. → page 31

Exercice 67. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (10,\ -15,\ -11)$ et $\vec{e}_2 = (5,\ -5,\ -4)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-19,\ -1,\ 1)$ à P. → page 31

Exercice 68. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\ 1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-5,\ 0,\ 1)$ à D. → page 32

Exercice 69. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 0,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 0,\ 1)$ à D. → page 32

Exercice 70. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -11,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 124,\ 4)$ à D. → page 33

Exercice 71. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ -11,\ -110)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-5,\ 14,\ 2)$ à P. → page 33

Exercice 72. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ -1,\ -3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 3,\ 24)$ à D. → page 33

Exercice 73. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-44,\ 1,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 0,\ 0)$ à D. → page 33

Exercice 74. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (3,\ 48,\ 2)$ et $\vec{e}_2 = (-3,\ -3,\ -2)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-4,\ -14,\ 0)$ à P. → page 34

Exercice 75. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-5,\ 2,\ -14)$ à D. → page 34

Exercice 76. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ 7,\ 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ -5,\ -2)$ à D. → page 35

Exercice 77. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ -1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ -3,\ 2)$ à D. → page 35

Exercice 78. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. → page 35

Soit $\vec{n} = (-3,\ -2,\ 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ 1,\ 0)$ à P.

Exercice 79. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 416,\ 6)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 0,\ 1)$ à P. → page 35

Exercice 80. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\ 1,\ 7)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (3,\ -3,\ 25)$ à P. → page 36

Exercice 81. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ 1,\ 6)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ -3,\ -1)$ à P. → page 36

Exercice 82. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 5,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-2,\ -3,\ -4)$ à D. → page 36

Exercice 83. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ 5,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ 0,\ -1)$ à D. → page 37

Exercice 84. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-3,\ 0,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ -1,\ -1)$ à D. → page 37

Exercice 85. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-3102,\ 22,\ -141)$ et $\vec{e}_2 = (-198,\ -44,\ -9)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ -8,\ 1)$ à P. → page 37

Exercice 86. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ 35)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (63,\ 0,\ -1)$ à P. → page 38

Exercice 87. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ -1,\ 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ -1,\ 0)$ à P. → page 38

Exercice 88. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 4,\ 2)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ 0,\ 1)$ à P. → page 38

Exercice 89. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ 1,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (2,\ 0,\ -4)$ à P. → page 39

Exercice 90. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-3,\ 0,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 1,\ 2)$ à D. → page 39

Exercice 91. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -2,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ 0,\ 2)$ à D. → page 39

Exercice 92. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (2,\ 16,\ 103)$ et $\vec{e}_2 = (1,\ 31,\ 201)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (3,\ 1,\ 1)$ à P. → page 39

Exercice 93. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -2,\ 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-1,\ -1,\ -1)$ à D. → page 40

Exercice 94. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-4,\ -1,\ -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-5,\ 1,\ -20)$ à P. → page 40

Exercice 95. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (8,\ 0,\ 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (2,\ 2,\ 25)$ à D. → page 41

Exercice 96. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-49,\ -2,\ -2)$ et $\vec{e}_2 = (1,\ -2,\ -2)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ 2,\ -1)$ à P. → page 41

Exercice 97. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 2,\ 8)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ -1,\ 0)$ à D. → page 41

Exercice 98. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-24,\ -2,\ 11)$ et $\vec{e}_2 = (0,\ 2,\ 1)$. Calculer la distance de $\vec{v} = (0,\ -1,\ 1)$ à P. → page 42

Exercice 99. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 0,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (1,\ -22,\ 1)$ à D. → page 42

Exercice 100. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 16,\ -92)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Calculer la distance de $\vec{v} = (-2,\ 0,\ -1)$ à D. → page 42

Corrigé 1. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 1

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 2. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 1

$$\begin{cases} z &= 0 \\ 15\,x - 45\,y + z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (-3,\ -1,\ 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-3,\ -1,\ 0)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Corrigé 3. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 1

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{8}{65} \cdot (0,\ -1,\ 8)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{64}{65}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 17$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1041}{65},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{1041}}{\sqrt{65}}$.

Corrigé 4. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 1

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{30}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$.

Corrigé 5. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 1

$$\begin{cases} -4\,x - 5\,y + 13\,z &= 0 \\ 6\,x + y - 13\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (2,\ 1,\ 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (2,\ 1,\ 1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Corrigé 6. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection ← page 1

orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1790}{\sqrt{26}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{895\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.

Corrigé 7. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 1

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{1}{3} \cdot (1,\ -2,\ 1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{2}{3}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 3$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{7}{3},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Corrigé 8. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 1

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{5}{2602} \cdot (0,\ 1,\ 51)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{25}{2602}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 50$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{130075}{2602},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{55\sqrt{43}}{\sqrt{2602}}$.

Corrigé 9. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 1

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{8}{17} \cdot (-2,\ 3,\ -2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{64}{17}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 9$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{89}{17},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}}$.

Corrigé 10. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 1

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Corrigé 11. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 1

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -2\,x - 2\,y - 3\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1, 1, 0)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{26}{\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = 13\sqrt{2}$.

Corrigé 12. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection ← page 1

orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -3\,x - y - 5\,z &= 0 \\ -x &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (0,\,-5,\,1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0,\,-5,\,1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.

Corrigé 13. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{6}{5} \cdot (2,\,0,\,-1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{36}{5}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 9$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{9}{5},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 14. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{4}{11} \cdot (-2,\,-2,\,5)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{48}{11}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 36$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{348}{11},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{2\sqrt{87}}{\sqrt{11}}$.

Corrigé 15. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{83}{117} \cdot (-1,\ 4,\ -10)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{6889}{117}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 66$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{833}{117},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{7\sqrt{17}}{3\sqrt{13}}$.

Corrigé 16. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{5}{6} \cdot (-1,\ -1,\ 2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{25}{6}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 25$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{125}{6},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Corrigé 17. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = 5 \cdot (0,\ 1,\ 1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = 50$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 53$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = 3,$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \sqrt{3}$.

Corrigé 18. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, ← page 2

mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{6}{11} \cdot (3,\ -1,\ 1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{36}{11}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 18$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{162}{11},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Corrigé 19. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = 1 \cdot (1,\ -1,\ 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = 2$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 6$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = 4,$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = 2$.

Corrigé 20. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{62}{5675} \cdot (-75,\ 1,\ 7)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{3844}{5675}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 6$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{30206}{5675},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{30206}}{5\sqrt{227}}$.

Corrigé 21. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{54} \cdot (2,\ -7,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{54}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 65$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{3509}{54},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{11\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}$.

Corrigé 22. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{17}{201} \cdot (-14,\ -1,\ -2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{289}{201}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 3$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{314}{201},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{314}}{\sqrt{201}}$.

Corrigé 23. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 2

$$\begin{cases} 2\,y + z &= 0 \\ 2\,x - y - z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (-1,\ 2,\ -4)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 2,\ -4)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{344}{\sqrt{21}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{344}{\sqrt{21}}$.

Corrigé 24. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{7}{146} \cdot (12,\ 1,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{49}{146}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 362$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{52803}{146},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{3\sqrt{5867}}{\sqrt{146}}$.

Corrigé 25. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{3} \cdot (-1, -1, 1).$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{3}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 35$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{104}{3},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{2\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$.

Corrigé 26. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 3

$$\begin{cases} -9\,x + 13\,y - 65\,z &= 0 \\ -5\,x + y - 5\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (0, -5, -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0, -5, -1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{6}{\sqrt{26}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.

Corrigé 27. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection ← page 3

orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -x + 2\,y - 151\,z &= 0 \\ x - 6\,y + 147\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (153,\ 1,\ -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (153,\ 1,\ -1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{457}{\sqrt{23411}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{457}{\sqrt{23411}}$.

Corrigé 28. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{8}{23} \cdot (1,\ 2,\ -8)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{192}{23}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 14$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{130}{23},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{130}}{\sqrt{23}}$.

Corrigé 29. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{12}{7} \cdot (-1,\ -2,\ -3)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{288}{7}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 730$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{4822}{7},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{4822}}{\sqrt{7}}$.

Corrigé 30. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{724}{4\sqrt{401}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{181}{\sqrt{401}}$.

Corrigé 31. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{6} \cdot (-1,\ -1,\ -2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{6}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 2$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{11}{6},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$.

Corrigé 32. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{129}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{2}{\sqrt{129}}$.

Corrigé 33. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ ← page 3

sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v},\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{10}\cdot(3,\,0,\,1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{10}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 5$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v},D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{49}{10},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v},D) = \dfrac{7}{\sqrt{10}}$.

Corrigé 34. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 3

$$\begin{cases} -26\,x - 3\,y - 26\,z &= 0 \\ 56\,x - y + 56\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x,y,z) = (1,\,0,\,-1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (1,\,0,\,-1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v},P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v},\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v},\vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2}\cdot\|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v},\vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v},P) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 35. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 3

$$\begin{cases} -2\,x - y - z &= 0 \\ -93\,x + 28\,y + 28\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0, -1, 1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \sqrt{2}$.

Corrigé 36. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Corrigé 37. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{3}{17} \cdot (4, 0, -1).$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{9}{17}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 3$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{42}{17},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{17}}$.

Corrigé 38. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 3

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{17}{\sqrt{105}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{17}{\sqrt{105}}$.

Corrigé 39. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 4

$$\begin{cases} x + y + 4\,z &= 0 \\ -2\,x - y - 7\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (-3,\ -1,\ 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-3,\ -1,\ 1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{35}{\sqrt{11}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{35}{\sqrt{11}}$.

Corrigé 40. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{179} \cdot (-13,\ -3,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{179}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 1$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{178}{179},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{178}}{\sqrt{179}}$.

Corrigé 41. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ ← page 4

sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 75\,x + 25\,y - 34\,z & = & 0 \\ 25\,y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (-11,\ -1,\ -25)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-11,\ -1,\ -25)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{213}{3\sqrt{83}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{71}{\sqrt{83}}$.

Corrigé 42. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = 3 \cdot (1,\ -1,\ 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = 18$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 51$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = 33,$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \sqrt{33}$.

Corrigé 43. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 44. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{5}{17} \cdot (1,\, 4,\, 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{25}{17}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 11$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{162}{17},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

Corrigé 45. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{7}{2} \cdot (1,\, 1,\, 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{49}{2}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 65$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{81}{2},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 46. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{3}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = 1$.

Corrigé 47. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un ← page 4

vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{19}{102} \cdot (-1,\ 1,\ 10)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{361}{102}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 5$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{149}{102},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{149}}{\sqrt{102}}$.

Corrigé 48. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Corrigé 49. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{17}{29} \cdot (0,\ 5,\ 2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{289}{29}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 35$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{726}{29},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{11\sqrt{6}}{\sqrt{29}}$.

Corrigé 50. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{7}{10} \cdot (1,\ 0,\ 3)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{49}{10}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 18$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{131}{10},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{131}}{\sqrt{10}}$.

Corrigé 51. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 4

$$\begin{cases} -y + z &= 0 \\ -x &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (0,\ 1,\ 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0,\ 1,\ 1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 52. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{17}{\sqrt{11}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{17}{\sqrt{11}}$.

Corrigé 53. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection ← page 5

orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4}{29} \cdot (-2,\ 0,\ -5)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{16}{29}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 14$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{390}{29},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{390}}{\sqrt{29}}$.

Corrigé 54. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{19}{9} \cdot (-1,\ -2,\ 2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{361}{9}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 46$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{53}{9},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$.

Corrigé 55. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{3}{5} \cdot (-2,\ -1,\ 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{9}{5}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 10$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{41}{5},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 56. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. ← page 5

Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x - 5\,y - z & = & 0 \\ -12\,x + 13\,y - 12\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (1,\ 0,\ -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (1,\ 0,\ -1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 57. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{7}{53} \cdot (0,\ -23,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{490}{53}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 10$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{40}{53},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{53}}$.

Corrigé 58. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 5

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x - y + 7\,z & = & 0 \\ -x - 4\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (4,\ 1,\ -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (4,\ 1,\ -1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Corrigé 59. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{5}{66} \cdot (1,\ 7,\ -4)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{25}{66}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 2$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{107}{66},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{107}}{\sqrt{66}}$.

Corrigé 60. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{5} \cdot (0,\ 1,\ -2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{5}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 10$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{49}{5},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 61. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{3\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Corrigé 62. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 5

$$\begin{cases} -13\,x - 2\,y + 37\,z &= 0 \\ 5\,x - 3\,y - 18\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (3,\,-1,\,1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (3,\,-1,\,1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{12}{\sqrt{11}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{12}{\sqrt{11}}$.

Corrigé 63. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 5

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{1}{49} \cdot (6,\,-2,\,3)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{49}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 5$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{244}{49},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{2\sqrt{61}}{7}$.

Corrigé 64. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ ← page 5

sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{2}{5} \cdot (1,\, 2,\, 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{4}{5}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 2$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{6}{5},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 65. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ ← page 5
sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{23}{97} \cdot (9,\, 0,\, -4)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{529}{97}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 10$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{441}{97},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{21}{\sqrt{97}}$.

Corrigé 66. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ ← page 6
sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

Corrigé 67. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ ← page 6
sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} 10\,x - 15\,y - 11\,z &= 0 \\ 5\,x - 5\,y - 4\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (-1,\ 3,\ -5)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 3,\ -5)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{11}{\sqrt{35}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{11}{\sqrt{35}}$.

Corrigé 68. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{11}{6} \cdot (-2,\ 1,\ 1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{121}{6}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 26$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{35}{6},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$.

Corrigé 69. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{1}{2} \cdot (1,\ 0,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{2}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 1$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{2},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 70. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{682}{61} \cdot (-1,\ -11,\ 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{930248}{61}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 15392$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{8664}{61},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{38\sqrt{6}}{\sqrt{61}}$.

Corrigé 71. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{374}{11\sqrt{101}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{34}{\sqrt{101}}$.

Corrigé 72. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{15}{2} \cdot (0,\ -1,\ -3)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1125}{2}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 586$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{47}{2},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{47}}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 73. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, ← page 6

mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{44}{1937} \cdot (-44,\, 1,\, 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1936}{1937}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 1$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{1937},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{1}{\sqrt{1937}}$.

Corrigé 74. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 6

$$\begin{cases} 3\,x + 48\,y + 2\,z &= 0 \\ -3\,x - 3\,y - 2\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (2,\, 0,\, -3)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (2,\, 0,\, -3)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{8}{\sqrt{13}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

Corrigé 75. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{7}{3} \cdot (1,\, -1,\, -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{49}{3}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 225$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{626}{3},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{626}}{\sqrt{3}}$.

Corrigé 76. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{39}{53} \cdot (0,\, 7,\, 2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1521}{53}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 30$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{69}{53},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{69}}{\sqrt{53}}$.

Corrigé 77. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{5}{6} \cdot (2,\, -1,\, 1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{25}{6}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 13$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{53}{6},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{53}}{\sqrt{6}}$.

Corrigé 78. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 6

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Corrigé 79. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\|\frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{6}{\sqrt{173093}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{6}{\sqrt{173093}}$.

Corrigé 80. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\|\frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{166}{3\sqrt{6}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{83\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Corrigé 81. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\|\frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{9}{\sqrt{37}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{9}{\sqrt{37}}$.

Corrigé 82. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{7}{9} \cdot (1,\, 5,\, 1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{49}{3}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 29$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{38}{3},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{38}}{\sqrt{3}}$.

Corrigé 83. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{26} \cdot (0,\ 5,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{26}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 2$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{51}{26},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{51}}{\sqrt{26}}$.

Corrigé 84. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{2}{5} \cdot (-3,\ 0,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{8}{5}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 3$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{7}{5},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 85. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 7

$$\begin{cases} -3102\,x + 22\,y - 141\,z &= 0 \\ -198\,x - 44\,y - 9\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (1,\ 0,\ -22)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (1,\ 0,\ -22)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{22}{\sqrt{485}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{22}{\sqrt{485}}$.

Corrigé 86. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{28}{\sqrt{1227}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{28}{\sqrt{1227}}$.

Corrigé 87. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 88. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

Corrigé 89. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = 2\sqrt{2}$.

Corrigé 90. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 7

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{1}{2} \cdot (-3,\ 0,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{5}{2}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 6$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{7}{2},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 91. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 8

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{1}{5} \cdot (-1,\ -2,\ 0)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{5}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 5$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{24}{5},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Corrigé 92. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection ← page 8

orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} 2\,x + 16\,y + 103\,z &= 0 \\ x + 31\,y + 201\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (1,\ -13,\ 2)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (1,\ -13,\ 2)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{8}{\sqrt{174}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{87}}$.

Corrigé 93. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 8

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{1}{9} \cdot (1,\ -2,\ 2)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{9}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 3$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{26}{9},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

Corrigé 94. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. On a : ← page 8

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{39}{3\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{13}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 95. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 8

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{33}{17} \cdot (4,\ 0,\ 1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1089}{17}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 633$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{9672}{17},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{2\sqrt{2418}}{\sqrt{17}}$.

Corrigé 96. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^\perp$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^\perp$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 8

$$\begin{cases} -49\,x - 2\,y - 2\,z &= 0 \\ x - 2\,y - 2\,z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (0,\ 1,\ -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0,\ 1,\ -1)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^\perp$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 97. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 8

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -\frac{1}{69} \cdot (1,\ 2,\ 8)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1}{69}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 2$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{137}{69},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{137}}{\sqrt{69}}$.

Corrigé 98. On sait que la distance de $\vec{v}$ à P est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur P. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P, alors on sait que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan P s'obtient en soustrayant à $\vec{v}$ son projeté sur la droite $D = P^{\perp}$, qui se calcule *via* le produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Trouvons un tel vecteur. Comme $D = P^{\perp}$, cela revient à trouver un vecteur orthogonal à P. Soit $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il suffit d'avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 8

$$\begin{cases} -24\,x - 2\,y + 11\,z &= 0 \\ 2\,y + z &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(x, y, z) = (1,\ -1,\ 2)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (1,\ -1,\ 2)$ est un vecteur normal de P, donc c'est un vecteur directeur de $D = P^{\perp}$ et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. On a :

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Ne simplifions pas pour l'instant cette expression, ou l'on perdra une simplification lors du calcul du distance. On a en effet :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, P) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Corrigé 99. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 8

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = -1 \cdot (-1,\ 0,\ -1)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = 2$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 486$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = 484,$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = 22$.

Corrigé 100. On sait que la distance de $\vec{v}$ à D est minimisée par la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D. Or, si l'on note p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, ← page 8

mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{10}{969} \cdot (1,\ 16,\ -92)\,.$$

On en déduit : $\|p(\vec{v})\|^2 = \frac{300}{323}$. On a aussi, facilement : $\|\vec{v}\|^2 = 5$. On conclut avec le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(\vec{v}, D)^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|p(\vec{v})\|^2 = \frac{1315}{323},$$

donc : $\mathrm{d}(\vec{v}, D) = \dfrac{\sqrt{1315}}{\sqrt{323}}$.