Distance à un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

💡 Révisions de première année sur les projecteurs orthogonaux. Nous sommes dans le cas particulier d'un plan (dont on connaît un vecteur normal) ou d'une droite de $\mathbb{R}^3$: leurs expressions sont alors faciles à établir. Voir le cours.

Exercice 1. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 17

$$A = \begin{pmatrix} -33 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 12\,a & 0 \\ 0 & 3\,a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 17

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -35 & -1 \\ 1 & 96 & 0 & 0 \\ 14 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 17

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -3 \\ 0 & -28 & -23 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a & -7\,a & 7\,a \\ a & a & -a \\ -9\,a & a & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 5. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 18

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -10 & -19 & 0 \\ 0 & -2 & 120 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 & -2\,a + b \\ -2\,a & b & 2\,a - b \\ a - 10\,b & 2\,a & a + 2\,b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 6. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 19

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 7. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 19

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a-b & -a-b-c & -2\,a-b+3\,c \\ b & a+b & -4\,a+3\,b \\ -a & 5\,b-c & -a+b-8\,c \end{pmatrix} \mid (a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 8. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 20

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 \\ 15 & 1 & 1 & -9 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 9. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 20

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 8\,a & 0 & -a \\ a & -a & -a \\ 3\,a & 0 & 3\,a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 10. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 21

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 58 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 11. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 21

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 19 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a-3\,c & 3\,a+3\,b-c & -a+97\,b-6\,c \\ 27\,a+2\,b+5\,c & -a-b+c & 5\,a-b+38\,c \\ 5\,a+b+c & -a+2\,b-9\,c & -a+b-c \end{pmatrix} \mid (a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 12. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 22

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a & -2\,a & a \\ -11\,a & 0 & 0 \\ -4\,a & 0 & 2\,a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 13. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 22

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 9 \\ -5 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 14. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 16\,a - b & -452\,a + b \\ 3\,a - 5\,b & 2\,a \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 15. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 23

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid 21\,a + 19\,b + 2\,c - 25\,d = 0 \right\}.$$

Exercice 16. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 23

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & -a + 99\,b & 12\,a + b \\ -a - b & -2\,a + 3\,b & a - 2\,b \\ 2\,a & b & a - b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 17. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 24

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -16 & 32 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -4\,a & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 18. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 24

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 9\,a & 193\,a + 5\,b - c \\ -a - 4\,b + c & -a - 2\,b - c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 19. On munit $M_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 25

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} b & a + b & -2\,b \\ a & -a - 2\,b & 24\,b \\ a + b & 2\,a + 21\,b & 34\,a - 3\,b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 20. On munit $M_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 26

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 18 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

à $S_4(\mathbb{R})$.

Exercice 21. On munit $M_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 26

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a - 4\,b & 7\,b & a \\ -a - 5\,b & 7\,b & a \\ -2\,a + b & 6\,a - 3\,b & 8\,b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 22. On munit $M_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 27

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 \\ 0 & -142 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 2\,a - b & -9\,b & a \\ 4\,a + 2\,b & -b & a + 8\,b \\ 13\,a & a + 4\,b & 2\,a + b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 23. On munit $M_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 27

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -8\,a + 2\,b & b - c \\ -a - 2\,b & -2\,a + b - 6\,c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 24. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 28

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} b & -a+b \\ 5\,a+2\,b & a-6\,b \end{pmatrix} \mid (a,\,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 25. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 29

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -47 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a+b & a & -b \\ -2\,b & a-5\,b & -2\,b \\ -a+b & -2\,a-b & a-b \end{pmatrix} \mid (a,\,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 26. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 29

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 27. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 30

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a-b & -3\,b \\ a-b & a+7\,b \end{pmatrix} \mid (a,\,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 28. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 30

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 25\,a & a+3\,b \\ -b & 5\,a-5\,b \end{pmatrix} \mid (a,\,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 29. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 31

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -19 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 30. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 31

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -15 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 31. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 31

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & 58\,a+2\,b & -a+b-2\,c \\ a-b+2\,c & a-b & -2\,b+3\,c \\ 3\,a+b-c & b+c & -86\,c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 32. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 32

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 4\,b & -2\,a & -2\,a-b \\ 14\,b & b & a+2\,b \\ 2\,a+6\,b & -a & a-82\,b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 33. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 33

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 2\,a-b-3\,c & -a-b+c & -a-b-c \\ a+3\,b & a-c & -a+2\,c \\ -b+c & -2\,a-2\,c & -2\,a+2\,c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 34. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 33

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -15\,a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 35. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 34

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -9 & -27 & -10 \\ 5 & 2 & -1 & 90 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 36. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 34

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -82 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 37. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 34

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -11 & 1 \\ -1 & -2 & -17 & 21 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \\ -5 & 14 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 38. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 35

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 39. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 35

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 40. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 36

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\,a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 41. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 36

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 42. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 36

$$A = \begin{pmatrix} 96 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 43. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 37

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a+b-c & -b & -3\,a-2\,b-c \\ -a & -10\,a-c & 7\,a+b+4\,c \\ b+2\,c & -4\,a+2\,c & -a+b \end{pmatrix} \mid (a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 44. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 37

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 45. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 38

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 46. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 38

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} b & 21\,a-b \\ 2\,b & -a-b \end{pmatrix} \mid (a,\,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 47. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 39

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 4\,a+b & -a-b & b \\ 2\,b & a+b & -a+2\,b \\ b & a-b & -52\,a+b \end{pmatrix} \mid (a,\,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 48. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 39

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 25\,a & a \\ -a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 49. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 40

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 4 \\ -9 & 12 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+b-5\,c & -a-2\,b-c \\ 4\,a+b+7\,c & 2\,a & 4\,a+b-2\,c \\ -2\,a-4\,b+2\,c & 2\,a-b+c & 2\,a+b \end{pmatrix} \mid (a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 50. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 40

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid 3\,a-12\,b+15\,c+37\,d=0 \right\}.$$

Exercice 51. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 41

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -12 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 52. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 41

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid 116\,a+781\,b+85\,c+101\,d=0 \right\}.$$

Exercice 53. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 42

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & -18 & -5 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 54. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 42

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -5\,a & -b \\ 32\,a-104\,b & -2\,a+b \end{pmatrix} \mid (a,\,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 55. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 42

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 14 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 56. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 43

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -29 & -3 \\ -5 & 1 & -17 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 57. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 43

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 58. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 44

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 11 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 59. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 44

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 60. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 44

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -17 & -1 & 0 \\ -12 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 61. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 45

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid 4\,a + b - c + 3\,d = 0 \right\}.$$

Exercice 62. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 45

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 73 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -7\,a+2\,b+4\,c & -4\,a+2\,b-2\,c & 3\,a+b-9\,c \\ -b & 2\,a+b-c & -13\,a-b+c \\ -b+c & -2\,a+8\,b-4\,c & -2\,a+3\,b+c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 63. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 46

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 64. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 46

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 3\,b & a-b & b \\ -a & a-2\,b & a+4\,b \\ 54\,a & -7\,a+b & -a+b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 65. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 47

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -45 & -1 \\ 2088 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 66. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 47

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 4\,a \\ 5\,a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 67. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 47

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -2\,a-3\,b & a-10\,b \\ a+4\,b & b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 68. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 48

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -6 & -4 & 0 \\ 1 & 23 & 4 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 7\,a & -a & -117\,a \\ 30\,a & a & -4\,a \\ a & 0 & -2\,a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 69. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 48

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -101 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 5\,c & -a+b \\ -3\,b & 120\,a - 3\,b \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 70. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 49

$$A = \begin{pmatrix} -18 & -12 \\ 22 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + 3\,b = 0 \right\}.$$

Exercice 71. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 50

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 72. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 50

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & -17 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a-2\,b & 21\,a+b & 0 \\ a-5\,b & -b & -a-b \\ -a-4\,b & -a-b & 15\,a+2\,b \end{pmatrix} \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 73. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 51

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 74. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 51

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -25 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

à $S_4(\mathbb{R})$.

Exercice 75. On munit $M_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 51

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 9\,b - 2\,c & 223\,a - b + c & -a - b \\ a - c & -3\,a - b - 3\,c & -6\,a + b + c \\ -c & -15\,b + 2\,c & -a - b - c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 76. On munit $M_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 52

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -2\,a + 3\,b - c & 2\,a + b - 6\,c & a - 3\,b \\ a - 4\,c & -10\,a + 11\,b + 3\,c & a + b + c \\ 2\,a - c & 104\,a - 3\,c & -2\,a - b + c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 77. On munit $M_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 53

$$A = \begin{pmatrix} -28 & 2 & 0 & 0 \\ -11 & 1 & 0 & 125 \\ 1 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

à $S_4(\mathbb{R})$.

Exercice 78. On munit $M_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 53

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 23 & -1 & -3 \\ 1 & 19 & -2 \end{pmatrix}$$

à $S_3(\mathbb{R})$.

Exercice 79. On munit $M_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 53

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & -8 \\ -1 & -2 & -1 & 19 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -23 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

à $S_4(\mathbb{R})$.

Exercice 80. On munit $M_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 54

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -1 & 67 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & 3\,a & -13\,a \\ a & 3\,a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 81. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 54

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 82. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 55

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 83. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 55

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 23 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 84. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 55

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -9 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 85. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 56

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 86. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 56

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a+b+c & a+53\,b+10\,c & -a+13\,b-8\,c \\ 2\,a-2\,b & 14\,a-8\,b+2\,c & -a+b+c \\ c & 4\,a+b+2\,c & b \end{pmatrix} \mid (a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 87. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 57

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -13 \\ -1 & 21 & 1 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 88. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 57

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -351 & -41 \\ 3 & 8 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 21 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 89. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 57

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ -22\,a & -a & -8\,a \\ -11\,a & -a & -4\,a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 90. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 58

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -33 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -19 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 91. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 58

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -49\,a - 8\,b + 24\,c & a - c \\ -a - 2\,b + c & -21\,a - b + 2\,c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 92. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 59

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 57 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid 5\,a - 5\,b - 7\,c + 2\,d = 0 \right\}.$$

Exercice 93. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 59

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 94. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 60

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 95. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 60

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 63 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 96. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 61

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 4\,a & -3\,a \\ 3\,a & -8\,a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 97. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 61

$$A = \begin{pmatrix} 23 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 274 & 2 & 38 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 98. On munit $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 61

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 9 & 0 & -2 \\ 7 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a - b - 6\,c & 90315\,c & -3\,a + b - 2\,c \\ b - 3\,c & 16\,a + b - 8\,c & 6\,a + b + 5\,c \\ -9\,a + b + c & a - b & a + 2\,b - c \end{pmatrix} \mid (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 99. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 62

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

au sous-espace vectoriel F de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2\,a \\ -3\,a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 100. On munit $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice : → page 62

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$.

Corrigé 1. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

← page 1

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M \right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = -33 \times 12 = -396,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 153$. Ainsi : $p(A) = -\frac{44}{17}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 1091$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{1123}{17},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{1123}{17}}$, d'où le résultat.

Corrigé 2. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

← page 1

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{1}{2} & -6 \\ 2 & 0 & -\frac{131}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{131}{2} & 0 & -2 \\ 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6^2 + 2^2 + \left(\frac{131}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{131}{2}\right)^2 + 2^2 + 6^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8671}. \end{aligned}$$

Corrigé 3. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

← page 1

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\| \begin{pmatrix} -4 & \frac{9}{2} & -2 \\ \frac{9}{2} & -28 & -11 \\ -2 & -11 & 1 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 28^2 + 11^2 + 2^2 + 11^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{2183}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 4. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$, avec : ← page 1

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -9 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|} M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|} M \right\rangle \frac{1}{\|M\|} M = \frac{\langle A, M \rangle}{\|M\|^2} M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M \rangle = -2 \times 1 + 2 \times 7 + 2 \times 7 + 8 \times 1 + 1 \times 1 - 1 \times 1 = 34,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 185$. Ainsi : $p(A) = \frac{34}{185} M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A, F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 78$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A, F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{13274}{185},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A, F) = \sqrt{\frac{13274}{185}}$, d'où le résultat.

Corrigé 5. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 1

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|} E_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{28}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|} U_2 = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -28 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{67}{3} \sqrt{2} V_1 + \frac{467}{15} V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 14867$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{49171}{25}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{322504}{25},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{2}{5}\sqrt{80626}$, d'où le résultat.

Corrigé 6. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 1

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{23}. \end{aligned}$$

Corrigé 7. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 2

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\\|E_1\\|}E_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{33}{25} & -\frac{33}{25} & -\frac{41}{25} \\ 1 & \frac{33}{25} & \frac{43}{25} \\ -\frac{8}{25} & 5 & \frac{17}{25} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\\|U_2\\|}U_2 = \frac{1}{30\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -33 & -33 & -41 \\ 25 & 33 & 43 \\ -8 & 125 & 17 \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2}\langle E_3, V_i\rangle V_i = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{11}{8} & \frac{21}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{9}{8} \\ 0 & \frac{7}{8} & -\frac{61}{8} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\\|U_3\\|}U_3 = \frac{1}{2\sqrt{1110}}\begin{pmatrix} -3 & -11 & 21 \\ 3 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & -61 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle V_2 + \langle A, V_3\rangle V_3 + \langle A, V_4\rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{1}{5}V_1 + \frac{84}{65}\sqrt{26}V_2 + \frac{4}{185}\sqrt{1110}V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 56$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{105773}{2405}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{28907}{2405},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{28907}{2405}}$, d'où le résultat.

Corrigé 8. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 2

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 & \frac{13}{2} & -1 & 0 \\ \frac{13}{2} & 1 & -2 & -\frac{9}{2} \\ -1 & -2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{307}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 9. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$, avec : ← page 2

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M \right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = 1\times 1 + 1\times 1 - 1\times 1 - 2\times 1 - 1\times 3 = -4,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 86$. Ainsi : $p(A) = -\frac{2}{43}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 9$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{379}{43},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{379}{43}}$, d'où le résultat.

Corrigé 10. Notons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 2

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -4 & \frac{59}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{59}{2} & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 4^2 + \left(\frac{59}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{59}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{3535}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 11. Notons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 2

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 27 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 3 & 97 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 5 & 1 & 38 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 27 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 97 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 5 & 1 & 38 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 27 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1 \rVert} E_1 = \frac{1}{\sqrt{793}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 27 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 97 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{36}{793} & \frac{2487}{793} & \frac{76885}{793} \\ \frac{2558}{793} & -\frac{829}{793} & -\frac{613}{793} \\ \frac{973}{793} & \frac{1550}{793} & \frac{757}{793} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2 \rVert} U_2 = \frac{1}{\sqrt{5929018342}} \begin{pmatrix} 36 & 2487 & 7 \\ 2558 & -829 & - \\ 973 & 1550 & \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 5 & 1 & 38 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} -\frac{12802050}{3738347} & -\frac{7765916}{3738347} & \frac{2872069}{3738347} \\ -\frac{23668536}{3738347} & \frac{5080870}{3738347} & \frac{133877655}{3738347} \\ -\frac{3952212}{3738347} & -\frac{31569142}{3738347} & -\frac{1906852}{3738347} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\lVert U_3 \rVert} U_3 = \frac{1}{5\sqrt{790302354054422}} \begin{pmatrix} -1280205 \\ -2366853 \\ -395221 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3 + \langle A, V_4 \rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{3}{793}\sqrt{793} V_1 - \frac{67513}{5929018342}\sqrt{5929018342} V_2 - \frac{60026931}{790302354054422}\sqrt{790302354054422} V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 383$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{564388004}{105702113}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{39919521275}{105702113},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 5\sqrt{\frac{1596780851}{105702113}}$, d'où le résultat.

Corrigé 12. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$, avec : ← page 2

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -11 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M \right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = 1\times 1 + 1\times 2 - 1\times 1 - 4\times 11 + 2\times 4 - 1\times 2 = -36,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 147$. Ainsi : $p(A) = -\frac{12}{49}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 251$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{11867}{49},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{7}\sqrt{11867}$, d'où le résultat.

Corrigé 13. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 3

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + } \\ &= \sqrt{67}. \end{aligned}$$

Corrigé 14. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 3

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 16 & -452 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 16 & -452 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 16 & -452 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\\|E_1\\|} E_1 = \frac{1}{\sqrt{204573}} \begin{pmatrix} 16 & -452 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{65615}{68191} & -\frac{4581}{68191} \\ -\frac{340472}{68191} & \frac{322}{68191} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\\|U_2\\|} U_2 = \frac{1}{\sqrt{120247600254}} \begin{pmatrix} -65615 & -4581 \\ -340472 & 322 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{7694}{204573}\sqrt{204573}V_1 + \frac{346603}{60123800127}\sqrt{120247600254}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 294$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{86220534}{293899}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{185772}{293899},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 2\sqrt{\frac{46443}{293899}}$, d'où le résultat.

Corrigé 15. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on note que F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto 21\,a + 19\,b + 2\,c - 25\,d$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors : ← page 3

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N \rangle}{\|N\|^2} N, \quad \text{et donc :} \quad \mathrm{d}(A,F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on note que, connaissant la définition (pratique) du produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in F \iff 21\,a + 19\,b + 2\,c - 25\,d = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ 2 & -25 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 21 & 19 \\ 2 & -25 \end{pmatrix} \right)^{\perp},$$

donc : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 21 & 19 \\ 2 & -25 \end{pmatrix} \right)^{\perp}$, et un vecteur normal de F est $N = \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ 2 & -25 \end{pmatrix}$. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = -125$, et : $\|N\|^2 = 1431$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A,F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{125}{477}\sqrt{159}.$$

Corrigé 16. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 3

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 & 12 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 99 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 12 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 99 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 12 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1 \rVert} E_1 = \frac{1}{\sqrt{157}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 12 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 99 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{251}{157} & \frac{15449}{157} & \frac{1285}{157} \\ -\frac{251}{157} & \frac{283}{157} & -\frac{220}{157} \\ \frac{188}{157} & 1 & -\frac{63}{157} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2 \rVert} U_2 = \frac{1}{\sqrt{240641279}} \begin{pmatrix} 251 & 15449 & 1285 \\ -251 & 283 & -220 \\ 188 & 157 & -63 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{83}{157}\sqrt{157} V_1 - \frac{68657}{240641279}\sqrt{240641279} V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\lVert p(A) \rVert^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \lVert A \rVert^2$, et comme $\lVert A \rVert^2 = 221$ (calcul direct) et : $\lVert p(A) \rVert^2 = \frac{97279476}{1532747}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \lVert A \rVert^2 - \lVert p(A) \rVert^2 = \frac{241457611}{1532747},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{241457611}{1532747}}$, d'où le résultat.

Corrigé 17. Notons $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\lVert \cdot \rVert$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \lVert A - p(A) \rVert$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\lVert M \rVert} M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices : ← page 3

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\lVert M \rVert} M \right\rangle \frac{1}{\lVert M \rVert} M = \frac{\langle A, M \rangle}{\lVert M \rVert^2} M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M \rangle = 4 \times 1 + 16 \times 4 - 32 \times 1 = 36,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\lVert M \rVert^2 = 18$. Ainsi : $p(A) = 2M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\lVert p(A) \rVert^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \lVert A \rVert^2$, et comme $\lVert A \rVert^2 = 1297$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \lVert A \rVert^2 - \lVert p(A) \rVert^2 = 1225,$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 35$, d'où le résultat.

Corrigé 18. Notons $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\lVert \cdot \rVert$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \lVert A - p(A) \rVert$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 3

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 9 & 193 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 9 & 193 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus qui engendrent F forment une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), et on en déduit : $\dim(F) = 3 = 4 - 1 = \dim(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) - 1$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors :

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N \rangle}{\lVert N \rVert^2} N, \quad \text{et donc : } \mathrm{d}(A,F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\lVert N \rVert}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on rappelle qu'un vecteur normal $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est, par définition, orthogonal à tous les vecteurs de F, et par linéarité c'est vrai si et seulement si N est orthogonal à une famille génératrice de F, donc aux vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix} 9 & 193 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ par exemple. Regardons à quelle condition c'est vérifié :

$$\begin{aligned}
N \in F^{\perp} &\iff N \perp \begin{pmatrix} 9 & 193 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N \perp \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad N \perp \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \left\langle N, \begin{pmatrix} 9 & 193 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle & = & 0 \\ \left\langle N, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle & = & 0 \\ \left\langle N, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 9\,x & + & 193\,y & - & z & - & t & = & 0 \\ & & 5\,y & - & 4\,z & - & 2\,t & = & 0 \\ & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \quad N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1150}{9}\,a & 6\,a \\ 7\,a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\frac{1150}{9} & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(après résolution)}
\end{aligned}$$

Prenons par exemple $a = 9$ (n'importe quel choix non nul de a donnerait un vecteur normal ; j'ai seulement fait un choix qui élimine les dénominateurs, afin d'avoir des calculs plus agréables ensuite). Alors $N = \begin{pmatrix} -1150 & 54 \\ 63 & 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de F. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = -1069$, et : $\|N\|^2 = 1329466$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{1069}{1329466} \sqrt{1329466}.$$

Corrigé 19. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 4

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 34 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 24 \\ 1 & 21 & -3 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 24 \\ 1 & 21 & -3 \end{pmatrix} \right),
\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 34 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1 \rVert} E_1 = \frac{1}{2\sqrt{291}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 34 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 24 \\ 1 & 21 & -3 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{305}{291} & -2 \\ \frac{14}{291} & -\frac{596}{291} & 24 \\ \frac{305}{291} & \frac{6139}{291} & -\frac{397}{291} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2 \rVert} U_2 = \frac{1}{\sqrt{87586053}} \begin{pmatrix} 291 & 305 & -582 \\ 14 & -596 & 6984 \\ 305 & 6139 & -397 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{1}{194} \sqrt{291} V_1 + \frac{2536}{29195351} \sqrt{87586053} V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A, F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 17$ (calcul direct) et :

$\|p(A)\|^2 = \frac{804933}{1203932}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{19661911}{1203932},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19661911}{300983}}$, d'où le résultat.

Corrigé 20. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 4

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -5 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 5 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{59}.\end{aligned}$$

Corrigé 21. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 4

$$\begin{aligned}F &= \left\{ a\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (LE VÉRIFIER SI VOUS N'EN ÊTES PAS CONVAINCUS !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{2\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} & 7 & \frac{1}{4} \\ -\frac{21}{4} & 7 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 8 \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{58}\begin{pmatrix} -17 & 28 & 1 \\ -21 & 28 & 1 \\ 2 & -6 & 32 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle V_2 + \langle A, V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{6}{11}\sqrt{11}V_1 + \frac{74}{29}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 23$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{90512}{9251}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{122261}{9251},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{29}\sqrt{\frac{122261}{11}}$, d'où le résultat.

Corrigé 22. Notons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 4

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & -9 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -9 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{59}{49} & -9 & -\frac{5}{49} \\ \frac{78}{49} & -1 & \frac{387}{49} \\ -\frac{65}{49} & \frac{191}{49} & \frac{39}{49} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{14\sqrt{2033}}\begin{pmatrix} -59 & -441 & -5 \\ 78 & -49 & 387 \\ -65 & 191 & 39 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{89}{14}V_1 + \frac{3428}{14231}\sqrt{2033}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 20332$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{1287921}{8132}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{164051903}{8132},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{164051903}{2033}}$, d'où le résultat.

Corrigé 23. Notons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 4

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus qui engendrent F forment une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), et on en déduit : $\dim(F) = 3 = 4 - 1 = \dim(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) - 1$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors :

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N \rangle}{\|N\|^2}N, \quad \text{et donc :} \quad \mathrm{d}(A,F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on rappelle qu'un vecteur normal $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ est, par définition, orthogonal à tous les vecteurs de F, et par linéarité c'est vrai si et seulement si N est orthogonal à une famille génératrice de F, donc aux vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\right)$ par exemple. Regardons à quelle condition c'est vérifié :

$$\begin{aligned}
N \in F^\perp &\iff \quad N \perp \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad N \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N \perp \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \left\langle N, \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle N, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle N, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -8x - z - 2t = 0 \\ 2x + y - 2z + t = 0 \\ -y - 6t = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \quad N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18}a & -6a \\ -\frac{22}{9}a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -6 \\ -\frac{22}{9} & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(après résolution)}
\end{aligned}$$

Prenons par exemple $a = 18$ (n'importe quel choix non nul de a donnerait un vecteur normal ; j'ai seulement fait un choix qui élimine les dénominateurs, afin d'avoir des calculs plus agréables ensuite). Alors $N = \begin{pmatrix} 1 & -108 \\ -44 & 18 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de F. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = 166$, et : $\|N\|^2 = 13925$, d'où le résultat :

$$d(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{166}{2785}\sqrt{557}.$$

Corrigé 24. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $M_2(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $d(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $M_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 5

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \right),
\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (LE VÉRIFIER SI VOUS N'EN ÊTES PAS CONVAINCUS !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|} E_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{10}{9} \\ \frac{13}{9} & -\frac{55}{9} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|} U_2 = \frac{1}{15\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & -55 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{19}{9}\sqrt{3}V_1 + \frac{53}{225}\sqrt{15}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (d(A, F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 53$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{5326}{375}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(d(A, F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{14549}{375},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{14549}{15}}$, d'où le résultat.

Corrigé 25. Notons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 5

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (LE VÉRIFIER SI VOUS N'EN ÊTES PAS CONVAINCUS !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|} E_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -2 & -\frac{13}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|} U_2 = \frac{1}{3\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -6 & -13 & -6 \\ 1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{47}{3} V_1 - \frac{41}{102}\sqrt{34} V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 2223$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{76787}{306}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{603451}{306},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{603451}{34}}$, d'où le résultat.

Corrigé 26. Notons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 5

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -4 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{83}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 27. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F)=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 5

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -3 \\ -\frac{10}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{\sqrt{393}}\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1,V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A)=\langle A,V_2\rangle V_2+\langle A,V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{8}{3}\sqrt{3}V_1 + \frac{116}{393}\sqrt{393}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2+(\mathrm{d}(A,F))^2=\|A\|^2$, et comme $\|A\|^2=58$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2=\frac{7280}{131}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{318}{131},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F)=\sqrt{\frac{318}{131}}$, d'où le résultat.

Corrigé 28. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F)=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 5

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{\sqrt{651}}\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{550}{651} & \frac{1975}{651} \\ -1 & -\frac{3145}{651} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{\sqrt{14517951}}\begin{pmatrix} 550 & 1975 \\ -651 & -3145 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1,V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A)=\langle A,V_2\rangle V_2+\langle A,V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{11}{651}\sqrt{651}V_1 - \frac{21725}{14517951}\sqrt{14517951}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2+(\mathrm{d}(A,F))^2=\|A\|^2$, et comme $\|A\|^2=121$ (calcul direct) et :

$\|p(A)\|^2 = \frac{729146}{22301}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{1969275}{22301},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 55\sqrt{\frac{651}{22301}}$, d'où le résultat.

Corrigé 29. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

← page 5

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -19 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+19^2} \\ &= \sqrt{366}.\end{aligned}$$

Corrigé 30. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

← page 5

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -8 & -\frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -11 \\ -3 & -11 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{8^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+11^2+3^2+11^2} \\ &= \sqrt{\frac{651}{2}}.\end{aligned}$$

Corrigé 31. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement :

← page 6

$$\begin{aligned}F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 58 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -86 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 58 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -86 \end{pmatrix} \right),\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 58 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1 \rVert} E_1 = \frac{1}{\sqrt{3377}} \begin{pmatrix} 1 & 58 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{116}{3377} & \frac{26}{3377} & \frac{3493}{3377} \\ -\frac{3493}{3377} & -\frac{3493}{3377} & -2 \\ \frac{3029}{3377} & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2 \rVert} U_2 = \frac{1}{\sqrt{102812765}} \begin{pmatrix} -116 & 26 & 3493 \\ -3493 & -3493 & -6754 \\ 3029 & 3377 & 0 \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -86 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} \frac{29259}{30445} & -\frac{784}{30445} & -\frac{25702}{30445} \\ \frac{25702}{30445} & -\frac{35188}{30445} & \frac{23331}{30445} \\ -\frac{1}{30445} & \frac{64447}{30445} & -86 \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\lVert U_3 \rVert} U_3 = \frac{1}{4\sqrt{428965726810}} \begin{pmatrix} 29259 & -784 \\ 25702 & -35188 \\ -1 & 64447 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3 + \langle A, V_4 \rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{115}{3377}\sqrt{3377}V_1 - \frac{20094}{102812765}\sqrt{102812765}V_2 - \frac{5227819}{1715862907240}\sqrt{428965726810}V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 22$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{2665890717}{225437728}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{2293739299}{225437728},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2293739299}{14089858}}$, d'où le résultat.

Corrigé 32. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 6

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 14 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -82 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 14 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -82 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1 \rVert} E_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 14 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -82 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{44}{5} & -\frac{49}{5} \\ 14 & 1 & \frac{32}{5} \\ \frac{74}{5} & -\frac{22}{5} & -\frac{388}{5} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2 \rVert} U_2 = \frac{1}{\sqrt{167190}} \begin{pmatrix} 20 & -44 & -49 \\ 70 & 5 & 32 \\ 74 & -22 & -388 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{2}{3}\sqrt{15}V_1 + \frac{77}{33438}\sqrt{167190}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 476$ (calcul direct) et :

$\|p(A)\|^2 = \frac{252565}{33438}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{15663923}{33438},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{15663923}{33438}}$, d'où le résultat.

Corrigé 33. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 6

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|} E_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{23}{17} & -\frac{14}{17} & -\frac{14}{17} \\ \frac{48}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{3}{17} \\ -1 & \frac{6}{17} & \frac{6}{17} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|} U_2 = \frac{1}{2\sqrt{901}} \begin{pmatrix} -23 & -14 & -14 \\ 48 & -3 & 3 \\ -17 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} -\frac{329}{212} & \frac{75}{106} & -\frac{137}{106} \\ -\frac{15}{53} & -\frac{89}{212} & \frac{301}{212} \\ \frac{273}{212} & -\frac{335}{106} & \frac{89}{106} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\|U_3\|} U_3 = \frac{1}{2\sqrt{215763}} \begin{pmatrix} -329 & 150 & -274 \\ -60 & -89 & 301 \\ 273 & -670 & 178 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3 + \langle A, V_4 \rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{12}{17}\sqrt{17} V_1 + \frac{87}{1802}\sqrt{901} V_2 - \frac{4415}{431526}\sqrt{215763} V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 47$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{134978}{4071}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{56359}{4071},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{56359}{4071}}$, d'où le résultat.

Corrigé 34. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|} M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices : ← page 6

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|} M \right\rangle \frac{1}{\|M\|} M = \frac{\langle A, M \rangle}{\|M\|^2} M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M \rangle = 6 \times 1 = 6,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 227$. Ainsi : $p(A) = \frac{6}{227}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 36$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{8136}{227},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 6\sqrt{\frac{226}{227}}$, d'où le résultat.

Corrigé 35. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 6

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 4 & 1 & \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 + 1^2 + 4^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 4^2 + 1^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{113}.\end{aligned}$$

Corrigé 36. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 7

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -82 & \frac{7}{2} \\ 2 & 0 & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 82^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{13517}{2}}.\end{aligned}$$

Corrigé 37. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer ← page 7

que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1^re^ année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -5 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{17}{2} & \frac{7}{2} \\ 5 & \frac{17}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5^2 + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 5^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{238}. \end{aligned}$$

Corrigé 38. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1^re^ année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 7

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 6 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -6 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{151}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 39. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1^re^ année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 7

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -4 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+4^2+1^2+1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2+4^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{43}.\end{aligned}$$

Corrigé 40. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F)=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M=\begin{pmatrix}0&0\\-2&1\end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices : ← page 7

$$p(A)=\left\langle A,\frac{1}{\|M\|}M\right\rangle\frac{1}{\|M\|}M=\frac{\langle A,M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A,M\rangle=1\times 2+1\times 1=3,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2=5$. Ainsi : $p(A)=\frac{3}{5}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2+(\mathrm{d}(A,F))^2=\|A\|^2$, et comme $\|A\|^2=4$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2=\|A\|^2-\|p(A)\|^2=\frac{11}{5},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F)=\sqrt{\frac{11}{5}}$, d'où le résultat.

Corrigé 41. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F)=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices : ← page 7

$$p(A)=\left\langle A,\frac{1}{\|M\|}M\right\rangle\frac{1}{\|M\|}M=\frac{\langle A,M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A,M\rangle=0=0,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2=2$. Ainsi : $p(A)=0$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2+(\mathrm{d}(A,F))^2=\|A\|^2$, et comme $\|A\|^2=37$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2=\|A\|^2-\|p(A)\|^2=37,$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F)=\sqrt{37}$, d'où le résultat.

Corrigé 42. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_4(\mathbb{R}))=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 7

$$A=\frac{1}{2}(A+A^\top)+\frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 96 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{96^2 + 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{18479}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 43. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 8

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & -10 & 7 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & -10 & 7 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & -10 & 7 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|} E_1 = \frac{1}{\sqrt{177}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & -10 & 7 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{188}{177} & -1 & -\frac{107}{59} \\ \frac{11}{177} & \frac{110}{177} & \frac{100}{177} \\ 1 & \frac{44}{177} & \frac{188}{177} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|} U_2 = \frac{1}{8\sqrt{4071}} \begin{pmatrix} 188 & -177 & -321 \\ 11 & 110 & 100 \\ 177 & 44 & 188 \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} -\frac{527}{368} & \frac{865}{1472} & \frac{945}{1472} \\ \frac{229}{1472} & \frac{409}{736} & \frac{855}{368} \\ \frac{2079}{1472} & \frac{965}{368} & -\frac{159}{368} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\|U_3\|} U_3 = \frac{1}{8\sqrt{595769}} \begin{pmatrix} -2108 & 865 & 945 \\ 229 & 818 & 3420 \\ 2079 & 3860 & -636 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3 + \langle A, V_4 \rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{1}{59}\sqrt{177} V_1 + \frac{112}{1357}\sqrt{4071} V_2 - \frac{2824}{595769}\sqrt{595769} V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 76$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{1066391}{25903}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{902237}{25903},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 7\sqrt{\frac{18413}{25903}}$, d'où le résultat.

Corrigé 44. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de ← page 8

matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 45. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 8

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{\frac{33}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 46. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 8

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\\|E_1\\|} E_1 = \frac{1}{\sqrt{442}} \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{221} \\ 2 & -\frac{231}{221} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\\|U_2\\|} U_2 = \frac{1}{\sqrt{297687}} \begin{pmatrix} 221 & -11 \\ 442 & -231 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle V_2 + \langle A, V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{10}{221}\sqrt{442}V_1 + \frac{242}{297687}\sqrt{297687}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 2$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{1484}{1347}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{1210}{1347},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 11\sqrt{\frac{10}{1347}}$, d'où le résultat.

Corrigé 47. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 8

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -52 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -52 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -52 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{2\sqrt{681}}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -52 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{730}{681} & -\frac{2773}{2724} & 1 \\ 2 & \frac{2773}{2724} & \frac{5399}{2724} \\ 1 & -\frac{2675}{2724} & \frac{44}{681} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{2\sqrt{26190579}}\begin{pmatrix} 2920 & -2773 & 2724 \\ 5448 & 2773 & 5399 \\ 2724 & -2675 & 176 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle V_2 + \langle A, V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{3}{454}\sqrt{681}V_1 + \frac{9841}{17460386}\sqrt{26190579}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 59$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{321117}{38459}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{1947964}{38459},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 2\sqrt{\frac{486991}{38459}}$, d'où le résultat.

Corrigé 48. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices : ← page 8

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M \right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = 5\times 25 - 8\times 1 + 2\times 1 + 1\times 1 = 120,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 628$. Ainsi : $p(A) = \frac{30}{157}\, M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 94$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{11158}{157},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{11158}{157}}$, d'où le résultat.

Corrigé 49. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 9

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ -4 & -1 & 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -5 & -1\\ 7 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ -4 & -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1\\ 7 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1\rVert}E_1 = \frac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ -4 & -1 & 1\end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle\, V_1 = \begin{pmatrix} \frac{31}{51} & \frac{31}{51} & -\frac{82}{51}\\ -\frac{29}{51} & -\frac{40}{51} & -\frac{29}{51}\\ -\frac{164}{51} & -\frac{91}{51} & \frac{11}{51}\end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2\rVert}U_2 = \frac{1}{\sqrt{47226}}\begin{pmatrix} 31 & 31 & -82\\ -29 & -40 & -29\\ -164 & -91 & 11\end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1\\ 7 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2}\langle E_3, V_i\rangle\, V_i = \begin{pmatrix} \frac{133}{926} & -\frac{4497}{926} & -\frac{848}{463}\\ \frac{5103}{926} & -\frac{504}{463} & -\frac{3231}{926}\\ \frac{156}{463} & -\frac{719}{926} & -\frac{371}{926}\end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\lVert U_3\rVert}U_3 = \frac{1}{\sqrt{61365094}}\begin{pmatrix} 133 & -4497 & -1696\\ 5103 & -1008 & -3231\\ 312 & -719 & -371\end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle\, V_2 + \langle A, V_3\rangle\, V_3 + \langle A, V_4\rangle\, V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{1}{3}\sqrt{51}V_1 - \frac{23}{1389}\sqrt{47226}V_2 - \frac{32355}{30682547}\sqrt{61365094}V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 401$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{5755647}{66269}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{20818222}{66269},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{20818222}{66269}}$, d'où le résultat.

Corrigé 50. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on note que F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mapsto 3\,a - 12\,b + 15\,c + 37\,d$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors : ← page 9

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N\rangle}{\|N\|^2}N, \quad \text{et donc : } \mathrm{d}(A,F) = \frac{|\langle A, N\rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on note que, connaissant la définition (pratique) du produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in F \iff 3\,a - 12\,b + 15\,c + 37\,d = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 15 & 37 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 15 & 37 \end{pmatrix} \right)^{\perp},$$

donc : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 15 & 37 \end{pmatrix} \right)^{\perp}$, et un vecteur normal de F est $N = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 15 & 37 \end{pmatrix}$. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = -230$, et : $\|N\|^2 = 1747$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{230}{1747}\sqrt{1747}.$$

Corrigé 51. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 9

$$A = \frac{1}{2}(A + A^{\top}) + \frac{1}{2}(A - A^{\top}),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^{\top}) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^{\top}) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^{\top})$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^{\top}\right) \right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\left(A + A^{\top}\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -12 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 4 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 12^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{\frac{339}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 52. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on note que F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto 116\,a + 781\,b + 85\,c + 101\,d$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors : ← page 9

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N \rangle}{\|N\|^2} N, \quad \text{et donc : } \mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on note que, connaissant la définition (pratique) du produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in F \iff 116\,a + 781\,b + 85\,c + 101\,d = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 116 & 781 \\ 85 & 101 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 116 & 781 \\ 85 & 101 \end{pmatrix} \right)^{\perp},$$

donc : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 116 & 781 \\ 85 & 101 \end{pmatrix} \right)^{\perp}$, et un vecteur normal de F est $N = \begin{pmatrix} 116 & 781 \\ 85 & 101 \end{pmatrix}$. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = -3668$, et : $\|N\|^2 = 640843$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{524}{91549}\sqrt{640843}.$$

Corrigé 53. ← page 9 Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A+A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & -1 \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{23}{2} \\ 1 & -\frac{23}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{23}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{23}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{291}.\end{aligned}$$

Corrigé 54. ← page 9 Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement :

$$\begin{aligned}F &= \left\{a\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 32 & -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -104 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 32 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -104 & 1 \end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 32 & -2 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{9\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 32 & -2 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -104 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1850}{117} & -1 \\ -\frac{328}{117} & -\frac{623}{117} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{9\sqrt{48542}}\begin{pmatrix} -1850 & -117 \\ -328 & -623 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1,V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A,V_2\rangle V_2 + \langle A,V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{14}{9}\sqrt{13}V_1 + \frac{218}{16803}\sqrt{48542}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 40$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{665860}{16803}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{6260}{16803},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1565}{1867}}$, d'où le résultat.

Corrigé 55. ← page 9 Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{11}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 0 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{102}. \end{aligned}$$

Corrigé 56. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 10

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 & -17 & 0 \\ -17 & 1 & -\frac{19}{2} \\ 0 & -\frac{19}{2} & 1 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{3^2 + 17^2 + 17^2 + 1^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= 9\sqrt{\frac{19}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 57. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 10

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2+2^2+1^2+2^2}\\ &= \sqrt{10}.\end{aligned}$$

Corrigé 58. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 10

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 2 & 2\\ \frac{3}{2} & 2 & 0 & 5\\ 2 & 0 & 3 & -\frac{3}{2}\\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2+2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2+5^2+2^2+3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2+5^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}\\ &= 3\sqrt{10}.\end{aligned}$$

Corrigé 59. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 10

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2\\ -1 & 4 & \frac{5}{2}\\ -2 & \frac{5}{2} & 0\end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2+1^2+2^2+1^2+4^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{79}{2}}.\end{aligned}$$

Corrigé 60. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 10

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Corrigé 61. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on note que F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto 4\,a + b - c + 3\,d$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors : ← page 10

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N \rangle}{\|N\|^2} N, \quad \text{et donc : } \mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on note que, connaissant la définition (pratique) du produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in F \iff 4\,a + b - c + 3\,d = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right)^\perp,$$

donc : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right)^\perp$, et un vecteur normal de F est $N = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = -7$, et : $\|N\|^2 = 27$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{7}{9}\sqrt{3}.$$

Corrigé 62. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 10

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} -7 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 4 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -7 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\\|E_1\\|} E_1 = \frac{1}{\sqrt{255}} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{328}{255} & \frac{406}{255} & \frac{111}{85} \\ -1 & \frac{307}{255} & -\frac{593}{255} \\ -1 & \frac{1988}{255} & \frac{713}{255} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\\|U_2\\|} U_2 = \frac{1}{\sqrt{5419770}} \begin{pmatrix} 328 & 406 & 333 \\ -255 & 307 & -593 \\ -255 & 1988 & 713 \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} \frac{33176}{10627} & -\frac{21919}{10627} & -\frac{163061}{21254} \\ -\frac{10891}{21254} & \frac{1193}{21254} & -\frac{64751}{21254} \\ \frac{10363}{21254} & -\frac{4722}{10627} & \frac{42371}{21254} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\\|U_3\\|} U_3 = \frac{1}{\sqrt{39217859546}} \begin{pmatrix} 66352 & -43838 & - \\ -10891 & 1193 & \\ 10363 & -9444 & \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle V_2 + \langle A, V_3\rangle V_3 + \langle A, V_4\rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{262}{255}\sqrt{255}V_1 + \frac{25063}{5419770}\sqrt{5419770}V_2 - \frac{3446831}{39217859546}\sqrt{39217859546}V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 5358$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{1269556463}{1845199}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{8617019779}{1845199},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{8617019779}{1845199}}$, d'où le résultat.

Corrigé 63. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 11

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{83}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 64. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 11

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 54 & -7 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 54 & -7 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 54 & -7 & -1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{3\sqrt{330}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 54 & -7 & -1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{2963}{2970} & 1 \\ -\frac{7}{2970} & -\frac{5933}{2970} & \frac{11887}{2970} \\ \frac{7}{55} & \frac{2921}{2970} & \frac{2963}{2970} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{3\sqrt{32327130}}\begin{pmatrix} 8910 & -2963 & 2970 \\ -7 & -5933 & 11887 \\ 378 & 2921 & 2963 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle V_2 + \langle A, V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{52}{165}\sqrt{330}V_1 + \frac{4091}{16163565}\sqrt{32327130}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 63$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{3413610}{97961}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{2757933}{97961},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 3\sqrt{\frac{306437}{97961}}$, d'où le résultat.

Corrigé 65. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 11

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2133}{2} & 0 \\ \frac{2133}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{2133}{2}\right)^2 + \left(\frac{2133}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= 3\sqrt{252761}.\end{aligned}$$

Corrigé 66. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices : ← page 11

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M\right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = -5 \times 1 + 5 \times 4 + 1 \times 5 + 2 \times 1 = 22,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 43$. Ainsi : $p(A) = \frac{22}{43}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 55$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{1881}{43},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 3\sqrt{\frac{209}{43}}$, d'où le résultat.

Corrigé 67. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on ← page 11

a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|} E_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|} U_2 = \frac{1}{3\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{5}{2}\sqrt{6} V_1 - \frac{139}{42}\sqrt{14} V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 246$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{12023}{63}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{3475}{63},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{139}{7}}$, d'où le résultat.

Corrigé 68. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$, avec : ← page 11

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -117 \\ 30 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|} M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|} M \right\rangle \frac{1}{\|M\|} M = \frac{\langle A, M \rangle}{\|M\|^2} M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M \rangle = -4 \times 7 - 6 \times 1 - 2 \times 117 - 6 \times 30 - 4 \times 1 + 1 \times 1 - 4 \times 2 = -459,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 14661$. Ainsi : $p(A) = -\frac{17}{543} M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 654$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{115773}{181},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{115773}{181}}$, d'où le résultat.

Corrigé 69. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on ← page 12

a $\mathrm{d}(A,F)=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement :

$$\begin{aligned}F&=\left\{a\begin{pmatrix}0&-1\\0&120\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\-3&-3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}\\&=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\0&120\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-3&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus qui engendrent F forment une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), et on en déduit : $\dim(F)=3=4-1=\dim(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))-1$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors :

$$p(A)=A-\frac{\langle A,N\rangle}{\|N\|^2}N,\quad\text{et donc : }\ \mathrm{d}(A,F)=\frac{|\langle A,N\rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on rappelle qu'un vecteur normal $N=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est, par définition, orthogonal à tous les vecteurs de F, et par linéarité c'est vrai si et seulement si N est orthogonal à une famille génératrice de F, donc aux vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix}0&-1\\0&120\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-3&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$ par exemple. Regardons à quelle condition c'est vérifié :

$$\begin{aligned}N\in F^{\perp}&\iff N\perp\begin{pmatrix}0&-1\\0&120\end{pmatrix},\quad N\perp\begin{pmatrix}0&1\\-3&-3\end{pmatrix},\quad N\perp\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}\\
&\iff\begin{cases}\left\langle N,\begin{pmatrix}0&-1\\0&120\end{pmatrix}\right\rangle=0\\\left\langle N,\begin{pmatrix}0&1\\-3&-3\end{pmatrix}\right\rangle=0\\\left\langle N,\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{cases}\\
&\iff\begin{cases}-y+120\,t=0\\y-3\,z-3\,t=0\\5\,x=0\end{cases}\\
&\iff\exists a\in\mathbb{R},\quad N=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&120\,a\\39\,a&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0&120\\39&1\end{pmatrix}.\qquad\text{(après résolution)}\end{aligned}$$

Prenons par exemple $a=1$. Alors $N=\begin{pmatrix}0&120\\39&1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de F. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A,N\rangle=-422$, et : $\|N\|^2=15922$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A,F)=\frac{|\langle A,N\rangle|}{\|N\|}=\frac{211}{7961}\sqrt{15922}.$$

Corrigé 70. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F)=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on note que F est le noyau de la forme linéaire $\varphi:\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mapsto a+3\,b$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors : ← page 12

$$p(A)=A-\frac{\langle A,N\rangle}{\|N\|^2}N,\quad\text{et donc : }\ \mathrm{d}(A,F)=\frac{|\langle A,N\rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on note que, connaissant la définition (pratique) du produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a pour tout $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M\in F\iff a+3\,b=0\iff\left\langle\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\right\rangle=0\iff\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\right)^{\perp},$$

donc : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\right)^{\perp}$, et un vecteur normal de F est $N=\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}$. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A,N\rangle=-54$, et : $\|N\|^2=10$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A,F)=\frac{|\langle A,N\rangle|}{\|N\|}=\frac{27}{5}\sqrt{10}.$$

Corrigé 71. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 12

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A+A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A-p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{2^2+2^2+2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{57}{2}}.\end{aligned}$$

Corrigé 72. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 12

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} -1 & 21 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 & 21 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (LE VÉRIFIER SI VOUS N'EN ÊTES PAS CONVAINCUS !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 21 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\|E_1\|}E_1 = \frac{1}{\sqrt{671}}\begin{pmatrix} -1 & 21 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1\rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1288}{671} & -\frac{463}{671} & 0 \\ -\frac{3409}{671} & -1 & -\frac{617}{671} \\ -\frac{2630}{671} & -\frac{617}{671} & \frac{532}{671} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\|U_2\|}U_2 = \frac{1}{\sqrt{21906137}}\begin{pmatrix} -1288 & -463 & 0 \\ -3409 & -671 & -617 \\ -2630 & -617 & 532 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2\rangle V_2 + \langle A, V_3\rangle V_3$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{269}{671}\sqrt{671}V_1 - \frac{15669}{21906137}\sqrt{21906137}V_2.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 350$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{3886568}{32647}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{7539882}{32647},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{7539882}{32647}}$, d'où le résultat.

Corrigé 73. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

← page 12

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) \right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -4 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 5 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{4^2 + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{\frac{123}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 74. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

← page 12

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -11 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 11 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{11^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 11^2 + 1^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} \\ &= 17. \end{aligned}$$

Corrigé 75. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement :

← page 13

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 223 & -1 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 223 & -1 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (LE VÉRIFIER SI VOUS N'EN ÊTES PAS CONVAINCUS !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 223 & -1 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1 \rVert} E_1 = \frac{1}{\sqrt{49777}} \begin{pmatrix} 0 & 223 & -1 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & -1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} 9 & \frac{25}{7111} & -\frac{7143}{7111} \\ \frac{32}{7111} & -\frac{7207}{7111} & \frac{6919}{7111} \\ 0 & -15 & -\frac{7143}{7111} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2 \rVert} U_2 = \frac{1}{\sqrt{15675154183}} \begin{pmatrix} 63999 & & \\ 32 & -72 & \\ 0 & -1066 & \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} -\frac{1657838}{2204353} & -\frac{184983}{15430471} & -\frac{2079134}{15430471} \\ -\frac{15490901}{15430471} & -\frac{48249687}{15430471} & \frac{17932615}{15430471} \\ -1 & -\frac{176074}{2204353} & -\frac{17509605}{15430471} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\lVert U_3 \rVert} U_3 = \frac{1}{3\sqrt{397201525007154}} \begin{pmatrix} -1160486 \\ -1549090 \\ -1543047 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3 + \langle A, V_4 \rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{17}{3829}\sqrt{49777}V_1 - \frac{10937}{1205781091}\sqrt{15675154183}V_2 + \frac{19255493}{132400508335718}\sqrt{397201525007154}V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\lVert p(A) \rVert^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \lVert A \rVert^2$, et comme $\lVert A \rVert^2 = 20$ (calcul direct) et : $\lVert p(A) \rVert^2 = \frac{91570957}{8580458}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \lVert A \rVert^2 - \lVert p(A) \rVert^2 = \frac{80038203}{8580458},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{80038203}{8580458}}$, d'où le résultat.

Corrigé 76. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\lVert \cdot \rVert$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \lVert A - p(A) \rVert$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 13

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 2 & 104 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 2 & 104 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 2 & 104 & -2 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\lVert E_1 \rVert} E_1 = \frac{1}{27\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 2 & 104 & -2 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{10859}{3645} & \frac{3721}{3645} & -\frac{10897}{3645} \\ \frac{38}{3645} & \frac{7943}{729} & \frac{3683}{3645} \\ \frac{76}{3645} & \frac{3952}{3645} & -\frac{3721}{3645} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\lVert U_2 \rVert} U_2 = \frac{1}{27\sqrt{2566290}} \begin{pmatrix} 10859 & 3721 & -10 \\ 38 & 39715 & 3 \\ 76 & 3952 & -3 \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} -\frac{1150400}{769887} & -\frac{4681837}{769887} & \frac{356392}{769887} \\ -\frac{3055427}{769887} & \frac{850124}{769887} & \frac{683251}{769887} \\ -\frac{721645}{769887} & \frac{198923}{769887} & \frac{832402}{769887} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\lVert U_3 \rVert} U_3 = \frac{1}{3\sqrt{3905382773833}} \begin{pmatrix} -1150400 & -46 \\ -3055427 & 8 \\ -721645 & 1 \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3 + \langle A, V_4 \rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = \frac{25}{81}\sqrt{15}V_1 - \frac{6815}{6928983}\sqrt{2566290}V_2 - \frac{6318040}{11716148321499}\sqrt{3905382773833}V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\lVert p(A) \rVert^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \lVert A \rVert^2$, et comme $\lVert A \rVert^2 = 57$ (calcul direct) et :

$\|p(A)\|^2 = \frac{230422175}{45654031}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{2371857592}{45654031},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 2\sqrt{\frac{592964398}{45654031}}$, d'où le résultat.

Corrigé 77. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 13

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & \frac{13}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{2} & 0 & 3 & \frac{127}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{127}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 3^2 + \left(\frac{127}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{127}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16361}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 78. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 13

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 \\ 12 & 0 & -11 \\ 0 & 11 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{12^2 + 12^2 + 11^2 + 11^2} \\ &= \sqrt{530}. \end{aligned}$$

Corrigé 79. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 13

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A+A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{19}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ -\frac{15}{2} & -\frac{19}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{649}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 80. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$, avec : ← page 13

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -13 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M \right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = -10 \times 1 - 1 \times 1 + 67 \times 3 + 1 \times 13 - 1 \times 1 - 1 \times 1 = 201,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 191$. Ainsi : $p(A) = \frac{201}{191}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 4594$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{837053}{191},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \sqrt{\frac{837053}{191}}$, d'où le résultat.

Corrigé 81. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 14

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\top) + \frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} & 3 \\ \frac{9}{2} & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{\frac{185}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 82. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 14

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{15}. \end{aligned}$$

Corrigé 83. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 14

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 13 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & -1 \\ 11 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{13^2 + 11^2 + 3^2 + 1^2 + 11^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= 3\sqrt{47}. \end{aligned}$$

Corrigé 84. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 14

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ -\frac{9}{2} & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{3^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+2^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+3^2+2^2+1^2+2^2+2^2+1^2+7^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+1^2+7^2}\\ &= 2\sqrt{47}.\end{aligned}$$

Corrigé 85. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R}))=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 14

$$A=\frac{1}{2}(A+A^\top)+\frac{1}{2}(A-A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top)\in\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top)\in\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A)=\frac{1}{2}(A+A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R}))=\|A-p(A)\|=\left\|A-\left(\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right)\right)\right\|=\left\|\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)\right\|=\left\|\begin{pmatrix}0&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&0&-1\\-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\\ &= \sqrt{15}.\end{aligned}$$

Corrigé 86. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F)=\|A-p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 14

$$\begin{aligned}F &= \left\{a\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&14&-1\\0&4&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&53&13\\-2&-8&1\\0&1&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&10&-8\\0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&14&-1\\0&4&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&53&13\\-2&-8&1\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&10&-8\\0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (LE VÉRIFIER SI VOUS N'EN ÊTES PAS CONVAINCUS !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&14&-1\\0&4&0\end{pmatrix}$		$V_1=\frac{1}{\\|E_1\\|}E_1=\frac{1}{2\sqrt{55}}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&14&-1\\0&4&0\end{pmatrix}$
$E_2=\begin{pmatrix}1&53&13\\-2&-8&1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$U_2=E_2-\langle E_2,V_1\rangle V_1=\begin{pmatrix}\frac{73}{110}&\frac{5867}{110}&\frac{1393}{110}\\-\frac{73}{55}&-\frac{181}{55}&\frac{73}{110}\\0&\frac{129}{55}&1\end{pmatrix}$	$V_2=\frac{1}{\\|U_2\\|}U_2=\frac{1}{2\sqrt{9150955}}\begin{pmatrix}73&5867&1393\\-146&-362&73\\0&258&110\end{pmatrix}$
$E_3=\begin{pmatrix}1&10&-8\\0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}$	$U_3=E_3-\sum_{i=1}^{2}\langle E_3,V_i\rangle V_i=\begin{pmatrix}\frac{189958}{166381}&\frac{358705}{166381}&-\frac{1592255}{166381}\\-\frac{47154}{166381}&-\frac{139708}{166381}&\frac{189958}{166381}\\1&\frac{119794}{166381}&-\frac{23732}{166381}\end{pmatrix}$	$V_3=\frac{1}{\\|U_3\\|}U_3=\frac{1}{\sqrt{2800451617979}}\begin{pmatrix}189958&358705\\-47154&-139708\\166381&119794\end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1,V_2,V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A)=\langle A,V_2\rangle V_2+\langle A,V_3\rangle V_3+\langle A,V_4\rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A)=\frac{19}{110}\sqrt{55}V_1-\frac{177}{18301910}\sqrt{9150955}V_2-\frac{542634}{2800451617979}\sqrt{2800451617979}V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 7$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{58806415}{33663118}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{176835411}{33663118},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = 3\sqrt{\frac{19648379}{33663118}}$, d'où le résultat.

Corrigé 87. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 14

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -1 & 21 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{8^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 21^2 + 3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{541}.\end{aligned}$$

Corrigé 88. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 14

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{359}{2} & -\frac{41}{2} \\ 0 & \frac{359}{2} & 0 & -1 \\ 3 & \frac{41}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{359}{2}\right)^2 + \left(\frac{41}{2}\right)^2 + \left(\frac{359}{2}\right)^2 + 1^2 + 3^2 + \left(\frac{41}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{130611}{2}}.\end{aligned}$$

Corrigé 89. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$, avec : ← page 15

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -22 & -1 & -8 \\ -11 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M \right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = 1\times 1 - 5\times 22 + 6\times 1 - 1\times 8 - 4\times 11 + 1\times 1 - 1\times 4 = -158,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 688$. Ainsi : $p(A) = -\frac{79}{344}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 90$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{9239}{172},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9239}{43}}$, d'où le résultat.

Corrigé 90. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1[re] année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 15

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 & -\frac{31}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{31}{2} & -1 & -10 & -2 \\ \frac{1}{2} & -10 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{2^2 + \left(\frac{31}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{31}{2}\right)^2 + 1^2 + 10^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{\frac{1405}{2}}. \end{aligned}$$

Corrigé 91. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : ← page 15

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} -49 & 1 \\ -1 & -21 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 24 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -49 & 1 \\ -1 & -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus qui engendrent F forment une famille libre (le vérifier si vous n'en êtes pas convaincus !), et on en déduit : $\dim(F) = 3 = 4 - 1 = \dim(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) - 1$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors :

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N\rangle}{\|N\|^2}N, \quad \text{et donc : } \mathrm{d}(A,F) = \frac{|\langle A, N\rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on rappelle qu'un vecteur normal $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est, par définition, orthogonal à tous les vecteurs de F, et par linéarité c'est vrai si et seulement si N est orthogonal à une famille génératrice de F, donc aux vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix} -49 & 1 \\ -1 & -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ par exemple. Regardons à quelle condition c'est vérifié :

$$\begin{aligned}
N \in F^{\perp} &\iff N \perp \begin{pmatrix} -49 & 1 \\ -1 & -21 \end{pmatrix}, \quad N \perp \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad N \perp \begin{pmatrix} 24 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \left\langle N, \begin{pmatrix} -49 & 1 \\ -1 & -21 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle N, \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle N, \begin{pmatrix} 24 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -49x + y - z - 21t = 0 \\ -8x - 2z - t = 0 \\ 24x - y + z + 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \quad N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{25}a & -\frac{137}{10}a \\ \frac{127}{50}a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\frac{19}{25} & -\frac{137}{10} \\ \frac{127}{50} & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(après résolution)}
\end{aligned}$$

Prenons par exemple $a = 50$ (n'importe quel choix non nul de a donnerait un vecteur normal ; j'ai seulement fait un choix qui élimine les dénominateurs, afin d'avoir des calculs plus agréables ensuite). Alors $N = \begin{pmatrix} -38 & -685 \\ 127 & 50 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de F. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = 127$, et : $\|N\|^2 = 489298$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{127}{489298}\sqrt{489298}.$$

Corrigé 92. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on note que F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto 5a - 5b - 7c + 2d$, donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et on sait que dans ce cas, si N est un vecteur de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ normal à F, alors : ← page 15

$$p(A) = A - \frac{\langle A, N \rangle}{\|N\|^2} N, \quad \text{et donc : } \mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|}.$$

Déterminons un vecteur normal N. Pour cela, on note que, connaissant la définition (pratique) du produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in F \iff 5a - 5b - 7c + 2d = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \right)^{\perp},$$

donc : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \right)^{\perp}$, et un vecteur normal de F est $N = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$. On peut conclure. Un calcul direct donne : $\langle A, N \rangle = -280$, et : $\|N\|^2 = 103$, d'où le résultat :

$$\mathrm{d}(A, F) = \frac{|\langle A, N \rangle|}{\|N\|} = \frac{280}{103}\sqrt{103}.$$

Corrigé 93. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 15

$$A = \frac{1}{2}(A + A^{\top}) + \frac{1}{2}(A - A^{\top}),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A+A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{31}.\end{aligned}$$

Corrigé 94. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 15

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{59}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{59}{2} & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{59}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5^2 + 2^2 + \left(\frac{59}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{3579}{2}}.\end{aligned}$$

Corrigé 95. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 16

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A+A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A-A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 33 \\ 0 & 33 & -4 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 33^2 + 33^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{\frac{4393}{2}}.\end{aligned}$$

Corrigé 96. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|}M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices :

← page 16

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|}M \right\rangle \frac{1}{\|M\|}M = \frac{\langle A, M\rangle}{\|M\|^2}M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M\rangle = -9 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 8 = -25,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 98$. Ainsi : $p(A) = -\frac{25}{98}M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 83$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A,F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{7509}{98},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A,F) = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7509}{2}}$, d'où le résultat.

Corrigé 97. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$: la matrice anti-symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant :

← page 16

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_3(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\|A - \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 23 & 0 & \frac{275}{2} \\ 0 & -5 & \frac{7}{2} \\ \frac{275}{2} & \frac{7}{2} & 38 \end{pmatrix}\right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{A}_3(\mathbb{R})) &= \sqrt{23^2 + \left(\frac{275}{2}\right)^2 + 5^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{275}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 38^2} \\ &= \sqrt{39835}.\end{aligned}$$

Corrigé 98. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A,F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement :

← page 16

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 6 \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -6 & 90315 & -2 \\ -3 & -8 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 6 \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 90315 & -2 \\ -3 & -8 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

où les matrices ci-dessus (notées E_1, E_2 et E_3 dans la suite) qui engendrent F forment aussi une famille libre (LE VÉRIFIER SI VOUS N'EN ÊTES PAS CONVAINCUS !), donc une base de F. Il suffit de l'orthonormaliser grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on en déduit une base orthonormée de F, dans laquelle nous savons que $p(A)$ a une expression explicite à l'aide de produits scalaires (vous avez une autre méthode dans le cours pour calculer $p(A)$, mais l'expression dans une base orthonormée a l'avantage de faciliter le calcul de norme au carré dont nous aurons besoin plus bas, puisque dans une telle base il suffit de faire la somme des coordonnées au carré). L'algorithme donne :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 6 \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		$V_1 = \frac{1}{\\|E_1\\|} E_1 = \frac{1}{\sqrt{385}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 6 \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$U_2 = E_2 - \langle E_2, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{79}{77} & 0 & \frac{83}{77} \\ 1 & \frac{45}{77} & \frac{65}{77} \\ \frac{95}{77} & -\frac{79}{77} & \frac{152}{77} \end{pmatrix}$	$V_2 = \frac{1}{\\|U_2\\|} U_2 = \frac{1}{\sqrt{63679}} \begin{pmatrix} -79 & 0 & 83 \\ 77 & 45 & 65 \\ 95 & -79 & 152 \end{pmatrix}$
$E_3 = \begin{pmatrix} -6 & 90315 & -2 \\ -3 & -8 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$U_3 = E_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle E_3, V_i \rangle V_i = \begin{pmatrix} -\frac{23727}{4135} & 90315 & -\frac{11669}{4135} \\ -\frac{2466}{827} & -\frac{14477}{4135} & \frac{27698}{4135} \\ -\frac{6212}{4135} & \frac{1083}{4135} & -\frac{2827}{4135} \end{pmatrix}$	$V_3 = \frac{1}{\\|U_3\\|} U_3 = \frac{1}{\sqrt{139466790304557110}} \begin{pmatrix} -23727 & 373 \\ -12330 & - \\ -6212 & \end{pmatrix}$

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base orthonormée de F. On a alors : $p(A) = \langle A, V_2 \rangle V_2 + \langle A, V_3 \rangle V_3 + \langle A, V_4 \rangle V_4$. On calcule ces différents produits scalaires. On obtient :

$$p(A) = -\frac{89}{385} \sqrt{385} V_1 + \frac{640}{63679} \sqrt{63679} V_2 + \frac{373343329}{69733395152278555} \sqrt{139466790304557110} V_3.$$

Concluons en calculant la distance de A à F. D'après le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A, F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 182$ (calcul direct) et : $\|p(A)\|^2 = \frac{522856256463691}{16864182624493}$ (somme des coordonnées au carré, parce qu'on est dans une base orthonormée de F), on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A, F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{2546424981194035}{16864182624493},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A, F) = \sqrt{\frac{2546424981194035}{16864182624493}}$, d'où le résultat.

Corrigé 99. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sur F. Or on a clairement : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, donc F est une droite vectorielle dirigée par M ; une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|M\|} M\right)$, et on sait exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormée. Ici cela nous donne la formule déjà maintes fois apparue dans le cours et les exercices : ← page 16

$$p(A) = \left\langle A, \frac{1}{\|M\|} M \right\rangle \frac{1}{\|M\|} M = \frac{\langle A, M \rangle}{\|M\|^2} M.$$

Calculons le produit scalaire et la norme au carré en jeu. Ne pas oublier que le produit scalaire usuel est simplement la somme des produits des coefficients de chaque matrice, de sorte que :

$$\langle A, M \rangle = -8 \times 2 - 1 \times 3 = -19,$$

et de même pour la norme euclidienne au carré de M, ce qui donne facilement : $\|M\|^2 = 13$. Ainsi : $p(A) = -\frac{19}{13} M$. On conclut avec le théorème du Pythagore (faites un dessin au besoin pour retrouver la relation qui suit) : $\|p(A)\|^2 + (\mathrm{d}(A, F))^2 = \|A\|^2$, et comme $\|A\|^2 = 67$ (calcul direct) on en déduit :

$$(\mathrm{d}(A, F))^2 = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2 = \frac{510}{13},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{d}(A, F) = \sqrt{\frac{510}{13}}$, d'où le résultat.

Corrigé 100. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On sait qu'on a : $\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$, où p est la projection orthogonale de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$. On sait montrer que le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ est $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (le redémontrer si besoin), donc p est en fait la projection sur $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit donc d'écrire A comme somme de matrices de $\mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_4(\mathbb{R})$: la matrice symétrique est $p(A)$, par définition d'une projection. Or c'est aussi un résultat classique, vu dans votre cours de 1re année, qu'une telle somme s'obtient en écrivant : ← page 16

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top),$$

où $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathrm{S}_4(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathrm{A}_4(\mathbb{R})$ (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus). On en déduit : $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, et :

$$\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\| = \left\| A - \left(\frac{1}{2} \left(A + A^\top \right) \right) \right\| = \left\| \frac{1}{2} \left(A - A^\top \right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -5 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

soit donc, après calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A, \mathrm{S}_4(\mathbb{R})) &= \sqrt{5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{131}{2}}.\end{aligned}$$