Diagonaliser une matrice

💡 Ces exercices vous entraînent à diagonaliser explicitement. Notez bien que dans certains cas, si la question est seulement de montrer que A est diagonalisable sans expliciter une matrice de passage, alors on peut court-circuiter le raisonnement du corrigé.

Remarque sur la méthode de détermination des éléments propres. Il est parfois possible de déterminer les valeurs propres sans passer par le calcul du polynôme caractéristique (on peut même parfois obtenir les sous-espaces propres associés sans résoudre l'équation aux éléments propres). Ce ne sera pas illustré ci-dessous. Pour voir comment obtenir les valeurs propres par d'autres moyens, on consultera les exercices *Trouver le spectre sans le polynôme caractéristique* de la *Banque des Cent*.

Remarque sur le calcul du polynôme caractéristique. Dans ces corrigés, je calculerai χ_A en passant par $\chi_A(x)$, où x est un nombre réel. Cette précaution n'est valable que si l'on ne s'autorise pas à manipuler des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}(X)$ (cf. le programme de PSI et PC par exemple). Dans le cas contraire, on peut directement calculer $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_n - A)$ sans scrupule.

Remarque sur la rédaction des corrigés. Vous n'êtes pas tenus de détailler autant les calculs et raisonnements, si la méthodologie vous paraît claire.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 37 & 28 & 4 & 212 \\ 36 & 31 & 4 & 220 \\ -18 & -14 & 7 & -122 \\ -9 & -7 & -1 & -52 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 12

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} -107 & 6 & 106 & 318 \\ -98 & 12 & 91 & 273 \\ -56 & 3 & 58 & 159 \\ -14 & 1 & 13 & 44 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 14

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -60 & -24 & 232 \\ 28 & 16 & -100 \\ -14 & -6 & 54 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 16

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} -63 & -48 & -36 & 616 \\ -56 & -53 & -36 & 608 \\ -56 & -48 & -38 & 596 \\ -14 & -12 & -9 & 147 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 17

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -19 & 60 & -30 \\ -3 & 8 & -6 \\ 3 & -12 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 19

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 26 & 24 & -16 \\ -32 & -26 & 8 \\ -16 & -12 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 21

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & -29 \\ -40 & -33 & -4 & 104 \\ -10 & -7 & 0 & 20 \\ -10 & -7 & -1 & 21 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 22

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 128 \\ -14 & -12 & -36 \\ -14 & -10 & -38 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 24

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -142 & -576 & 144 \\ 32 & 130 & -32 \\ -8 & -32 & 10 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 26

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 24 & 0 \\ 4 & 2 & 12 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 27

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & -14 \\ -36 & -21 & -12 & 40 \\ 18 & 10 & 7 & -16 \\ -9 & -5 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 29

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 2 \\ -9 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 31

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} -47 & -24 & -9 & 147 \\ 28 & 17 & 6 & -86 \\ -42 & -24 & -3 & 114 \\ -14 & -8 & -3 & 44 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 32

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 34

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 24 \\ 8 & 6 & 16 \\ -8 & -4 & -14 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 36

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 46 & 0 & -108 \\ 72 & -8 & -144 \\ 18 & 0 & -44 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 37

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 71 & 0 & -216 & -216 \\ 90 & 20 & -312 & -228 \\ 36 & 7 & -123 & -94 \\ -9 & -7 & 41 & 12 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 38

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -28 & -7 & 20 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 40

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 167 & 320 & 480 \\ -64 & -121 & -192 \\ -16 & -32 & -41 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 42

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} -38 & -20 & -8 & 188 \\ -14 & -18 & -4 & 90 \\ -7 & -5 & -7 & 42 \\ -7 & -5 & -2 & 37 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 43

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 & 16 \\ 42 & 25 & 21 & 60 \\ -28 & -20 & -16 & -46 \\ -14 & -10 & -7 & -25 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 45

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 18 & 3 & 30 \\ 0 & 7 & 0 \\ -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 47

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} -68 & -48 & -28 & 288 \\ 30 & 19 & 14 & -138 \\ -45 & -36 & -21 & 192 \\ -15 & -12 & -7 & 64 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 49

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 66 & 24 & -72 & -312 \\ 8 & 18 & -8 & -56 \\ 32 & -24 & -38 & -104 \\ 8 & 12 & -8 & -50 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 51

Exercice 25. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & 34 & 20 & 56 \\ -32 & -16 & -5 & -34 \\ -16 & -8 & -5 & -12 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 53

Exercice 26. Soit $A = \begin{pmatrix} -73 & -56 & -24 & 640 \\ -64 & -63 & -24 & 632 \\ -64 & -56 & -23 & 600 \\ -16 & -14 & -6 & 151 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 54

Exercice 27. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -22 & -17 & 36 \\ -11 & -6 & 13 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 56

Exercice 28. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 & -11 \\ -26 & -24 & -14 & 14 \\ 13 & 9 & 3 & -5 \\ -13 & -9 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 58

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & -27 & -12 & 78 \\ -16 & -11 & -6 & 34 \\ -16 & -11 & -6 & 34 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 60

Exercice 30. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -12 \\ -16 & -21 & 44 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 62

Exercice 31. Soit $A = \begin{pmatrix} -33 & -3 & 87 \\ 24 & 1 & -66 \\ -8 & -1 & 20 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 63

Exercice 32. Soit $A = \begin{pmatrix} -40 & -12 & 156 \\ 18 & 8 & -66 \\ -9 & -3 & 35 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 65

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} -15 & -12 & 60 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 20 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 66

Exercice 34. Soit $A = \begin{pmatrix} -14 & -4 & 72 \\ -9 & -3 & 48 \\ -3 & -1 & 16 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 68

Exercice 35. Soit $A = \begin{pmatrix} -19 & -4 & 96 \\ -16 & -4 & 84 \\ -4 & -1 & 21 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 69

Exercice 36. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -40 \\ -32 & -37 & 76 \\ -8 & -7 & 10 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 71

Exercice 37. Soit $A = \begin{pmatrix} 35 & 120 & -524 & -416 \\ -22 & 276 & -1118 & -482 \\ -11 & 60 & -238 & -76 \\ 11 & 15 & -71 & -83 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 72

Exercice 38. Soit $A = \begin{pmatrix} -15 & -6 & -2 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -11 & -6 & -2 & 18 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 74

Exercice 39. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 22 & 12 & -12 \\ -48 & -36 & -14 & 0 \\ -16 & -12 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 76

Exercice 40. Soit $A = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 8 & -48 \\ -33 & -35 & -12 & 66 \\ -22 & -18 & -11 & 34 \\ -11 & -9 & -4 & 14 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 78

Exercice 41. Soit $A = \begin{pmatrix} -19 & -7 & 31 \\ -12 & -9 & 26 \\ -12 & -7 & 24 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 80

Exercice 42. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -16 \\ -18 & -22 & 30 \\ -9 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 81

Exercice 43. Soit $A = \begin{pmatrix} 40 & 18 & 9 & 135 \\ 15 & 10 & 3 & 54 \\ 45 & 18 & 16 & 171 \\ -15 & -6 & -3 & -50 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 83

Exercice 44. Soit $A = \begin{pmatrix} 45 & 8 & 128 \\ -24 & 3 & -84 \\ -12 & -2 & -35 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 85

Exercice 45. Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 6 \\ -12 & 5 & -16 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : → page 86

$A = PDP^{-1}$.

Exercice 46. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & -16 \\ -30 & -23 & -15 & 39 \\ 10 & 7 & 5 & -11 \\ -10 & -7 & -5 & 11 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 88

Exercice 47. Soit $A = \begin{pmatrix} -232 & -77 & -883 & 1028 \\ 0 & -36 & 44 & 176 \\ 48 & 11 & 189 & -188 \\ -12 & -11 & -37 & 88 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 90

Exercice 48. Soit $A = \begin{pmatrix} -26 & 15 & -93 & -63 \\ 18 & -14 & 72 & 54 \\ 9 & -4 & 30 & 27 \\ -3 & -1 & -7 & -14 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 92

Exercice 49. Soit $A = \begin{pmatrix} -58 & -48 & 348 \\ -51 & -54 & 345 \\ -17 & -16 & 109 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 94

Exercice 50. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -10 \\ -34 & -6 & -4 \\ -17 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 96

Exercice 51. Soit $A = \begin{pmatrix} -54 & -56 & -124 & -6 \\ 85 & 124 & 342 & 43 \\ -20 & -32 & -92 & -12 \\ -5 & 8 & 42 & 9 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 97

Exercice 52. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 114 & 96 \\ 0 & 35 & 144 & 144 \\ -3 & -12 & -55 & -48 \\ 3 & 4 & 22 & 15 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 99

Exercice 53. Soit $A = \begin{pmatrix} -19 & 20 & 30 \\ -3 & -3 & 9 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 102

Exercice 54. Soit $A = \begin{pmatrix} -47 & -33 & 156 \\ 0 & -6 & 0 \\ -13 & -11 & 44 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 103

Exercice 55. Soit $A = \begin{pmatrix} 15 & -96 & -248 & -112 \\ 20 & -89 & -212 & -88 \\ -4 & 24 & 59 & 32 \\ -4 & 12 & 28 & 3 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 104

Exercice 56. Soit $A = \begin{pmatrix} 42 & 45 & 24 & 243 \\ 17 & 8 & 8 & 83 \\ 68 & 60 & 32 & 360 \\ -17 & -15 & -8 & -90 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 107

Exercice 57. Soit $A = \begin{pmatrix} 19 & 2 & 18 \\ -52 & 1 & -84 \\ -13 & -1 & -16 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 109

Exercice 58. Soit $A = \begin{pmatrix} -25 & -2 & -1 & 40 \\ -51 & 1 & -3 & 75 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -17 & -2 & -1 & 32 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 110

Exercice 59. Soit $A = \begin{pmatrix} 29 & 16 & 8 & -26 \\ -76 & -30 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -19 & -8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 112

Exercice 60. Soit $A = \begin{pmatrix} -66 & -21 & -15 & 189 \\ -19 & -4 & -5 & 51 \\ 76 & 28 & 25 & -196 \\ -19 & -7 & -5 & 54 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 114

Exercice 61. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -11 & -18 & 20 \\ -11 & -10 & 12 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 116

Exercice 62. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 & -30 \\ -10 & 28 & -30 & 70 \\ -10 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -22 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 118

Exercice 63. Soit $A = \begin{pmatrix} -43 & -24 & -12 & 144 \\ 12 & 5 & 4 & -44 \\ -24 & -16 & -7 & 80 \\ -12 & -8 & -4 & 41 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 119

Exercice 64. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & -72 & -222 & -288 \\ 8 & -116 & -300 & -432 \\ 0 & 24 & 64 & 96 \\ -2 & 12 & 30 & 40 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 121

Exercice 65. Soit $A = \begin{pmatrix} 27 & 32 & 24 & 226 \\ 51 & 42 & 36 & 342 \\ 68 & 64 & 46 & 472 \\ -17 & -16 & -12 & -120 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 124

Exercice 66. Soit $A = \begin{pmatrix} -12 & -7 & -5 & -6 \\ 44 & 31 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -11 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 126

Exercice 67. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -12 & 36 & 24 \\ -40 & -4 & 0 & -40 \\ -16 & -12 & 32 & 8 \\ 4 & 12 & -36 & -24 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 127

Exercice 68. Soit $A = \begin{pmatrix} -60 & -28 & -16 & 332 \\ -26 & -16 & -8 & 154 \\ -13 & -7 & -3 & 74 \\ -13 & -7 & -4 & 75 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 129

Exercice 69. Soit $A = \begin{pmatrix} -34 & -16 & -8 & 144 \\ -36 & -30 & -12 & 204 \\ -36 & -24 & -14 & 192 \\ -12 & -8 & -4 & 62 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 131

Exercice 70. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 42 & -12 \\ -24 & -75 & 312 & 96 \\ -6 & -18 & 75 & 24 \\ 3 & 6 & -30 & -21 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 134

Exercice 71. Soit $A = \begin{pmatrix} -20 & -6 & 96 \\ -14 & 2 & 54 \\ -7 & -2 & 33 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 136

Exercice 72. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & -108 & -288 & -396 \\ 12 & -170 & -462 & -624 \\ -12 & 36 & 76 & 120 \\ 6 & 18 & 66 & 76 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 137

Exercice 73. Soit $A = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 12 & 6 \\ -36 & -18 & -18 & -24 \\ 24 & 14 & 16 & 18 \\ -12 & -7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 139

Exercice 74. Soit $A = \begin{pmatrix} -150 & -36 & 696 & 732 \\ -84 & -30 & 408 & 444 \\ -24 & 0 & 102 & 96 \\ -12 & -9 & 66 & 81 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 141

Exercice 75. Soit $A = \begin{pmatrix} -40 & -9 & -3 & 99 \\ 10 & 0 & 1 & -26 \\ 40 & 12 & 3 & -96 \\ -10 & -3 & -1 & 23 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 143

Exercice 76. Soit $A = \begin{pmatrix} 46 & 39 & 21 & -15 \\ -18 & -16 & -7 & 0 \\ -72 & -52 & -25 & -24 \\ -18 & -13 & -7 & -3 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 145

Exercice 77. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 24 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 147

Exercice 78. Soit $A = \begin{pmatrix} -36 & -6 & -3 & 135 \\ -20 & -2 & -2 & 74 \\ -10 & -2 & 2 & 36 \\ -10 & -2 & -1 & 39 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 149

Exercice 79. Soit $A = \begin{pmatrix} -39 & -26 & -18 & 64 \\ 15 & 6 & 9 & -30 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -15 & -13 & -9 & 23 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 151

Exercice 80. Soit $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & -62 & -36 \\ -8 & 15 & 40 & 16 \\ 8 & -8 & -33 & -16 \\ -2 & 8 & 14 & 3 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 153

Exercice 81. Soit $A = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 38 \\ 10 & 7 & 20 \\ -10 & -9 & -22 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 155

Exercice 82. Soit $A = \begin{pmatrix} -41 & -22 & -16 & 100 \\ 51 & 32 & 24 & -132 \\ -68 & -44 & -30 & 164 \\ -17 & -11 & -8 & 43 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 156

Exercice 83. Soit $A = \begin{pmatrix} -16 & -9 & -8 & 1 \\ 30 & 22 & 24 & 0 \\ -10 & -9 & -12 & -1 \\ -10 & -9 & -8 & -5 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 158

Exercice 84. Soit $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 14 \\ 4 & 8 & 8 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 160

Exercice 85. Soit $A = \begin{pmatrix} 26 & 60 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 162

Exercice 86. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 40 & -28 \\ 36 & -1 & -112 & 82 \\ -12 & 3 & 45 & -27 \\ -12 & 1 & 28 & -16 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 163

Exercice 87. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & -14 \\ -24 & -18 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -12 & -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 165

Exercice 88. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -34 & -19 & 54 \\ -17 & -9 & 26 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 167

Exercice 89. Soit $A = \begin{pmatrix} 69 & -4 & -64 & 68 \\ -90 & 15 & 96 & -102 \\ 60 & -3 & -54 & 66 \\ -15 & 1 & 16 & -8 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 168

Exercice 90. Soit $A = \begin{pmatrix} -37 & -6 & 84 \\ 15 & 8 & -30 \\ -15 & -3 & 35 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 170

Exercice 91. Soit $A = \begin{pmatrix} 21 & 20 & 4 & 68 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 1 & -22 \\ -6 & -5 & -1 & -20 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles → page 172

que : $A = PDP^{-1}$.

Exercice 92. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -18 \\ -39 & -17 & 33 \\ -13 & -6 & 12 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 174

Exercice 93. Soit $A = \begin{pmatrix} -56 & -18 & 174 \\ 16 & 8 & -48 \\ -16 & -6 & 50 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 175

Exercice 94. Soit $A = \begin{pmatrix} 28 & 3 & 66 \\ 36 & 13 & 120 \\ -9 & -1 & -21 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 177

Exercice 95. Soit $A = \begin{pmatrix} 24 & 28 & 8 & 232 \\ 32 & 21 & 8 & 236 \\ 24 & 21 & 4 & 192 \\ -8 & -7 & -2 & -66 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 178

Exercice 96. Soit $A = \begin{pmatrix} -21 & -60 & 260 & -300 \\ -20 & -49 & 224 & -252 \\ -4 & -12 & 51 & -60 \\ 2 & 4 & -20 & 21 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 181

Exercice 97. Soit $A = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 8 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -8 & -7 & -4 & -7 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 183

Exercice 98. Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 4 & 42 \\ 26 & 9 & 4 & 56 \\ -26 & -12 & -3 & -64 \\ -13 & -6 & -2 & -31 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 184

Exercice 99. Soit $A = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 110 \\ -26 & -17 & 100 \\ -13 & -8 & 49 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 186

Exercice 100. Soit $A = \begin{pmatrix} -59 & -6 & 204 \\ 0 & 7 & 0 \\ -17 & -2 & 60 \end{pmatrix}$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. → page 188

Corrigé 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 1

$$
\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-37 & -28 & -4 & -212 \\ -36 & x-31 & -4 & -220 \\ 18 & 14 & x-7 & 122 \\ 9 & 7 & 1 & x+52 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-37 & -28 & -4 & -212 \\ -36 & x-31 & -4 & -220 \\ 0 & 0 & x-9 & -2x+18 \\ 9 & 7 & 1 & x+52 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4) \\
&= (x-9)\begin{vmatrix} x-37 & -28 & -4 & -212 \\ -36 & x-31 & -4 & -220 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 9 & 7 & 1 & x+52 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\begin{vmatrix} x-37 & -28 & -4 & -220 \\ -36 & x-31 & -4 & -228 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 1 & x+54 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_3) \\
&= (x-9)\begin{vmatrix} x-37 & -28 & -220 \\ -36 & x-31 & -228 \\ 9 & 7 & x+54 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 3^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-9)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 4x-4 \\ -36 & x-31 & -228 \\ 9 & 7 & x+54 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3) \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -36 & x-31 & -228 \\ 9 & 7 & x+54 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -36 & x-31 & -84 \\ 9 & 7 & x+18 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-31 & -84 \\ 7 & x+18 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-31 & -3x+9 \\ 7 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-3)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-31 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\cdot(x-3)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-10 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x-9)\cdot(x-3)\cdot(x-1).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-9)\cdot(X-3)\cdot(X-1)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, 10, 3, 1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
27x & + & 28y & + & 4z & + & 212t & = & 0 \\
36x & + & 21y & + & 4z & + & 220t & = & 0 \\
-18x & - & 14y & - & 3z & - & 122t & = & 0 \\
-9x & - & 7y & - & z & - & 62t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-9x & - & 7y & - & z & - & 62t & = & 0 \\
36x & + & 21y & + & 4z & + & 220t & = & 0 \\
-18x & - & 14y & - & 3z & - & 122t & = & 0 \\
27x & + & 28y & + & 4z & + & 212t & = & 0
\end{array}\right.
\quad (L_4 \leftrightarrow L_1)
$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -&9x&-&7y&-&z&-&62t&=0\\ &&-&7y&&&-&28t&=0 \quad (L_2\leftarrow L_2+4L_1)\\ &&&&-&z&+&2t&=0 \quad (L_3\leftarrow L_3-2L_1)\\ &&&7y&+&z&+&26t&=0 \quad (L_4\leftarrow L_4+3L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -&9x&-&7y&-&z&-&62t&=0\\ &&-&7y&&&-&28t&=0\\ &&&&-&z&+&2t&=0\\ &&&&&z&-&2t&=0 \quad (L_4\leftarrow L_4+L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -&9x&-&7y&-&z&-&62t&=0\\ &&-&7y&&&-&28t&=0\\ &&&&-&z&+&2t&=0\\ &&&&&&&0&=0 \quad (L_4\leftarrow L_4+L_3)\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x&=&-\frac{7}{9}y-\frac{1}{9}z-\frac{62}{9}t\\ y&=&-4t\\ z&=&2t\\ t&=&a\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x&=&-4a\\ y&=&-4a\\ z&=&2a\\ t&=&a\end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-10\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\-4\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\-4\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-9\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\-4\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-3\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\-4\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=10X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=9X_2$, $f_A(X_3)=AX_3=3X_3$ et $f_A(X_4)=AX_4=X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}10&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}-4&-4&-4&-3\\-4&-4&-3&-4\\2&3&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}10&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+107 & -6 & -106 & -318 \\ 98 & x-12 & -91 & -273 \\ 56 & -3 & x-58 & -159 \\ 14 & -1 & -13 & x-44 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-5 & 0 & -2x+10 & 0 \\ 98 & x-12 & -91 & -273 \\ 56 & -3 & x-58 & -159 \\ 14 & -1 & -13 & x-44 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 98 & x-12 & -91 & -273 \\ 56 & -3 & x-58 & -159 \\ 14 & -1 & -13 & x-44 \end{vmatrix} \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 98 & x-12 & 105 & -273 \\ 56 & -3 & x+54 & -159 \\ 14 & -1 & 15 & x-44 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1) \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} x-12 & 105 & -273 \\ -3 & x+54 & -159 \\ -1 & 15 & x-44 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} x-12 & 105 & -273 \\ 0 & x+9 & -3x-27 \\ -1 & 15 & x-44 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3) \\
&= (x-5) \cdot (x+9) \begin{vmatrix} x-12 & 105 & -273 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 15 & x-44 \end{vmatrix} \\
&= (x-5) \cdot (x+9) \begin{vmatrix} x-12 & 105 & 42 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 15 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2) \\
&= (x-5) \cdot (x+9) \begin{vmatrix} x-12 & 42 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-5) \cdot (x+9) \begin{vmatrix} x-12 & 6x-30 \\ -1 & x-5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 6C_1) \\
&= (x+9) \cdot (x-5)^2 \begin{vmatrix} x-12 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+9) \cdot (x-5)^2 \begin{vmatrix} x-6 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2) \\
&= (x-6) \cdot (x+9) \cdot (x-5)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-6) \cdot (X+9) \cdot (X-5)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{5, 6, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 6\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -113x &+& 6y &+& 106z &+& 318t &=& 0 \\ -98x &+& 6y &+& 91z &+& 273t &=& 0 \\ -56x &+& 3y &+& 52z &+& 159t &=& 0 \\ -14x &+& y &+& 13z &+& 38t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -14x &+& y &+& 13z &+& 38t &=& 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -98x &+& 6y &+& 91z &+& 273t &=& 0 \\ -56x &+& 3y &+& 52z &+& 159t &=& 0 \\ -113x &+& 6y &+& 106z &+& 318t &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -&14x&+&y&+&13z&+&38t&=0&\\ &&-&y&&&+&7t&=0&(L_2\leftarrow L_2-7L_1)\\ &&-&y&&&+&7t&=0&(L_3\leftarrow L_3-4L_1)\\ &&-&\frac{29}{14}y&+&\frac{15}{14}z&+&\frac{79}{7}t&=0&(L_4\leftarrow L_4-\frac{113}{14}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -&14x&+&y&+&13z&+&38t&=0&\\ &&-&y&&&+&7t&=0&\\ &&&&&&&0&=0&(L_3\leftarrow L_3-L_2)\\ &&&&&\frac{15}{14}z&-&\frac{45}{14}t&=0&(L_4\leftarrow L_4-\frac{29}{14}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -&14x&+&y&+&13z&+&38t&=0&(L_4\leftrightarrow L_3)\\ &&-&y&&&+&7t&=0&\\ &&&&&\frac{15}{14}z&-&\frac{45}{14}t&=0&\\ &&&&&&&0&=0& \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&\frac{1}{14}y+\frac{13}{14}z+\frac{19}{7}t\\ y&=&7t\\ z&=&3t\\ t&=&a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&6a\\ y&=&7a\\ z&=&3a\\ t&=&a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}6\\7\\3\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-6\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}6\\7\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+9\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}8\\7\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-5\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=6X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=-9X_2$, $f_A(X_3)=AX_3=5X_3$ et $f_A(X_4)=AX_4=5X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&-9&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}6&8&3&0\\7&7&3&0\\3&4&0&-3\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&-9&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

← page 1

Corrigé 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+60 & 24 & -232 \\ -28 & x-16 & 100 \\ 14 & 6 & x-54 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+60 & 24 & -232 \\ 0 & x-4 & 2x-8 \\ 14 & 6 & x-54 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3) \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x+60 & 24 & -232 \\ 0 & 1 & 2 \\ 14 & 6 & x-54 \end{vmatrix} \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x+60 & 24 & -280 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & 6 & x-66 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2) \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x+60 & -280 \\ 14 & x-66 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x+60 & 4x-40 \\ 14 & x-10 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-10)\cdot(x-4) \begin{vmatrix} x+60 & 4 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-10)\cdot(x-4) \begin{vmatrix} x+4 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x-4)\cdot(x+4).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-4)\cdot(X+4)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, 4, -4\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} -70x & - & 24y & + & 232z & = & 0 \\ 28x & + & 6y & - & 100z & = & 0 \\ -14x & - & 6y & + & 44z & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} -14x & - & 6y & + & 44z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 28x & + & 6y & - & 100z & = & 0 & \\ -70x & - & 24y & + & 232z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} -14x & - & 6y & + & 44z & = & 0 & \\ & - & 6y & - & 12z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & 6y & + & 12z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} -14x & - & 6y & + & 44z & = & 0 & \\ & - & 6y & - & 12z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{7}y + \frac{22}{7}z \\ y & = & -2z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4a \\ y & = & -2a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-

espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-4\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+4\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=10X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=4X_2$ et $f_A(X_3)=AX_3=-4X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}10&0&0\\0&4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}4&4&5\\-2&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}10&0&0\\0&4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 4. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x+63&48&36&-616\\56&x+53&36&-608\\56&48&x+38&-596\\14&12&9&x-147\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}x+7&0&0&-4x-28\\56&x+53&36&-608\\56&48&x+38&-596\\14&12&9&x-147\end{vmatrix}\quad(L_1\leftarrow L_1-4L_4)\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}1&0&0&-4\\56&x+53&36&-608\\56&48&x+38&-596\\14&12&9&x-147\end{vmatrix}\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\56&x+53&36&-384\\56&48&x+38&-372\\14&12&9&x-91\end{vmatrix}\quad(C_4\leftarrow C_4+4C_1)\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}x+53&36&-384\\48&x+38&-372\\12&9&x-91\end{vmatrix}\quad(\text{développement par rapport à la }1^{\text{re}}\text{ ligne})\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}x+5&0&-4x-20\\48&x+38&-372\\12&9&x-91\end{vmatrix}\quad(L_1\leftarrow L_1-4L_3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+5)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 48 & x+38 & -372 \\ 12 & 9 & x-91 \end{vmatrix} \\
&= (x+5)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 48 & x+38 & -180 \\ 12 & 9 & x-43 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1) \\
&= (x+5)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+38 & -180 \\ 9 & x-43 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+5)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+38 & 4x-28 \\ 9 & x-7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-7)\cdot(x+5)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+38 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-7)\cdot(x+5)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-7)\cdot(x+2)\cdot(x+5)\cdot(x+7).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X+2)\cdot(X+5)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7,-5,-2,7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} -70x - 48y - 36z + 616t = 0 \\ -56x - 60y - 36z + 608t = 0 \\ -56x - 48y - 45z + 596t = 0 \\ -14x - 12y - 9z + 140t = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -14x - 12y - 9z + 140t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -56x - 60y - 36z + 608t = 0 \\ -56x - 48y - 45z + 596t = 0 \\ -70x - 48y - 36z + 616t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -14x - 12y - 9z + 140t = 0 \\ -12y + 48t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ -9z + 36t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ 12y + 9z - 84t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -14x - 12y - 9z + 140t = 0 \\ -12y + 48t = 0 \\ -9z + 36t = 0 \\ 9z - 36t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -14x - 12y - 9z + 140t = 0 \\ -12y + 48t = 0 \\ -9z + 36t = 0 \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{6}{7}y - \frac{9}{14}z + 10t \\ y = 4t \\ z = 4t \\ t = a \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 4a \\ y = 4a \\ z = 4a \\ t = a \end{cases}
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-

espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-7\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\4\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\4\\5\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+5\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\5\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+7\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}5\\4\\4\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=7X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=-2X_2$, $f_A(X_3)=AX_3=-5X_3$ et $f_A(X_4)=AX_4=-7X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}7&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-7\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}4&4&4&5\\4&4&5&4\\4&5&4&4\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}7&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-7\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 5. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x+19&-60&30\\3&x-8&6\\-3&12&x-2\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}x+19&-60&30\\0&x+4&x+4\\-3&12&x-2\end{vmatrix}\quad(L_2\leftarrow L_2+L_3)\\
&=(x+4)\begin{vmatrix}x+19&-60&30\\0&1&1\\-3&12&x-2\end{vmatrix}\\
&=(x+4)\begin{vmatrix}x+19&-60&90\\0&1&0\\-3&12&x-14\end{vmatrix}\quad(C_3\leftarrow C_3-C_2)\\
&=(x+4)\begin{vmatrix}x+19&90\\-3&x-14\end{vmatrix}\quad(\text{développement par rapport à la }2^{\text{e}}\text{ ligne})\\
&=(x+4)\begin{vmatrix}x+4&5x+20\\-3&x-14\end{vmatrix}\quad(L_1\leftarrow L_1+5L_2)\\
&=(x+4)^2\begin{vmatrix}1&5\\-3&x-14\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (x+4)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1)$$
$$= (x+1)\cdot(x+4)^2.$$

Donc : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+4)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-4, -1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + \mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -18x & + & 60y & - & 30z & = & 0 \\ -3x & + & 9y & - & 6z & = & 0 \\ 3x & - & 12y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3x & + & 9y & - & 6z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -18x & + & 60y & - & 30z & = & 0 & \\ 3x & - & 12y & + & 3z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3x & + & 9y & - & 6z & = & 0 & \\ & & 6y & + & 6z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1) \\ & - & 3y & - & 3z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3x & + & 9y & - & 6z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 3y & - & 3z & = & 0 & \\ & & 6y & + & 6z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3x & + & 9y & - & 6z & = & 0 & \\ & - & 3y & - & 3z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y - 2z \\ y & = & -z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5a \\ y & = & -a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 4\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -4X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-26 & -24 & 16 \\ 32 & x+26 & -8 \\ 16 & 12 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 2x+12 \\ 32 & x+26 & -8 \\ 16 & 12 & x-2 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 32 & x+26 & -8 \\ 16 & 12 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 32 & x+26 & -72 \\ 16 & 12 & x-34 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+26 & -72 \\ 12 & x-34 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-10 & -3x+30 \\ 12 & x-34 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 12 & x-34 \end{vmatrix} \\
&= (x-10)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-10)\cdot(x+2)\cdot(x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X+2)\cdot(X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, -6, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 16x + 24y - 16z = 0 \\ -32x - 36y + 8z = 0 \\ -16x - 12y - 8z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} 16x + 24y - 16z = 0 & \\ 12y - 24z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ 12y - 24z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 16x + 24y - 16z = 0 & \\ 12y - 24z = 0 & \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y + z \\ y = 2z \\ z = a \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x &= -2a \\ y &= 2a \\ z &= a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -7 & -1 & 29 \\ 40 & x+33 & 4 & -104 \\ 10 & 7 & x & -20 \\ 10 & 7 & 1 & x-21 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+8 & 0 & 0 & x+8 \\ 40 & x+33 & 4 & -104 \\ 10 & 7 & x & -20 \\ 10 & 7 & 1 & x-21 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_4) \\
&= (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 40 & x+33 & 4 & -104 \\ 10 & 7 & x & -20 \\ 10 & 7 & 1 & x-21 \end{vmatrix} \\
&= (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & x+33 & 4 & -144 \\ 10 & 7 & x & -30 \\ 10 & 7 & 1 & x-31 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+8)\begin{vmatrix} x+33 & 4 & -144 \\ 7 & x & -30 \\ 7 & 1 & x-31 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+8)\begin{vmatrix} x+33 & 4 & -144 \\ 0 & x-1 & -x+1 \\ 7 & 1 & x-31 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
&= (x-1)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+33 & 4 & -144 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & x-31 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+33 & 4 & -140 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & x-30 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\
&= (x-1)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+33 & -140 \\ 7 & x-30 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-1)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+33 & 4x-8 \\ 7 & x-2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+33 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+5 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+5)\cdot(x+8).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+5)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 1, 2, -5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 2\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & & 7y & + & z & - & 29t & = & 0 \\
-40x & - & 35y & - & 4z & + & 104t & = & 0 \\
-10x & - & 7y & - & 2z & + & 20t & = & 0 \\
-10x & - & 7y & - & z & + & 19t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-10x & - & 7y & - & 2z & + & 20t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\
-40x & - & 35y & - & 4z & + & 104t & = & 0 & \\
 & & 7y & + & z & - & 29t & = & 0 & \\
-10x & - & 7y & - & z & + & 19t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-10x & - & 7y & - & 2z & + & 20t & = & 0 & \\
 & - & 7y & + & 4z & + & 24t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\
 & & 7y & + & z & - & 29t & = & 0 & \\
 & & & & z & - & t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-10x & - & 7y & - & 2z & + & 20t & = & 0 & \\
 & - & 7y & + & 4z & + & 24t & = & 0 & \\
 & & & & 5z & - & 5t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\
 & & & & z & - & t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-10x & - & 7y & - & 2z & + & 20t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\
 & - & 7y & + & 4z & + & 24t & = & 0 & \\
 & & & & z & - & t & = & 0 & \\
 & & & & 5z & - & 5t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-10x & - & 7y & - & 2z & + & 20t & = & 0 & \\
 & - & 7y & + & 4z & + & 24t & = & 0 & \\
 & & & & z & - & t & = & 0 & \\
 & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R},\
\left\{\begin{array}{lcl}
x & = & -\frac{7}{10}y - \frac{1}{5}z + 2t \\
y & = & \frac{4}{7}z + \frac{24}{7}t \\
z & = & t \\
t & = & a
\end{array}\right.
$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= -a \\ y &= 4a \\ z &= a \\ t &= a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -5X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x - 50 & -40 & -128 \\ 14 & x + 12 & 36 \\ 14 & 10 & x + 38 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x - 50 & -40 & -128 \\ 0 & x + 2 & -x - 2 \\ 14 & 10 & x + 38 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\ &= (x + 2) \begin{vmatrix} x - 50 & -40 & -128 \\ 0 & 1 & -1 \\ 14 & 10 & x + 38 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-50 & -40 & -168 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & 10 & x+48 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-50 & -168 \\ 14 & x+48 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-50 & -3x-18 \\ 14 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x+2)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x-50 & -3 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x-8 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= (x-8)\cdot(x+2)\cdot(x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X+2)\cdot(X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, -6, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 42x &+& 40\,y &+& 128\,z &=& 0 \\ -\ 14x &-& 20\,y &-& 36\,z &=& 0 \\ -\ 14x &-& 10\,y &-& 46\,z &=& 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ 14x &-& 20\,y &-& 36\,z &=& 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 42x &+& 40\,y &+& 128\,z &=& 0 & \\ -\ 14x &-& 10\,y &-& 46\,z &=& 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ 14x &-& 20\,y &-& 36\,z &=& 0 & \\ &-& 20\,y &+& 20\,z &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ && 10\,y &-& 10\,z &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ 14x &-& 20\,y &-& 36\,z &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ && 10\,y &-& 10\,z &=& 0 & \\ &-& 20\,y &+& 20\,z &=& 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ 14x &-& 20\,y &-& 36\,z &=& 0 & \\ && 10\,y &-& 10\,z &=& 0 & \\ &&&&0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{10}{7}y - \frac{18}{7}z \\ y &=& z \\ z &=& a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4a \\ y &=& a \\ z &=& a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des

bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 9. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+142 & 576 & -144 \\ -32 & x-130 & 32 \\ 8 & 32 & x-10 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & 576 & -144 \\ 0 & x-130 & 32 \\ x-2 & 32 & x-10 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_3) \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 576 & -144 \\ 0 & x-130 & 32 \\ 1 & 32 & x-10 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 576 & -144 \\ 0 & x-130 & 32 \\ 0 & -544 & x+134 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x-130 & 32 \\ -544 & x+134 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 1}^{\text{re}} \text{ colonne}) \\
&= (x-2)\left((x-130) \times (x+134) + 17408\right) \\
&= (x-2) \times \left(x^2 + 4x - 12\right).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X+6) \cdot (X-2)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6, 2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + 6\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -136x - 576y + 144z = 0 \\ 32x + 136y - 32z = 0 \\ -8x - 32y + 16z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8x - 32y + 16z = 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 32x + 136y - 32z = 0 \\ -136x - 576y + 144z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ 8x & - & 32\,y & + & 16\,z & = & 0 \\ & & 8\,y & + & 32\,z & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & - & 32\,y & - & 128\,z & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 17L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ 8x & - & 32\,y & + & 16\,z & = & 0 \\ & & 8\,y & + & 32\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4y + 2z \\ y & = & -4z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 18a \\ y & = & -4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -6X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = 2X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 18 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-10 & 0 & -24 & 0 \\ -4 & x-2 & -12 & 0 \\ 2 & 0 & x+4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & x-4 \end{vmatrix}$$

$$= (x-4)\begin{vmatrix} x-10 & 0 & -24 \\ -4 & x-2 & -12 \\ 2 & 0 & x+4 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 4}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= (x-4)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x-10 & -24 \\ 2 & x+4 \end{vmatrix} \text{ (développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= (x-4)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x-10 & -3x+6 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1)$$

$$= (x-4)\cdot(x-2)^2\begin{vmatrix} x-10 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-4)\cdot(x-2)^2\begin{vmatrix} x-4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2)$$

$$= (x-4)^2\cdot(x-2)^2.$$

Donc : $\chi_A = (X-4)^2 \cdot (X-2)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,4\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 4\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} & 6x & & + & 24z & = & 0 \\ & 4x & -\ 2y & + & 12z & = & 0 \\ - & 2x & & - & 8z & = & 0 \\ & & -\ 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} - & 2x & & - & 8z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & 4x & -\ 2y & + & 12z & = & 0 & \\ & 6x & & + & 24z & = & 0 & \\ & & -\ 2y & - & 4z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} - & 2x & & - & 8z & = & 0 & \\ & & -\ 2y & - & 4z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \\ & & -\ 2y & - & 4z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} - & 2x & & - & 8z & = & 0 & \\ & & -\ 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4z \\ y & = & -2z \\ z & = & a \\ t & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4a \\ y & = & -2a \\ z & = & a \\ t & = & b \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 4X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = 2X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-4 & -5 & -3 & 14 \\ 36 & x+21 & 12 & -40 \\ -18 & -10 & x-7 & 16 \\ 9 & 5 & 3 & x-9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+5 & 0 & 0 & x+5 \\ 36 & x+21 & 12 & -40 \\ -18 & -10 & x-7 & 16 \\ 9 & 5 & 3 & x-9 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_4) \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 36 & x+21 & 12 & -40 \\ -18 & -10 & x-7 & 16 \\ 9 & 5 & 3 & x-9 \end{vmatrix} \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & x+21 & 12 & -76 \\ -18 & -10 & x-7 & 34 \\ 9 & 5 & 3 & x-18 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} x+21 & 12 & -76 \\ -10 & x-7 & 34 \\ 5 & 3 & x-18 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} x+21 & 12 & -76 \\ 0 & x-1 & 2x-2 \\ 5 & 3 & x-18 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3) \\
&= (x-1)\cdot(x+5) \begin{vmatrix} x+21 & 12 & -76 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & x-18 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x+5) \begin{vmatrix} x+21 & 12 & -100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & x-24 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x+21 & -100 \\ 5 & x-24 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}\\
&= (x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x+21 & 4x-16 \\ 5 & x-4 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)\\
&= (x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x+21 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\\
&= (x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)\\
&= (x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+5).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-4)\cdot(X-1)\cdot(X+1)\cdot(X+5)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,-5,4,-1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 4\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 5y + 3z - 14t = 0 \\ -36x - 25y - 12z + 40t = 0 \\ 18x + 10y + 3z - 16t = 0 \\ -9x - 5y - 3z + 5t = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -9x - 5y - 3z + 5t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -36x - 25y - 12z + 40t = 0 \\ 18x + 10y + 3z - 16t = 0 \\ 5y + 3z - 14t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -9x - 5y - 3z + 5t = 0 \\ -5y + 20t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ -3z - 6t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\ 5y + 3z - 14t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -9x - 5y - 3z + 5t = 0 \\ -5y + 20t = 0 \\ -3z - 6t = 0 \\ 3z + 6t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -9x - 5y - 3z + 5t = 0 \\ -5y + 20t = 0 \\ -3z - 6t = 0 \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = -\frac{5}{9}y - \frac{1}{3}z + \frac{5}{9}t \\ y = 4t \\ z = -2t \\ t = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = -a \\ y = 4a \\ z = -2a \\ t = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto$

AX l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -5X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ -18 & x-8 & -2 \\ 9 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-8 & -2 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-7 & x-7 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-7 & 0 \\ 1 & x-6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= (x-7) \cdot (x-6) \cdot (x+2).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-7) \cdot (X-6) \cdot (X+2)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, 6, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -9x & & & & & = & 0 \\ 18x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -9x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -9x & & & & & = & 0 & \\ & & y & + & 2z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & - & y & - & 2z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -9x & & & & & = & 0 & \\ & & y & + & 2z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -2z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -2a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 6X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -2X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 13. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+47 & 24 & 9 & -147 \\ -28 & x-17 & -6 & 86 \\ 42 & 24 & x+3 & -114 \\ 14 & 8 & 3 & x-44 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+47 & 24 & 9 & -147 \\ 0 & x-1 & 0 & 2x-2 \\ 42 & 24 & x+3 & -114 \\ 14 & 8 & 3 & x-44 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4) \\
&= (x-1) \begin{vmatrix} x+47 & 24 & 9 & -147 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 42 & 24 & x+3 & -114 \\ 14 & 8 & 3 & x-44 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-1)\begin{vmatrix} x+47 & 24 & 9 & -195 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 42 & 24 & x+3 & -162 \\ 14 & 8 & 3 & x-60 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2) \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} x+47 & 9 & -195 \\ 42 & x+3 & -162 \\ 14 & 3 & x-60 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} x+5 & 0 & -3x-15 \\ 42 & x+3 & -162 \\ 14 & 3 & x-60 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3) \\
&= (x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 42 & x+3 & -162 \\ 14 & 3 & x-60 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 42 & x+3 & -36 \\ 14 & 3 & x-18 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \\
&= (x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x+3 & -36 \\ 3 & x-18 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x-9 & -4x+36 \\ 3 & x-18 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & x-18 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & x-6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-6)\cdot(x-1)\cdot(x+5).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-9)\cdot(X-6)\cdot(X-1)\cdot(X+5)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, -5, 6, 1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 9\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-56x & - & 24y & - & 9z & + & 147t & = & 0 \\
28x & + & 8y & + & 6z & - & 86t & = & 0 \\
-42x & - & 24y & - & 12z & + & 114t & = & 0 \\
-14x & - & 8y & - & 3z & + & 35t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 8y & - & 3z & + & 35t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\
28x & + & 8y & + & 6z & - & 86t & = & 0 & \\
-42x & - & 24y & - & 12z & + & 114t & = & 0 & \\
-56x & - & 24y & - & 9z & + & 147t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 8y & - & 3z & + & 35t & = & 0 & \\
 & - & 8y & & & - & 16t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\
 & & & - & 3z & + & 9t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\
 & & 8y & + & 3z & + & 7t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 8y & - & 3z & + & 35t & = & 0 & \\
 & - & 8y & & & - & 16t & = & 0 & \\
 & & & - & 3z & + & 9t & = & 0 & \\
 & & & & 3z & - & 9t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 8y & - & 3z & + & 35t & = & 0 & \\
 & - & 8y & & & - & 16t & = & 0 & \\
 & & & - & 3z & + & 9t & = & 0 & \\
 & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl}
x & = & -\frac{4}{7}y - \frac{3}{14}z + \frac{5}{2}t \\
y & = & -2t \\
z & = & 3t \\
t & = & a
\end{array}\right.
$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & -2a \\ z & = & 3a \\ t & = & a \end{array} \right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 9X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 6X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -5X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 14. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+4 & 1 & -6 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 3 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x+4 & -6 \\ 3 & x-5 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}} \text{ ligne)} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & -6 \\ x-2 & x-5 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & -6 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{aligned}$$

$$= (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1).$$

Donc : $\chi_A = (X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+1)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2, -1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -6x - y + 6z = 0 \\ -y = 0 \\ -3x - y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - y + 3z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -y = 0 \\ -6x - y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y + 3z = 0 \\ -y = 0 \\ y = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y + 3z = 0 \\ -y = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y + z \\ y = 0 \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ z = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 15. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$
\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-14 & -8 & -24 \\ -8 & x-6 & -16 \\ 8 & 4 & x+14 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-14 & -8 & -24 \\ 0 & x-2 & x-2 \\ 8 & 4 & x+14 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-14 & -8 & -24 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & x+14 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-14 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & x+10 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-14 & -16 \\ 8 & x+10 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-6 & x-6 \\ 8 & x+10 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-6 & 0 \\ 8 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= (x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+2).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-6)\cdot(X-2)\cdot(X+2)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 6, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 6\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 8x & + & 8y & + & 24z & = & 0 \\ 8x & & & + & 16z & = & 0 \\ -8x & - & 4y & - & 20z & = & 0 \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 8x & + & 8y & + & 24z & = & 0 & \\ & - & 8y & - & 8z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 8x & + & 8y & + & 24z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 & \\ & - & 8y & - & 8z & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 8x & + & 8y & + & 24z & = & 0 & \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y-3z \\ y & = & -z \\ z & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a \\ y & = & -a \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A - 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-

espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-6\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-2\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=6X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=2X_2$ et $f_A(X_3)=AX_3=-2X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}-2&-2&-1\\-1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 16. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x-46&0&108\\-72&x+8&144\\-18&0&x+44\end{vmatrix}\\
&=(x+8)\begin{vmatrix}x-46&108\\-18&x+44\end{vmatrix}\quad\text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}\\
&=(x+8)\begin{vmatrix}x+8&-3x-24\\-18&x+44\end{vmatrix}\quad(L_1\leftarrow L_1-3L_2)\\
&=(x+8)^2\begin{vmatrix}1&-3\\-18&x+44\end{vmatrix}\\
&=(x+8)^2\begin{vmatrix}1&0\\-18&x-10\end{vmatrix}\quad(C_2\leftarrow C_2+3C_1)\\
&=(x-10)\cdot(x+8)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A=(X-10)\cdot(X+8)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{-8,10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX=\lambda X$, d'inconnue $X\in\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A-10\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}36x&&&-&108\,z&=&0\\72x&-&18\,y&-&144\,z&=&0\\18x&&&-&54\,z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcll}18x&&&-&54\,z&=&0&(L_3\leftrightarrow L_1)\\72x&-&18\,y&-&144\,z&=&0\\36x&&&-&108\,z&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 18x & & & - & 54\,z & = & 0 \\ & - & 18\,y & + & 72\,z & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3z \\ y & = & 4z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & 4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -8X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 17. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-71 & 0 & 216 & 216 \\ -90 & x-20 & 312 & 228 \\ -36 & -7 & x+123 & 94 \\ 9 & 7 & -41 & x-12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-71 & 0 & 216 & 216 \\ -\frac{36}{7}x + \frac{90}{7} & 0 & \frac{1}{7}x^2 + \frac{103}{7}x - \frac{276}{7} & \frac{94}{7}x - \frac{284}{7} \\ -36 & -7 & x+123 & 94 \\ -27 & 0 & x+82 & x+82 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot(x-20)\right] L_3) \\ \\ (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= 7\begin{vmatrix} x-71 & 216 & 216 \\ -\frac{36}{7}x+\frac{90}{7} & \frac{1}{7}x^2+\frac{103}{7}x-\frac{276}{7} & \frac{94}{7}x-\frac{284}{7} \\ -27 & x+82 & x+82 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)} \\
&= 7\begin{vmatrix} x-71 & 216 & 216 \\ -\frac{36}{7}x-\frac{288}{7} & \frac{1}{7}x^2+\frac{117}{7}x+\frac{872}{7} & \frac{108}{7}x+\frac{864}{7} \\ -27 & x+82 & x+82 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2+2L_3) \\
&= 7\begin{vmatrix} (x-71) & 2^3\cdot 3^3 & 2^3\cdot 3^3 \\ \left(-\frac{36}{7}\right)\cdot(x+8) & \left(\frac{1}{7}\right)\cdot(x+8)\cdot(x+109) & \left(\frac{108}{7}\right)\cdot(x+8) \\ -1\cdot 3^3 & (x+82) & (x+82) \end{vmatrix} \\
&= (7)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x-71 & 216 & 216 \\ -\frac{36}{7} & \frac{1}{7}x+\frac{109}{7} & \frac{108}{7} \\ -27 & x+82 & x+82 \end{vmatrix} \\
&= (7)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x-71 & \frac{1}{36}x^2+\frac{19}{18}x+\frac{37}{36} & 3x+3 \\ -\frac{36}{7} & 0 & 0 \\ -27 & \frac{1}{4}x+\frac{1}{4} & x+1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \left(C_2 \leftarrow C_2-\left[\left(-\frac{1}{36}\right)\cdot(x+109)\right]C_1\right) \\ (C_3 \leftarrow C_3+3C_1) \end{array} \\
&= (36)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} \frac{1}{36}x^2+\frac{19}{18}x+\frac{37}{36} & 3x+3 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4} & x+1 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (36)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{36}\right)\cdot(x+1)\cdot(x+37) & (3)\cdot(x+1) \\ \left(\frac{1}{4}\right)\cdot(x+1) & (x+1) \end{vmatrix} \\
&= (36)\cdot(x+8)\cdot(x+1)^2\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{36}\right)\cdot(x+37) & 3 \\ 2^{-2} & 1 \end{vmatrix} \\
&= (36)\cdot(x+8)\cdot(x+1)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{36}x+\frac{5}{18} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1-3L_2) \\
&= (x+8)\cdot(x+10)\cdot(x+1)^2.
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X+8)\cdot(X+10)\cdot(X+1)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8,-10,-1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A+8\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
79x & & & - & 216\,z & - & 216\,t & = & 0 \\
90x & + & 28\,y & - & 312\,z & - & 228\,t & = & 0 \\
36x & + & 7\,y & - & 115\,z & - & 94\,t & = & 0 \\
-\ 9x & - & 7\,y & + & 41\,z & + & 20\,t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-\ 9x & - & 7\,y & + & 41\,z & + & 20\,t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\
90x & + & 28\,y & - & 312\,z & - & 228\,t & = & 0 & \\
36x & + & 7\,y & - & 115\,z & - & 94\,t & = & 0 & \\
79x & & & - & 216\,z & - & 216\,t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-\ 9x & - & 7\,y & + & 41\,z & + & 20\,t & = & 0 & \\
 & - & 42\,y & + & 98\,z & - & 28\,t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2+10L_1) \\
 & - & 21\,y & + & 49\,z & - & 14\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3+4L_1) \\
 & - & \frac{553}{9}\,y & + & \frac{1295}{9}\,z & - & \frac{364}{9}\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4+\frac{79}{9}L_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-\ 9x & - & 7\,y & + & 41\,z & + & 20\,t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\
 & - & 21\,y & + & 49\,z & - & 14\,t & = & 0 & \\
 & - & 42\,y & + & 98\,z & - & 28\,t & = & 0 & \\
 & - & \frac{553}{9}\,y & + & \frac{1295}{9}\,z & - & \frac{364}{9}\,t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-\ 9x & - & 7\,y & + & 41\,z & + & 20\,t & = & 0 & \\
 & - & 21\,y & + & 49\,z & - & 14\,t & = & 0 & \\
 & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3-2L_2) \\
 & & & & \frac{14}{27}\,z & + & \frac{14}{27}\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4-\frac{79}{27}L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-\ 9x & - & 7\,y & + & 41\,z & + & 20\,t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\
 & - & 21\,y & + & 49\,z & - & 14\,t & = & 0 & \\
 & & & & \frac{14}{27}\,z & + & \frac{14}{27}\,t & = & 0 & \\
 & & & & & & 0 & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= -\frac{7}{9}y + \frac{41}{9}z + \frac{20}{9}t \\ y &= \frac{7}{3}z - \frac{2}{3}t \\ z &= -t \\ t &= a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 0 \\ y &= -3a \\ z &= -a \\ t &= a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -10X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 & 0 \\ -3 & -10 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 18. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+9 & 0 & 0 \\ 28 & x+7 & -20 \\ 7 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x+9)\begin{vmatrix} x+7 & -20 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\ &= (x+9)\begin{vmatrix} x+7 & 4x+8 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x+7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x+3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+9).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X+2)\cdot(X+3)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,-2,-9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A+2\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -7x & & & & & = & 0 \\ -28x & - & 5y & + & 20z & = & 0 \\ -7x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -7x & & & & & = & 0 & \\ & - & 5y & + & 20z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & - & y & + & 4z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -7x & & & & & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & y & + & 4z & = & 0 & \\ & - & 5y & + & 20z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -7x & & & & & = & 0 & \\ & - & y & + & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 4z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A+2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A+2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -9X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 19. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-167 & -320 & -480 \\ 64 & x+121 & 192 \\ 16 & 32 & x+41 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-167 & -2x+14 & -480 \\ 64 & x-7 & 192 \\ 16 & 0 & x+41 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\
&= (x-7)\begin{vmatrix} x-167 & -2 & -480 \\ 64 & 1 & 192 \\ 16 & 0 & x+41 \end{vmatrix} \\
&= (x-7)\begin{vmatrix} x-39 & 0 & -96 \\ 64 & 1 & 192 \\ 16 & 0 & x+41 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2) \\
&= (x-7)\begin{vmatrix} x-39 & -96 \\ 16 & x+41 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne}) \\
&= (x-7)\begin{vmatrix} x-7 & 2x-14 \\ 16 & x+41 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2) \\
&= (x-7)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 16 & x+41 \end{vmatrix} \\
&= (x-7)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16 & x+9 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\
&= (x+9)\cdot(x-7)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X+9)\cdot(X-7)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{7, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + 9\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 176x & + & 320\,y & + & 480\,z & = & 0 \\ -\ 64x & - & 112\,y & - & 192\,z & = & 0 \\ -\ 16x & - & 32\,y & - & 32\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ 16x & - & 32\,y & - & 32\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -\ 64x & - & 112\,y & - & 192\,z & = & 0 & \\ 176x & + & 320\,y & + & 480\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ 16x & - & 32\,y & - & 32\,z & = & 0 & \\ & & 16\,y & - & 64\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & - & 32\,y & + & 128\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 11L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ 16x & - & 32\,y & - & 32\,z & = & 0 & \\ & & 16\,y & - & 64\,z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y-2z \\ y & = & 4z \\ z & = & a \end{array}\right.$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -10a \\ y & = & 4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A+9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A+9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A-7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -9X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 7X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = 7X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -10 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 20. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+38 & 20 & 8 & -188 \\ 14 & x+18 & 4 & -90 \\ 7 & 5 & x+7 & -42 \\ 7 & 5 & 2 & x-37 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+38 & 20 & 8 & -188 \\ 14 & x+18 & 4 & -90 \\ 0 & 0 & x+5 & -x-5 \\ 7 & 5 & 2 & x-37 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_4) \\
&= (x+5)\begin{vmatrix} x+38 & 20 & 8 & -188 \\ 14 & x+18 & 4 & -90 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 2 & x-37 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (x+5)\begin{vmatrix} x+38 & 20 & -180 & -188 \\ 14 & x+18 & -86 & -90 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & x-35 & x-37 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_4)$$

$$= (x+5)\begin{vmatrix} x+38 & 20 & -180 \\ 14 & x+18 & -86 \\ 7 & 5 & x-35 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$= (x+5)\begin{vmatrix} x+38 & 20 & -180 \\ 0 & x+8 & -2x-16 \\ 7 & 5 & x-35 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3)$$

$$= (x+5)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+38 & 20 & -180 \\ 0 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & x-35 \end{vmatrix}$$

$$= (x+5)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+38 & 20 & -140 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & x-25 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2)$$

$$= (x+5)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+38 & -140 \\ 7 & x-25 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$= (x+5)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+38 & 4x+12 \\ 7 & x+3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)$$

$$= (x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+38 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+10 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)$$

$$= (x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+8)\cdot(x+10).$$

Donc : $\chi_A = (X+3)\cdot(X+5)\cdot(X+8)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8,-5,-3,-10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + 3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -35x & - & 20y & - & 8z & + & 188t & = & 0 \\ -14x & - & 15y & - & 4z & + & 90t & = & 0 \\ -7x & - & 5y & - & 4z & + & 42t & = & 0 \\ -7x & - & 5y & - & 2z & + & 40t & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -7x & - & 5y & - & 4z & + & 42t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -14x & - & 15y & - & 4z & + & 90t & = & 0 & \\ -35x & - & 20y & - & 8z & + & 188t & = & 0 & \\ -7x & - & 5y & - & 2z & + & 40t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -7x & - & 5y & - & 4z & + & 42t & = & 0 & \\ & - & 5y & + & 4z & + & 6t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & 5y & + & 12z & - & 22t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \\ & & & & 2z & - & 2t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -7x & - & 5y & - & 4z & + & 42t & = & 0 & \\ & - & 5y & + & 4z & + & 6t & = & 0 & \\ & & & & 16z & - & 16t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ & & & & 2z & - & 2t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -7x & - & 5y & - & 4z & + & 42t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & - & 5y & + & 4z & + & 6t & = & 0 & \\ & & & & 2z & - & 2t & = & 0 & \\ & & & & 16z & - & 16t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -7x & - & 5y & - & 4z & + & 42t & = & 0 & \\ & - & 5y & + & 4z & + & 6t & = & 0 & \\ & & & & 2z & - & 2t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= -\frac{5}{7}y - \frac{4}{7}z + 6t \\ y &= \frac{4}{5}z + \frac{6}{5}t \\ z &= t \\ t &= a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 4a \\ y &= 2a \\ z &= a \\ t &= a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A+3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -5X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -10X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 21. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-5 & -10 & -7 & -16 \\ -42 & x-25 & -21 & -60 \\ 28 & 20 & x+16 & 46 \\ 14 & 10 & 7 & x+25 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-5 & x-5 & x-5 & x-5 \\ -42 & x-25 & -21 & -60 \\ 28 & 20 & x+16 & 46 \\ 14 & 10 & 7 & x+25 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 0 & 0 \\ -42 & x+17 & 21 & -18 \\ 28 & -8 & x-12 & 18 \\ 14 & -4 & -7 & x+11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \end{matrix} \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} x+17 & 21 & -18 \\ -8 & x-12 & 18 \\ -4 & -7 & x+11 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}) \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} x+9 & x+9 & 0 \\ -8 & x-12 & 18 \\ -4 & -7 & x+11 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= (x-5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & x-12 & 18 \\ -4 & -7 & x+11 \end{vmatrix} \\
&= (x-5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & x-4 & 18 \\ -4 & -3 & x+11 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= (x-5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x-4 & 18 \\ -3 & x+11 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x-5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x+5 & -3x-15 \\ -3 & x+11 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-5)\cdot(x+5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & x+11 \end{vmatrix} \\
&= (x-5)\cdot(x+5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-5)\cdot(x+2)\cdot(x+5)\cdot(x+9).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-5)\cdot(X+2)\cdot(X+5)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-5, 5, -2, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 5\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & & 10y & + & 7z & + & 16t & = & 0 \\
42x & + & 20y & + & 21z & + & 60t & = & 0 \\
-28x & - & 20y & - & 21z & - & 46t & = & 0 \\
-14x & - & 10y & - & 7z & - & 30t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 10y & - & 7z & - & 30t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\
42x & + & 20y & + & 21z & + & 60t & = & 0 & \\
-28x & - & 20y & - & 21z & - & 46t & = & 0 & \\
 & & 10y & + & 7z & + & 16t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 10y & - & 7z & - & 30t & = & 0 & \\
 & - & 10y & & & - & 30t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\
 & & & - & 7z & + & 14t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\
 & & 10y & + & 7z & + & 16t & = & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 10y & - & 7z & - & 30t & = & 0 & \\
 & - & 10y & & & - & 30t & = & 0 & \\
 & & & - & 7z & + & 14t & = & 0 & \\
 & & & & 7z & - & 14t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
-14x & - & 10y & - & 7z & - & 30t & = & 0 & \\
 & - & 10y & & & - & 30t & = & 0 & \\
 & & & - & 7z & + & 14t & = & 0 & \\
 & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl}
x & = & -\frac{5}{7}y - \frac{1}{2}z - \frac{15}{7}t \\
y & = & -3t \\
z & = & 2t \\
t & = & a
\end{array}\right.
$$

$$\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -a \\ y & = & -3a \\ z & = & 2a \\ t & = & a \end{array} \right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -5X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 22. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-18 & -3 & -30 \\ 0 & x-7 & 0 \\ 5 & 1 & x+7 \end{vmatrix} \\ &= (x-7)\begin{vmatrix} x-18 & -30 \\ 5 & x+7 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\ &= (x-7)\begin{vmatrix} x-8 & 2x-16 \\ 5 & x+7 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2) \\ &= (x-8)\cdot(x-7)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & x+7 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (x-8)\cdot(x-7)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)$$
$$= (x-8)\cdot(x-7)\cdot(x-3).$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X-7)\cdot(X-3)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, 3, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} & 10x & + & 3y & + & 30z & = 0 \\ & & - & y & & & = 0 \\ - & 5x & - & y & - & 15z & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} - & 5x & - & y & - & 15z & = 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & & - & y & & & = 0 \\ & 10x & + & 3y & + & 30z & = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} - & 5x & - & y & - & 15z & = 0 \\ & & - & y & & & = 0 \\ & & & y & & & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} - & 5x & - & y & - & 15z & = 0 \\ & & - & y & & & = 0 \\ & & & & & 0 & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{5}y - 3z \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right.$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3a \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 7X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = 3X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :
$$A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1},$$
d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 23. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+68 & 48 & 28 & -288 \\ -30 & x-19 & -14 & 138 \\ 45 & 36 & x+21 & -192 \\ 15 & 12 & 7 & x-64 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+68 & 48 & 28 & -288 \\ 0 & x+5 & 0 & 2x+10 \\ 45 & 36 & x+21 & -192 \\ 15 & 12 & 7 & x-64 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4) \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 48 & 28 & -288 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 45 & 36 & x+21 & -192 \\ 15 & 12 & 7 & x-64 \end{vmatrix} \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 48 & 28 & -384 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 45 & 36 & x+21 & -264 \\ 15 & 12 & 7 & x-88 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2) \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 28 & -384 \\ 45 & x+21 & -264 \\ 15 & 7 & x-88 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 28 & -384 \\ 0 & x & -3x \\ 15 & 7 & x-88 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3) \\
&= x \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 28 & -384 \\ 0 & 1 & -3 \\ 15 & 7 & x-88 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 28 & -300 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & 7 & x-67 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2) \\
&= x \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & -300 \\ 15 & x-67 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= x \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 4x-28 \\ 15 & x-7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= x \cdot (x-7) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x+68 & 4 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot (x-7) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x+8 & 0 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= x \cdot (x-7) \cdot (x+5) \cdot (x+8).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-7) \cdot X \cdot (X+5) \cdot (X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -8, -5, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à

fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 75x & - & 48\,y & - & 28\,z & + & 288\,t & = 0 \\ & 30x & + & 12\,y & + & 14\,z & - & 138\,t & = 0 \\ - & 45x & - & 36\,y & - & 28\,z & + & 192\,t & = 0 \\ - & 15x & - & 12\,y & - & 7\,z & + & 57\,t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 15x & - & 12\,y & - & 7\,z & + & 57\,t & = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ & 30x & + & 12\,y & + & 14\,z & - & 138\,t & = 0 & \\ - & 45x & - & 36\,y & - & 28\,z & + & 192\,t & = 0 & \\ - & 75x & - & 48\,y & - & 28\,z & + & 288\,t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 15x & - & 12\,y & - & 7\,z & + & 57\,t & = 0 & \\ & & - & 12\,y & & & - & 24\,t & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & & - & 7\,z & + & 21\,t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ & & & 12\,y & + & 7\,z & + & 3\,t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 15x & - & 12\,y & - & 7\,z & + & 57\,t & = 0 & \\ & & - & 12\,y & & & - & 24\,t & = 0 & \\ & & & & - & 7\,z & + & 21\,t & = 0 & \\ & & & & & 7\,z & - & 21\,t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 15x & - & 12\,y & - & 7\,z & + & 57\,t & = 0 & \\ & & - & 12\,y & & & - & 24\,t & = 0 & \\ & & & & - & 7\,z & + & 21\,t & = 0 & \\ & & & & & & & 0 & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{4}{5}y - \frac{7}{15}z + \frac{19}{5}t \\ y & = & -2t \\ z & = & 3t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4a \\ y & = & -2a \\ z & = & 3a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 0$, $f_A(X_3) = AX_3 = -5X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 24. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-66 & -24 & 72 & 312 \\ -8 & x-18 & 8 & 56 \\ -32 & 24 & x+38 & 104 \\ -8 & -12 & 8 & x+50 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+6 & -24 & 72 & 312 \\ 0 & x-18 & 8 & 56 \\ x+6 & 24 & x+38 & 104 \\ 0 & -12 & 8 & x+50 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_3) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & -24 & 72 & 312 \\ 0 & x-18 & 8 & 56 \\ 1 & 24 & x+38 & 104 \\ 0 & -12 & 8 & x+50 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & -24 & 72 & 312 \\ 0 & x-18 & 8 & 56 \\ 0 & 48 & x-34 & -208 \\ 0 & -12 & 8 & x+50 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-18 & 8 & 56 \\ 48 & x-34 & -208 \\ -12 & 8 & x+50 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-6 & 0 & -x+6 \\ 48 & x-34 & -208 \\ -12 & 8 & x+50 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\
&= (x-6)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 48 & x-34 & -208 \\ -12 & 8 & x+50 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 48 & x-34 & -160 \\ -12 & 8 & x+38 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\
&= (x-6)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} x-34 & -160 \\ 8 & x+38 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x-6)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} x-2 & 4x-8 \\ 8 & x+38 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2) \\
&= (x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & x+38 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1) \\
&= (x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+6)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-6)\cdot(X-2)\cdot(X+6)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,-6,6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A-6\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 60x & + & 24\,y & - & 72\,z & - & 312\,t & = & 0 \\ 8x & + & 12\,y & - & 8\,z & - & 56\,t & = & 0 \\ 32x & - & 24\,y & - & 44\,z & - & 104\,t & = & 0 \\ 8x & + & 12\,y & - & 8\,z & - & 56\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 8x & + & 12\,y & - & 8\,z & - & 56\,t & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 60x & + & 24\,y & - & 72\,z & - & 312\,t & = & 0 \\ 32x & - & 24\,y & - & 44\,z & - & 104\,t & = & 0 \\ 8x & + & 12\,y & - & 8\,z & - & 56\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 8x & + & 12\,y & - & 8\,z & - & 56\,t & = & 0 \\ & - & 66\,y & - & 12\,z & + & 108\,t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{15}{2}L_1) \\ & - & 72\,y & - & 12\,z & + & 120\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 8x & + & 12\,y & - & 8\,z & - & 56\,t & = & 0 \\ & - & 66\,y & - & 12\,z & + & 108\,t & = & 0 \\ & & & & \frac{12}{11}\,z & + & \frac{24}{11}\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{12}{11}L_2) \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{2}y + z + 7t \\ y & = & -\frac{2}{11}z + \frac{18}{11}t \\ z & = & -2t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2a \\ y & = & 2a \\ z & = & -2a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A-2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 6X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -6X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :
$$A = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1},$$
d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 25. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & 0 \\ -64 & x-34 & -20 & -56 \\ 32 & 16 & x+5 & 34 \\ 16 & 8 & 5 & x+12 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-34 & -20 & -56 \\ 16 & x+5 & 34 \\ 8 & 5 & x+12 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-10 & x-10 & x-10 \\ 16 & x+5 & 34 \\ 8 & 5 & x+12 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-10 & 0 & 0 \\ 16 & x-11 & 18 \\ 8 & -3 & x+4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{matrix} \\
&= (x-10) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} x-11 & 18 \\ -3 & x+4 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ colonne)} \\
&= (x-10) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} x-2 & -3x+6 \\ -3 & x+4 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-10) \cdot (x-2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & x+4 \end{vmatrix} \\
&= (x-10) \cdot (x-2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & x-5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-10) \cdot (x-5) \cdot (x-2) \cdot (x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10) \cdot (X-5) \cdot (X-2) \cdot (X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6, 10, 2, 5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -16x & & & & & & & = & 0 \\ 64x & + & 24y & + & 20z & + & 56t & = & 0 \\ -32x & - & 16y & - & 15z & - & 34t & = & 0 \\ -16x & - & 8y & - & 5z & - & 22t & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -16x & & & & & & & = & 0 \\ & & 24y & + & 20z & + & 56t & = & 0 \\ & - & 16y & - & 15z & - & 34t & = & 0 \\ & - & 8y & - & 5z & - & 22t & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -16x & & & & & & & = & 0 \\ & - & 8y & - & 5z & - & 22t & = & 0 \\ & - & 16y & - & 15z & - & 34t & = & 0 \\ & & 24y & + & 20z & + & 56t & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -16x & & & & & & & = & 0 \\ & - & 8y & - & 5z & - & 22t & = & 0 \\ & & & - & 5z & + & 10t & = & 0 \\ & & & & 5z & - & 10t & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} - & 16x & & & & & & = & 0 \\ & & - & 8\,y & - & 5\,z & - & 22\,t = & 0 \\ & & & & - & 5\,z & + & 10\,t = & 0 \\ & & & & & & & 0 = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\frac{5}{8}z - \frac{11}{4}t \\ z & = & 2t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -4a \\ z & = & 2a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -6X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 26. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x + 73 & 56 & 24 & -640 \\ 64 & x + 63 & 24 & -632 \\ 64 & 56 & x + 23 & -600 \\ 16 & 14 & 6 & x - 151 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+9 & 0 & 0 & -4x-36 \\ 64 & x+63 & 24 & -632 \\ 64 & 56 & x+23 & -600 \\ 16 & 14 & 6 & x-151 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_4)$$

$$= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 64 & x+63 & 24 & -632 \\ 64 & 56 & x+23 & -600 \\ 16 & 14 & 6 & x-151 \end{vmatrix}$$

$$= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & x+63 & 24 & -376 \\ 64 & 56 & x+23 & -344 \\ 16 & 14 & 6 & x-87 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + 4C_1)$$

$$= (x+9) \begin{vmatrix} x+63 & 24 & -376 \\ 56 & x+23 & -344 \\ 14 & 6 & x-87 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne})$$

$$= (x+9) \begin{vmatrix} x+7 & 0 & -4x-28 \\ 56 & x+23 & -344 \\ 14 & 6 & x-87 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3)$$

$$= (x+7)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 56 & x+23 & -344 \\ 14 & 6 & x-87 \end{vmatrix}$$

$$= (x+7)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 56 & x+23 & -120 \\ 14 & 6 & x-31 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1)$$

$$= (x+7)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x+23 & -120 \\ 6 & x-31 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne})$$

$$= (x+7)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x+23 & 4x-28 \\ 6 & x-7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)$$

$$= (x-7)\cdot(x+7)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x+23 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-7)\cdot(x+7)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)$$

$$= (x-7)\cdot(x-1)\cdot(x+7)\cdot(x+9).$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X-1)\cdot(X+7)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -9, -7, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} -80x & -56y & -24z & +640t & = 0 \\ -64x & -70y & -24z & +632t & = 0 \\ -64x & -56y & -30z & +600t & = 0 \\ -16x & -14y & -6z & +144t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrll} -16x & -14y & -6z & +144t & = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -64x & -70y & -24z & +632t & = 0 & \\ -64x & -56y & -30z & +600t & = 0 & \\ -80x & -56y & -24z & +640t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} -16x & -14y & -6z & +144t & = 0 & \\ & -14y & & +56t & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & & -6z & +24t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ & 14y & +6z & -80t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} - & 16x & - & 14\,y & - & 6\,z & + & 144\,t & = & 0 & \\ & & - & 14\,y & & & + & 56\,t & = & 0 & \\ & & & & - & 6\,z & + & 24\,t & = & 0 & \\ & & & & & 6\,z & - & 24\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} - & 16x & - & 14\,y & - & 6\,z & + & 144\,t & = & 0 & \\ & & - & 14\,y & & & + & 56\,t & = & 0 & \\ & & & & - & 6\,z & + & 24\,t & = & 0 & \\ & & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{8}y - \frac{3}{8}z + 9t \\ y & = & 4t \\ z & = & 4t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4a \\ y & = & 4a \\ z & = & 4a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 27. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x + 10 & 0 & 0 \\ 22 & x + 17 & -36 \\ 11 & 6 & x - 13 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+10)\begin{vmatrix} x+17 & -36 \\ 6 & x-13 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} x-1 & -3x+3 \\ 6 & x-13 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-1)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & x-13 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & x+5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-1)\cdot(x+5)\cdot(x+10).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+5)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,-5,-10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$
\begin{cases} -11x = 0 \\ -22x - 18y + 36z = 0 \\ -11x - 6y + 12z = 0 \end{cases}
\iff
\begin{cases} -11x = 0 \\ -18y + 36z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ -6y + 12z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases} -11x = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ -6y + 12z = 0 \\ -18y + 36z = 0 \end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases} -11x = 0 \\ -6y + 12z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{cases}
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ z = a \end{cases}
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 2a \\ z = a \end{cases}
$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$
\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -5X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -10X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$
\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.
$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 28. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & -9 & -7 & 11 \\ 26 & x+24 & 14 & -14 \\ -13 & -9 & x-3 & 5 \\ 13 & 9 & 7 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+10 & 0 & 0 & x+10 \\ 26 & x+24 & 14 & -14 \\ -13 & -9 & x-3 & 5 \\ 13 & 9 & 7 & x-1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_4) \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 26 & x+24 & 14 & -14 \\ -13 & -9 & x-3 & 5 \\ 13 & 9 & 7 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 26 & x+24 & 14 & -40 \\ -13 & -9 & x-3 & 18 \\ 13 & 9 & 7 & x-14 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} x+24 & 14 & -40 \\ -9 & x-3 & 18 \\ 9 & 7 & x-14 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} x+24 & 14 & -40 \\ 0 & x+4 & x+4 \\ 9 & 7 & x-14 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\
&= (x+4)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x+24 & 14 & -40 \\ 0 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & x-14 \end{vmatrix} \\
&= (x+4)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x+24 & 14 & -54 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & x-21 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= (x+4)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x+24 & -54 \\ 9 & x-21 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+4)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x-3 & -3x+9 \\ 9 & x-21 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-3)\cdot(x+4)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & x-21 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (x-3)\cdot(x+4)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1)$$
$$= (x-3)\cdot(x+4)\cdot(x+6)\cdot(x+10).$$

Donc : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+4)\cdot(X+6)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6, 3, -4, -10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9y + 7z - 11t &=& 0 \\ -26x - 27y - 14z + 14t &=& 0 \\ 13x + 9y - 5t &=& 0 \\ -13x - 9y - 7z - 2t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 13x + 9y - 5t &=& 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -26x - 27y - 14z + 14t &=& 0 \\ 9y + 7z - 11t &=& 0 \\ -13x - 9y - 7z - 2t &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 13x + 9y - 5t &=& 0 \\ -9y - 14z + 4t &=& 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ 9y + 7z - 11t &=& 0 \\ -7z - 7t &=& 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 13x + 9y - 5t &=& 0 \\ -9y - 14z + 4t &=& 0 \\ -7z - 7t &=& 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ -7z - 7t &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 13x + 9y - 5t &=& 0 \\ -9y - 14z + 4t &=& 0 \\ -7z - 7t &=& 0 \\ 0 &=& 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{9}{13}y + \frac{5}{13}t \\ y &=& -\frac{14}{9}z + \frac{4}{9}t \\ z &=& -t \\ t &=& a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a \\ y &=& 2a \\ z &=& -a \\ t &=& a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -10X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 29. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+10 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & x+27 & 12 & -78 \\ 16 & 11 & x+6 & -34 \\ 16 & 11 & 6 & x-34 \end{vmatrix} \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+27 & 12 & -78 \\ 11 & x+6 & -34 \\ 11 & 6 & x-34 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+27 & 12 & -78 \\ 0 & x & -x \\ 11 & 6 & x-34 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
&= x \cdot (x+10) \begin{vmatrix} x+27 & 12 & -78 \\ 0 & 1 & -1 \\ 11 & 6 & x-34 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot (x+10) \begin{vmatrix} x+27 & 12 & -66 \\ 0 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & x-28 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\
&= x \cdot (x+10) \begin{vmatrix} x+27 & -66 \\ 11 & x-28 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= x \cdot (x+10) \begin{vmatrix} x-6 & -3x+18 \\ 11 & x-28 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= x \cdot (x-6) \cdot (x+10) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 11 & x-28 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot (x-6) \cdot (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & x+5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= x \cdot (x-6) \cdot (x+5) \cdot (x+10).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-6) \cdot X \cdot (X+5) \cdot (X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -5, 6, -10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à

$\ker(A-6\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 16x & & & & & & & = & 0 \\ - & 32x & - & 33\,y & - & 12\,z & + & 78\,t & = & 0 \\ - & 16x & - & 11\,y & - & 12\,z & + & 34\,t & = & 0 \\ - & 16x & - & 11\,y & - & 6\,z & + & 28\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 16x & & & & & & & = & 0 \\ & & - & 33\,y & - & 12\,z & + & 78\,t & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & - & 11\,y & - & 12\,z & + & 34\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & & - & 11\,y & - & 6\,z & + & 28\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 16x & & & & & & & = & 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & - & 11\,y & - & 12\,z & + & 34\,t & = & 0 \\ & & - & 33\,y & - & 12\,z & + & 78\,t & = & 0 \\ & & - & 11\,y & - & 6\,z & + & 28\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 16x & & & & & & & = & 0 \\ & & - & 11\,y & - & 12\,z & + & 34\,t & = & 0 \\ & & & & & 24\,z & - & 24\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \\ & & & & & 6\,z & - & 6\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 16x & & & & & & & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & & - & 11\,y & - & 12\,z & + & 34\,t & = & 0 \\ & & & & & 6\,z & - & 6\,t & = & 0 \\ & & & & & 24\,z & - & 24\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 16x & & & & & & & = & 0 \\ & & - & 11\,y & - & 12\,z & + & 34\,t & = & 0 \\ & & & & & 6\,z & - & 6\,t & = & 0 \\ & & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\frac{12}{11}z + \frac{34}{11}t \\ z & = & t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 2a \\ z & = & a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\3\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 6X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 0$, $f_A(X_3) = AX_3 = -5X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -10X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 30. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+6 & -3 & 12 \\ 16 & x+21 & -44 \\ 4 & 3 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+10 & 0 & x+10 \\ 16 & x+21 & -44 \\ 4 & 3 & x-2 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 16 & x+21 & -44 \\ 4 & 3 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & x+21 & -60 \\ 4 & 3 & x-6 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+21 & -60 \\ 3 & x-6 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+21 & 4x+24 \\ 3 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x+6) \cdot (x+10) \begin{vmatrix} x+21 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \cdot (x+10) \begin{vmatrix} x+9 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x+6) \cdot (x+9) \cdot (x+10).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X+6) \cdot (X+9) \cdot (X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6, -10, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + 6\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 3y & - & 12z & = & 0 \\ -16x & - & 15y & + & 44z & = & 0 \\ -4x & - & 3y & + & 8z & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & 3y & + & 8z & = & 0 \\ -16x & - & 15y & + & 44z & = & 0 \\ & & 3y & - & 12z & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & 3y & + & 8z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 12z & = & 0 \\ & & 3y & - & 12z & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & 3y & + & 8z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 12z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{4}y + 2z \\ y & = & 4z \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -a \\ y & = & 4a \\ z & = & a \end{array} \right.$$

De là, on déduit : $\ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -6X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -9X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -10X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 31. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+33 & 3 & -87 \\ -24 & x-1 & 66 \\ 8 & 1 & x-20 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+9 & 0 & -3x-27 \\ -24 & x-1 & 66 \\ 8 & 1 & x-20 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -24 & x-1 & 66 \\ 8 & 1 & x-20 \end{vmatrix} \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -24 & x-1 & -6 \\ 8 & 1 & x+4 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x-1 & -6 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+9)\begin{vmatrix} x+1 & 2x+2 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2) \\
&= (x+1)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix} \\
&= (x+1)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\
&= (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+9).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+2)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-9,-1,-2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + \mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -32x & - & 3y & + & 87z & = & 0 \\ 24x & + & 2y & - & 66z & = & 0 \\ -8x & - & y & + & 21z & = & 0 \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -8x & - & y & + & 21z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 24x & + & 2y & - & 66z & = & 0 & \\ -32x & - & 3y & + & 87z & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -8x & - & y & + & 21z & = & 0 & \\ & - & y & - & 3z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & y & + & 3z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -8x & - & y & + & 21z & = & 0 & \\ & - & y & - & 3z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{8}y + \frac{21}{8}z \\ y & = & -3z \\ z & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3a \\ y & = & -3a \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$
\ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -9X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$
\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.
$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$
P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},
$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 32. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+40 & 12 & -156 \\ -18 & x-8 & 66 \\ 9 & 3 & x-35 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+40 & 12 & -156 \\ 0 & x-2 & 2x-4 \\ 9 & 3 & x-35 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3) \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x+40 & 12 & -156 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & x-35 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x+40 & 12 & -180 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & x-41 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2) \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x+40 & -180 \\ 9 & x-41 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x+40 & 4x-20 \\ 9 & x-5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-5)\cdot(x-2) \begin{vmatrix} x+40 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-5)\cdot(x-2) \begin{vmatrix} x+4 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-5)\cdot(x-2)\cdot(x+4).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-5)\cdot(X-2)\cdot(X+4)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -4, 5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 5\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -45x & - & 12y & + & 156z & = & 0 \\ 18x & + & 3y & - & 66z & = & 0 \\ -9x & - & 3y & + & 30z & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -9x & - & 3y & + & 30z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 18x & + & 3y & - & 66z & = & 0 & \\ -45x & - & 12y & + & 156z & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -9x & - & 3y & + & 30z & = & 0 & \\ & - & 3y & - & 6z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -9x & - & 3y & + & 30z & = & 0 & \\ & - & 3y & - & 6z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= -\frac{1}{3}y + \frac{10}{3}z \\ y &= -2z \\ z &= a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 4a \\ y &= -2a \\ z &= a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 4\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -4X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 33. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+15 & 12 & -60 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 5 & 4 & x-20 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x+15 & -60 \\ 5 & x-20 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x-5 & -4x+20 \\ 5 & x-20 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\ &= (x-5)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & x-20 \end{vmatrix} \\ &= (x-5)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & x \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \end{aligned}$$

$$= x \cdot (x-5) \cdot (x-1).$$

Donc : $\chi_A = (X-5) \cdot (X-1) \cdot X$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1, 5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 5\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -20x - 12y + 60z = 0 \\ -4y = 0 \\ -5x - 4y + 15z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - 4y + 15z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -4y = 0 \\ -20x - 12y + 60z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5x - 4y + 15z = 0 \\ -4y = 0 \\ 4y = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5x - 4y + 15z = 0 \\ -4y = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{4}{5}y + 3z \\ y = 0 \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3a \\ y = 0 \\ z = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = 0$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 34. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+14 & 4 & -72 \\ 9 & x+3 & -48 \\ 3 & 1 & x-16 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+14 & 4 & -72 \\ 0 & x & -3x \\ 3 & 1 & x-16 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3) \\
&= x \begin{vmatrix} x+14 & 4 & -72 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & x-16 \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} x+14 & 4 & -60 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & x-13 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2) \\
&= x \begin{vmatrix} x+14 & -60 \\ 3 & x-13 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= x \begin{vmatrix} x+14 & 4x-4 \\ 3 & x-1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= x \cdot (x-1) \begin{vmatrix} x+14 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot (x-1) \begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= x \cdot (x-1) \cdot (x+2).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-1) \cdot X \cdot (X+2)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -15x - 4y + 72z = 0 \\ -9x - 4y + 48z = 0 \\ -3x - y + 15z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - y + 15z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -9x - 4y + 48z = 0 \\ -15x - 4y + 72z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y + 15z = 0 \\ -y + 3z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ y - 3z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y + 15z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y + 5z \\ y = 3z \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 4a \\ y = 3a \\ z = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 0$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -2X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 35. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+19 & 4 & -96\\ 16 & x+4 & -84\\ 4 & 1 & x-21\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} x+3 & 0 & -4x-12\\ 16 & x+4 & -84\\ 4 & 1 & x-21\end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3)\\
&= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4\\ 16 & x+4 & -84\\ 4 & 1 & x-21\end{vmatrix}\\
&= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 16 & x+4 & -20\\ 4 & 1 & x-5\end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1)\\
&= (x+3)\begin{vmatrix} x+4 & -20\\ 1 & x-5\end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne})\\
&= (x+3)\begin{vmatrix} x+4 & 4x-4\\ 1 & x-1\end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)\\
&= (x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x+4 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= x\cdot(x-1)\cdot(x+3).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-1)\cdot X\cdot(X+3)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1, -3\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -20x - 4y + 96z = 0 \\ -16x - 5y + 84z = 0 \\ -4x - y + 20z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -4x - y + 20z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -16x - 5y + 84z = 0 \\ -20x - 4y + 96z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4x - y + 20z = 0 \\ -y + 4z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ y - 4z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4x - y + 20z = 0 \\ -y + 4z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = -\frac{1}{4}y + 5z \\ y = 4z \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 4a \\ y = 4a \\ z = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 0$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -3X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :
$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$
d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 36. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-6 & -14 & 40 \\ 32 & x+37 & -76 \\ 8 & 7 & x-10 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+10 & 0 & 2x+20 \\ 32 & x+37 & -76 \\ 8 & 7 & x-10 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 32 & x+37 & -76 \\ 8 & 7 & x-10 \end{vmatrix} \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 32 & x+37 & -140 \\ 8 & 7 & x-26 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+37 & -140 \\ 7 & x-26 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+37 & 4x+8 \\ 7 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x+2)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x+37 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x+9 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x+2)\cdot(x+9)\cdot(x+10).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X+2)\cdot(X+9)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-10, -2, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + 2\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 8x & + & 14y & - & 40z & = & 0 \\ -32x & - & 35y & + & 76z & = & 0 \\ -8x & - & 7y & + & 12z & = & 0 \end{array} \right.
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 8x & + & 14y & - & 40z & = & 0 & \\ & & 21y & - & 84z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & & 7y & - & 28z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 8x & + & 14y & - & 40z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 7y & - & 28z & = & 0 & \\ & & 21y & - & 84z & = & 0 & \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 8x & + & 14y & - & 40z & = & 0 & \\ & & 7y & - & 28z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{array} \right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{4}y + 5z \\ y & = & 4z \\ z & = & a \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2a \\ y & = & 4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -9X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -10X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 37. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-35 & -120 & 524 & 416 \\ 22 & x-276 & 1118 & 482 \\ 11 & -60 & x+238 & 76 \\ -11 & -15 & 71 & x+83 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+53 & 0 & -44 & -8x-248 \\ -\frac{11}{15}x + \frac{1122}{5} & 0 & \frac{71}{15}x - \frac{942}{5} & \frac{1}{15}x^2 - \frac{193}{15}x - \frac{5226}{5} \\ 55 & 0 & x-46 & -4x-256 \\ -11 & -15 & 71 & x+83 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_1 - 8L_4) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(-\frac{1}{15}\right) \cdot (x-276)\right] L_4) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_4) \end{array}$$

$$= -1 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} x+53 & -44 & -8x-248 \\ -\frac{11}{15}x + \frac{1122}{5} & \frac{71}{15}x - \frac{942}{5} & \frac{1}{15}x^2 - \frac{193}{15}x - \frac{5226}{5} \\ 55 & x-46 & -4x-256 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= -1 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} x+9 & -44 & -8x-248 \\ 4x+36 & \frac{71}{15}x - \frac{942}{5} & \frac{1}{15}x^2 - \frac{193}{15}x - \frac{5226}{5} \\ x+9 & x-46 & -4x-256 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2)$$

$$\begin{aligned}
&= -1\cdot 3\cdot 5\begin{vmatrix} (x+9) & -1\cdot 2^2\cdot 11 & (-8)\cdot(x+31) \\ (4)\cdot(x+9) & \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(71x-2826) & \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(x^2-193x-15678) \\ (x+9) & (x-46) & (-4)\cdot(x+64)\end{vmatrix} \\
&= (-15)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & -44 & -8x-248 \\ 4 & \frac{71}{15}x-\frac{942}{5} & \frac{1}{15}x^2-\frac{193}{15}x-\frac{5226}{5} \\ 1 & x-46 & -4x-256\end{vmatrix} \\
&= (-15)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & -44 & -8x-248 \\ 0 & \frac{71}{15}x-\frac{62}{5} & \frac{1}{15}x^2+\frac{287}{15}x-\frac{266}{5} \\ 0 & x-2 & 4x-8\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}(L_2 \leftarrow L_2-4L_1)\\(L_3 \leftarrow L_3-L_1)\end{matrix} \\
&= (-15)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} \frac{71}{15}x-\frac{62}{5} & \frac{1}{15}x^2+\frac{287}{15}x-\frac{266}{5} \\ x-2 & 4x-8\end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ colonne)} \\
&= (-15)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(71x-186) & \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(x^2+287x-798) \\ (x-2) & (4)\cdot(x-2)\end{vmatrix} \\
&= (-15)\cdot(x-2)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(71x-186) & \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(x^2+287x-798) \\ 1 & 2^2\end{vmatrix} \\
&= (-15)\cdot(x-2)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} \frac{71}{15}x-\frac{62}{5} & \frac{1}{15}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{18}{5} \\ 1 & 0\end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2-4C_1) \\
&= (-15)\cdot(x-2)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(71x-186) & \left(\frac{1}{15}\right)\cdot(x-6)\cdot(x+9) \\ 1 & 0\end{vmatrix} \\
&= (-1)\cdot(x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+9)^2\begin{vmatrix} \frac{71}{15}x-\frac{62}{5} & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix} \\
&= (-1)\cdot(x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+9)^2\begin{vmatrix} \frac{71}{15}x-\frac{62}{5} & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix} \\
&= (-1)\cdot(x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+9)^2\,(-1) \\
&= (-1)\cdot(x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+9)^2\times(-1)\,.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-6)\cdot(X-2)\cdot(X+9)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 6, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 6\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 29x & + & 120\,y & - & 524\,z & - & 416\,t & = & 0 \\ - & 22x & + & 270\,y & - & 1118\,z & - & 482\,t & = & 0 \\ - & 11x & + & 60\,y & - & 244\,z & - & 76\,t & = & 0 \\ & 11x & + & 15\,y & - & 71\,z & - & 89\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} - & 11x & + & 60\,y & - & 244\,z & - & 76\,t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ - & 22x & + & 270\,y & - & 1118\,z & - & 482\,t & = & 0 & \\ & 29x & + & 120\,y & - & 524\,z & - & 416\,t & = & 0 & \\ & 11x & + & 15\,y & - & 71\,z & - & 89\,t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} - & 11x & + & 60\,y & - & 244\,z & - & 76\,t & = & 0 & \\ & & & 150\,y & - & 630\,z & - & 330\,t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & & \frac{3060}{11}\,y & - & \frac{12840}{11}\,z & - & \frac{6780}{11}\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{29}{11}L \\ & & & 75\,y & - & 315\,z & - & 165\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} - & 11x & + & 60\,y & - & 244\,z & - & 76\,t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & & & 75\,y & - & 315\,z & - & 165\,t & = & 0 & \\ & & & \frac{3060}{11}\,y & - & \frac{12840}{11}\,z & - & \frac{6780}{11}\,t & = & 0 & \\ & & & 150\,y & - & 630\,z & - & 330\,t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} - & 11x & + & 60\,y & - & 244\,z & - & 76\,t & = & 0 & \\ & & & 75\,y & - & 315\,z & - & 165\,t & = & 0 & \\ & & & & & \frac{12}{11}\,z & - & \frac{48}{11}\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{204}{55}L_2) \\ & & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{60}{11}y - \frac{244}{11}z - \frac{76}{11}t \\ y & = & \frac{21}{5}z + \frac{11}{5}t \\ z & = & 4t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 8a \\ y & = & 19a \\ z & = & 4a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 6X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -9X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & \frac{7}{2} & 0 \\ 19 & -2 & 0 & -14 \\ 4 & -1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 38. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+15 & 6 & 2 & -22 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 11 & 6 & 2 & x-18 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x+15 & 2 & -22 \\ 0 & x-5 & 0 \\ 11 & 2 & x-18 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-5)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x+15 & -22 \\ 11 & x-18 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}\\
&= (x-5)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-7 & -22 \\ x-7 & x-18 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2)\\
&= (x-5)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-7 & -22 \\ 0 & x+4 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)\\
&= (x-7)\cdot(x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+4).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X-5)\cdot(X-1)\cdot(X+4)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,-4,5,7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcl} -22x - 6y - 2z + 22t &=& 0 \\ -6y &=& 0 \\ -2z &=& 0 \\ -11x - 6y - 2z + 11t &=& 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcll} -11x - 6y - 2z + 11t &=& 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -6y &=& 0 & \\ -2z &=& 0 & \\ -22x - 6y - 2z + 22t &=& 0 & \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} -11x - 6y - 2z + 11t &=& 0 & \\ -6y &=& 0 & \\ -2z &=& 0 & \\ 6y + 2z &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1) \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} -11x - 6y - 2z + 11t &=& 0 & \\ -6y &=& 0 & \\ -2z &=& 0 & \\ 2z &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} -11x - 6y - 2z + 11t &=& 0 & \\ -6y &=& 0 & \\ -2z &=& 0 & \\ 0 &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.\\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{6}{11}y - \frac{2}{11}z + t \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \\ t &=& a \end{array}\right.\\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \\ t &=& a \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$
\ker(A-7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A-5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A-\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -4X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 39. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & x-22 & -12 & 12 \\ 48 & 36 & x+14 & 0 \\ 16 & 12 & 6 & x-4 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-22 & -12 & 12 \\ 36 & x+14 & 0 \\ 12 & 6 & x-4 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 2x+4 \\ 36 & x+14 & 0 \\ 12 & 6 & x-4 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3) \\
&= (x+2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 36 & x+14 & 0 \\ 12 & 6 & x-4 \end{vmatrix} \\
&= (x+2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 36 & x+14 & -72 \\ 12 & 6 & x-28 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\
&= (x+2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} x+14 & -72 \\ 6 & x-28 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} x-10 & -4x+40 \\ 6 & x-28 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-10) \cdot (x+2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 6 & x-28 \end{vmatrix} \\
&= (x-10) \cdot (x+2) \cdot (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & x-4 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-10) \cdot (x-4) \cdot (x+2) \cdot (x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-4)\cdot(X+2)\cdot(X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, -6, 4, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -16x & = & 0 \\ 32x + 12y + 12z - 12t & = & 0 \\ -48x - 36y - 24z & = & 0 \\ -16x - 12y - 6z - 6t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} -16x & = & 0 & \\ 12y + 12z - 12t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ -36y - 24z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ -12y - 6z - 6t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -16x & = & 0 & \\ 12y + 12z - 12t & = & 0 & \\ 12z - 36t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \\ 6z - 18t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -16x & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ 12y + 12z - 12t & = & 0 & \\ 6z - 18t & = & 0 & \\ 12z - 36t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -16x & = & 0 & \\ 12y + 12z - 12t & = & 0 & \\ 6z - 18t & = & 0 & \\ 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -z+t \\ z & = & 3t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -2a \\ z & = & 3a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 4X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -6X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 40. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-12 & -18 & -8 & 48 \\ 33 & x+35 & 12 & -66 \\ 22 & 18 & x+11 & -34 \\ 11 & 9 & 4 & x-14 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+10 & 0 & 0 & 2x+20 \\ 33 & x+35 & 12 & -66 \\ 22 & 18 & x+11 & -34 \\ 11 & 9 & 4 & x-14 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 33 & x+35 & 12 & -66 \\ 22 & 18 & x+11 & -34 \\ 11 & 9 & 4 & x-14 \end{vmatrix} \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & x+35 & 12 & -132 \\ 22 & 18 & x+11 & -78 \\ 11 & 9 & 4 & x-36 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+35 & 12 & -132 \\ 18 & x+11 & -78 \\ 9 & 4 & x-36 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+35 & 12 & -132 \\ 0 & x+3 & -2x-6 \\ 9 & 4 & x-36 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3) \\
&= (x+3)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x+35 & 12 & -132 \\ 0 & 1 & -2 \\ 9 & 4 & x-36 \end{vmatrix} \\
&= (x+3)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x+35 & 12 & -108 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & x-28 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\
&= (x+3)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x+35 & -108 \\ 9 & x-28 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+3)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x-1 & -4x+4 \\ 9 & x-28 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & x-28 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & x+8 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+8)\cdot(x+10).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+3)\cdot(X+8)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 1, -3, -10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - \mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} & 11x & + & 18\,y & + & 8\,z & - & 48\,t & = 0 \\ - & 33x & - & 36\,y & - & 12\,z & + & 66\,t & = 0 \\ - & 22x & - & 18\,y & - & 12\,z & + & 34\,t & = 0 \\ - & 11x & - & 9\,y & - & 4\,z & + & 13\,t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} 11x & + & 18\,y & + & 8\,z & - & 48\,t & = 0 & \\ & & 18\,y & + & 12\,z & - & 78\,t & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & 18\,y & + & 4\,z & - & 62\,t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\ & & 9\,y & + & 4\,z & - & 35\,t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} 11x & + & 18\,y & + & 8\,z & - & 48\,t & = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & & 9\,y & + & 4\,z & - & 35\,t & = 0 & \\ & & 18\,y & + & 4\,z & - & 62\,t & = 0 & \\ & & 18\,y & + & 12\,z & - & 78\,t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} 11x & + & 18\,y & + & 8\,z & - & 48\,t & = 0 & \\ & & 9\,y & + & 4\,z & - & 35\,t & = 0 & \\ & & & - & 4\,z & + & 8\,t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ & & & & 4\,z & - & 8\,t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} 11x & + & 18\,y & + & 8\,z & - & 48\,t & = 0 & \\ & & 9\,y & + & 4\,z & - & 35\,t & = 0 & \\ & & & - & 4\,z & + & 8\,t & = 0 & \\ & & & & & & 0 & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{18}{11}y - \frac{8}{11}z + \frac{48}{11}t \\ y & = & -\frac{4}{9}z + \frac{35}{9}t \\ z & = & 2t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2a \\ y & = & 3a \\ z & = & 2a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -10X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 41. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+19 & 7 & -31 \\ 12 & x+9 & -26 \\ 12 & 7 & x-24 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-5 & 7 & -31 \\ x-5 & x+9 & -26 \\ x-5 & 7 & x-24 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\
&= \begin{vmatrix} x-5 & 7 & -31 \\ 0 & x+2 & 5 \\ 0 & 0 & x+7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \\
&= (x-5)\cdot(x+2)\cdot(x+7).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-5)\cdot(X+2)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 5, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 5\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -24x - 7y + 31z = 0 \\ -12x - 14y + 26z = 0 \\ -12x - 7y + 19z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -12x - 14y + 26z = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -24x - 7y + 31z = 0 \\ -12x - 7y + 19z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -12x - 14y + 26z = 0 \\ 21y - 21z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 7y - 7z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -12x - 14y + 26z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ 7y - 7z = 0 \\ 21y - 21z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -12x - 14y + 26z = 0 \\ 7y - 7z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{7}{6}y + \frac{13}{6}z \\ y = z \\ z = a \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = a \end{cases}
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A-5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 42. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -8 & 16 \\ 18 & x+22 & -30 \\ 9 & 8 & x-9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+7 & 0 & x+7 \\ 18 & x+22 & -30 \\ 9 & 8 & x-9 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 18 & x+22 & -30 \\ 9 & 8 & x-9 \end{vmatrix} \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 18 & x+22 & -48 \\ 9 & 8 & x-18 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} x+22 & -48 \\ 8 & x-18 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} x-2 & -3x+6 \\ 8 & x-18 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-2)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & x-18 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x-2)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\ &= (x-2)\cdot(x+6)\cdot(x+7). \end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+6)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 2, -6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{rcl} 8y - 16z &=& 0 \\ -18x - 24y + 30z &=& 0 \\ -9x - 8y + 7z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -9x - 8y + 7z &=& 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -18x - 24y + 30z &=& 0 \\ 8y - 16z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -9x - 8y + 7z &=& 0 \\ -8y + 16z &=& 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 8y - 16z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -9x - 8y + 7z &=& 0 \\ -8y + 16z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right. \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{8}{9}y + \frac{7}{9}z \\ y &=& 2z \\ z &=& a \end{array}\right. \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a \\ y &=& 2a \\ z &=& a \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 43. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-40 & -18 & -9 & -135 \\ -15 & x-10 & -3 & -54 \\ -45 & -18 & x-16 & -171 \\ 15 & 6 & 3 & x+50 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-40 & -18 & -9 & -135 \\ 0 & x-4 & 0 & x-4 \\ -45 & -18 & x-16 & -171 \\ 15 & 6 & 3 & x+50 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_4) \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x-40 & -18 & -9 & -135 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -45 & -18 & x-16 & -171 \\ 15 & 6 & 3 & x+50 \end{vmatrix} \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x-40 & -18 & -9 & -117 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -18 & x-16 & -153 \\ 15 & 6 & 3 & x+44 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x-40 & -9 & -117 \\ -45 & x-16 & -153 \\ 15 & 3 & x+44 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 2}^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} x+5 & 0 & 3x+15 \\ -45 & x-16 & -153 \\ 15 & 3 & x+44 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3) \\
&= (x-4) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -45 & x-16 & -153 \\ 15 & 3 & x+44 \end{vmatrix} \\
&= (x-4) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -45 & x-16 & -18 \\ 15 & 3 & x-1 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \\
&= (x-4) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x-16 & -18 \\ 3 & x-1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 1}^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x-4) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} x-10 & 2x-20 \\ 3 & x-1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2) \\
&= (x-10) \cdot (x-4) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-10) \cdot (x-4) \cdot (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & x-7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\
&= (x-10) \cdot (x-7) \cdot (x-4) \cdot (x+5).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10) \cdot (X-7) \cdot (X-4) \cdot (X+5)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, -5, 4, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à

fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 30x + 18y + 9z + 135t = 0 \\ 15x + 3z + 54t = 0 \\ 45x + 18y + 6z + 171t = 0 \\ -15x - 6y - 3z - 60t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 15x + 3z + 54t = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 30x + 18y + 9z + 135t = 0 \\ 45x + 18y + 6z + 171t = 0 \\ -15x - 6y - 3z - 60t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 15x + 3z + 54t = 0 \\ 18y + 3z + 27t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 18y - 3z + 9t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ -6y - 6t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 15x + 3z + 54t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ -6y - 6t = 0 \\ 18y - 3z + 9t = 0 \\ 18y + 3z + 27t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 15x + 3z + 54t = 0 \\ -6y - 6t = 0 \\ -3z - 9t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \\ 3z + 9t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 15x + 3z + 54t = 0 \\ -6y - 6t = 0 \\ -3z - 9t = 0 \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z - \frac{18}{5}t \\ y = -t \\ z = -3t \\ t = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -3a \\ y = -a \\ z = -3a \\ t = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 7X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 4X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -5X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 44. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-45 & -8 & -128 \\ 24 & x-3 & 84 \\ 12 & 2 & x+35 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-9 & x-9 & x-9 \\ 24 & x-3 & 84 \\ 12 & 2 & x+35 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3) \\
&= \begin{vmatrix} x-9 & 0 & 0 \\ 24 & x-27 & 60 \\ 12 & -10 & x+23 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{matrix} \\
&= (x-9) \begin{vmatrix} x-27 & 60 \\ -10 & x+23 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}) \\
&= (x-9) \begin{vmatrix} x+3 & -3x-9 \\ -10 & x+23 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-9)\cdot(x+3) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -10 & x+23 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\cdot(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -10 & x-7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-7)\cdot(x+3).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-9)\cdot(X-7)\cdot(X+3)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, -3, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 9\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 36x & + & 8y & + & 128z & = & 0 \\ -24x & - & 6y & - & 84z & = & 0 \\ -12x & - & 2y & - & 44z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -12x & - & 2y & - & 44z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -24x & - & 6y & - & 84z & = & 0 & \\ 36x & + & 8y & + & 128z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -12x & - & 2y & - & 44z & = & 0 & \\ & - & 2y & + & 4z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & 2y & - & 4z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ 12x & - & 2\,y & - & 44\,z & = & 0 \\ & - & 2\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{6}y - \frac{11}{3}z \\ y & = & 2z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4a \\ y & = & 2a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 9X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 7X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -3X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 45. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-16 & -3 & -6 \\ 12 & x-5 & 16 \\ 3 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-7 & 0 & 3x-21 \\ 12 & x-5 & 16 \\ 3 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3) \\ &= (x-7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 12 & x-5 & 16 \\ 3 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & x-5 & -20 \\ 3 & 1 & x-14 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \\
&= (x-7)\begin{vmatrix} x-5 & -20 \\ 1 & x-14 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x-7)\begin{vmatrix} x-5 & 4x-40 \\ 1 & x-10 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-10)\cdot(x-7)\begin{vmatrix} x-5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-10)\cdot(x-7)\begin{vmatrix} x-9 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x-9)\cdot(x-7).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-9)\cdot(X-7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, 10, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} 6x + 3y + 6z = 0 \\ -12x - 5y - 16z = 0 \\ -3x - y - 5z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -3x - y - 5z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -12x - 5y - 16z = 0 \\ 6x + 3y + 6z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x - y - 5z = 0 \\ -y + 4z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ y - 4z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x - y - 5z = 0 \\ -y + 4z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y - \frac{5}{3}z \\ y = 4z \\ z = a \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = -3a \\ y = 4a \\ z = a \end{cases}
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$
\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 =$

$10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 9X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = 7X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 46. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-5 & -7 & -5 & 16 \\ 30 & x+23 & 15 & -39 \\ -10 & -7 & x-5 & 11 \\ 10 & 7 & 5 & x-11 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+5 & 0 & 0 & x+5 \\ 30 & x+23 & 15 & -39 \\ -10 & -7 & x-5 & 11 \\ 10 & 7 & 5 & x-11 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_4) \\
&= (x+5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 30 & x+23 & 15 & -39 \\ -10 & -7 & x-5 & 11 \\ 10 & 7 & 5 & x-11 \end{vmatrix} \\
&= (x+5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & x+23 & 15 & -69 \\ -10 & -7 & x-5 & 21 \\ 10 & 7 & 5 & x-21 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\
&= (x+5)\begin{vmatrix} x+23 & 15 & -69 \\ -7 & x-5 & 21 \\ 7 & 5 & x-21 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+5)\begin{vmatrix} x+23 & 15 & -69 \\ 0 & x & x \\ 7 & 5 & x-21 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\
&= x \cdot (x+5)\begin{vmatrix} x+23 & 15 & -69 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & x-21 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot (x+5)\begin{vmatrix} x+23 & 15 & -84 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & x-26 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= x \cdot (x+5)\begin{vmatrix} x+23 & -84 \\ 7 & x-26 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x-5 & -4x+20 \\ 7 & x-26 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)\\
&= x\cdot(x-5)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & x-26 \end{vmatrix}\\
&= x\cdot(x-5)\cdot(x+5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)\\
&= x\cdot(x-5)\cdot(x+2)\cdot(x+5).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-5)\cdot X\cdot(X+2)\cdot(X+5)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,-5,5,-2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A-5\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & & 7y & + & 5z & - & 16t & = & 0\\
-30x & - & 28y & - & 15z & + & 39t & = & 0\\
10x & + & 7y & & & - & 11t & = & 0\\
-10x & - & 7y & - & 5z & + & 6t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
10x & + & 7y & & & - & 11t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1)\\
-30x & - & 28y & - & 15z & + & 39t & = & 0 &\\
 & & 7y & + & 5z & - & 16t & = & 0 &\\
-10x & - & 7y & - & 5z & + & 6t & = & 0 &
\end{array}\right.$$

$$\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
10x & + & 7y & & & - & 11t & = & 0 &\\
 & - & 7y & - & 15z & + & 6t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1)\\
 & & 7y & + & 5z & - & 16t & = & 0 &\\
 & & & - & 5z & - & 5t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)
\end{array}\right.$$

$$\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
10x & + & 7y & & & - & 11t & = & 0 &\\
 & - & 7y & - & 15z & + & 6t & = & 0 &\\
 & & & - & 10z & - & 10t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)\\
 & & & - & 5z & - & 5t & = & 0 &
\end{array}\right.$$

$$\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
10x & + & 7y & & & - & 11t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3)\\
 & - & 7y & - & 15z & + & 6t & = & 0 &\\
 & & & - & 5z & - & 5t & = & 0 &\\
 & & & - & 10z & - & 10t & = & 0 &
\end{array}\right.$$

$$\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll}
10x & + & 7y & & & - & 11t & = & 0 &\\
 & - & 7y & - & 15z & + & 6t & = & 0 &\\
 & & & - & 5z & - & 5t & = & 0 &\\
 & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3)
\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl}
x & = & -\frac{7}{10}y + \frac{11}{10}t\\
y & = & -\frac{15}{7}z + \frac{6}{7}t\\
z & = & -t\\
t & = & a
\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl}
x & = & -a\\
y & = & 3a\\
z & = & -a\\
t & = & a
\end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 0$, $f_A(X_3) = AX_3 = -2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -5X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 47. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+232 & 77 & 883 & -1028 \\ 0 & x+36 & -44 & -176 \\ -48 & -11 & x-189 & 188 \\ 12 & 11 & 37 & x-88 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-104 & 0 & 7x-440 & 288 \\ -\frac{48}{11}x - \frac{1728}{11} & 0 & \frac{1}{11}x^2 - \frac{153}{11}x - \frac{7288}{11} & \frac{188}{11}x + \frac{4832}{11} \\ -48 & -11 & x-189 & 188 \\ -36 & 0 & x-152 & x+100 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 + 7L_3) \\ \left(L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(-\frac{1}{11}\right)\cdot(x+36)\right] L_3\right) \\ \\ (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{matrix} \\
&= 11 \begin{vmatrix} x-104 & 7x-440 & 288 \\ -\frac{48}{11}x - \frac{1728}{11} & \frac{1}{11}x^2 - \frac{153}{11}x - \frac{7288}{11} & \frac{188}{11}x + \frac{4832}{11} \\ -36 & x-152 & x+100 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)} \\
&= 11 \begin{vmatrix} x-104 & 7x-440 & 288 \\ -\frac{70}{11}x + \frac{560}{11} & \frac{1}{11}x^2 - \frac{307}{11}x + \frac{2392}{11} & \frac{188}{11}x - \frac{1504}{11} \\ -36 & x-152 & x+100 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\
&= 11 \begin{vmatrix} (x-104) & (7x-440) & 2^5 \cdot 3^2 \\ \left(-\frac{70}{11}\right)\cdot(x-8) & \left(\frac{1}{11}\right)\cdot(x-299)\cdot(x-8) & \left(\frac{188}{11}\right)\cdot(x-8) \\ -1\cdot 2^2 \cdot 3^2 & (x-152) & (x+100) \end{vmatrix} \\
&= (11)\cdot(x-8) \begin{vmatrix} x-104 & 7x-440 & 288 \\ -\frac{70}{11} & \frac{1}{11}x - \frac{299}{11} & \frac{188}{11} \\ -36 & x-152 & x+100 \end{vmatrix} \\
&= (11)\cdot(x-8) \begin{vmatrix} x-104 & \frac{1}{70}x^2 + \frac{87}{70}x + \frac{148}{35} & \frac{94}{35}x + \frac{304}{35} \\ -\frac{70}{11} & 0 & 0 \\ -36 & \frac{17}{35}x + \frac{62}{35} & x + \frac{116}{35} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \left(C_2 \leftarrow C_2 - \left[\left(-\frac{1}{70}\right)\cdot(x-299)\right] C_1\right) \\ \left(C_3 \leftarrow C_3 + \frac{94}{35}C_1\right) \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (70)\cdot(x-8)\begin{vmatrix} \frac{1}{70}x^2+\frac{87}{70}x+\frac{148}{35} & \frac{94}{35}x+\frac{304}{35} \\ \frac{17}{35}x+\frac{62}{35} & x+\frac{116}{35} \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (70)\cdot(x-8)\begin{vmatrix} \frac{1}{70}x^2+\frac{87}{70}x+\frac{148}{35} & -\frac{1}{35}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{8}{35} \\ \frac{17}{35}x+\frac{62}{35} & \frac{1}{35}x-\frac{8}{35} \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\
&= (70)\cdot(x-8)\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{70}\right)\cdot(x^2+87x+296) & \left(-\frac{1}{35}\right)\cdot(x-8)\cdot(x+1) \\ \left(\frac{1}{35}\right)\cdot(17x+62) & \left(\frac{1}{35}\right)\cdot(x-8) \end{vmatrix} \\
&= (70)\cdot(x-8)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{70}x^2+\frac{87}{70}x+\frac{148}{35} & -\frac{1}{35}x-\frac{1}{35} \\ \frac{17}{35}x+\frac{62}{35} & \frac{1}{35} \end{vmatrix} \\
&= (70)\cdot(x-8)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x+6 & 0 \\ \frac{17}{35}x+\frac{62}{35} & \frac{1}{35} \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - [(-1)\cdot(x+1)]\,L_2) \\
&= (x+3)\cdot(x+4)\cdot(x-8)^2.
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X+3)\cdot(X+4)\cdot(X-8)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8,-4,-3\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A+3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl}
- & 229x & - & 77\,y & - & 883\,z & + & 1028\,t & = & 0 \\
 & & - & 33\,y & + & 44\,z & + & 176\,t & = & 0 \\
 & 48x & + & 11\,y & + & 192\,z & - & 188\,t & = & 0 \\
- & 12x & - & 11\,y & - & 37\,z & + & 91\,t & = & 0
\end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
- & 12x & - & 11\,y & - & 37\,z & + & 91\,t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\
 & & - & 33\,y & + & 44\,z & + & 176\,t & = & 0 & \\
 & 48x & + & 11\,y & + & 192\,z & - & 188\,t & = & 0 & \\
- & 229x & - & 77\,y & - & 883\,z & + & 1028\,t & = & 0 &
\end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
- & 12x & - & 11\,y & - & 37\,z & + & 91\,t & = & 0 & \\
 & & - & 33\,y & + & 44\,z & + & 176\,t & = & 0 & \\
 & & - & 33\,y & + & 44\,z & + & 176\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \\
 & & & \frac{1595}{12}\,y & - & \frac{2123}{12}\,z & - & \frac{8503}{12}\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{229}{12}L
\end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
- & 12x & - & 11\,y & - & 37\,z & + & 91\,t & = & 0 & \\
 & & - & 33\,y & + & 44\,z & + & 176\,t & = & 0 & \\
 & & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\
 & & & & & \frac{11}{36}\,z & + & \frac{11}{36}\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{145}{36}L_2)
\end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
- & 12x & - & 11\,y & - & 37\,z & + & 91\,t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\
 & & - & 33\,y & + & 44\,z & + & 176\,t & = & 0 & \\
 & & & & & \frac{11}{36}\,z & + & \frac{11}{36}\,t & = & 0 & \\
 & & & & & & & 0 & = & 0 &
\end{array}\right. \\
\iff &\exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl}
x & = & -\frac{11}{12}y - \frac{37}{12}z + \frac{91}{12}t \\
y & = & \frac{4}{3}z + \frac{16}{3}t \\
z & = & -t \\
t & = & a
\end{array}\right. \\
\iff &\exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl}
x & = & 7a \\
y & = & 4a \\
z & = & -a \\
t & = & a
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A+3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$
\ker(A+3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A-8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{19}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans

cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 8X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = 8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 19 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \frac{19}{4} \\ -1 & -4 & -4 & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 48. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+26 & -15 & 93 & 63 \\ -18 & x+14 & -72 & -54 \\ -9 & 4 & x-30 & -27 \\ 3 & 1 & 7 & x+14 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+26 & -15 & 93 & 63 \\ 0 & x+6 & -2x-12 & 0 \\ -9 & 4 & x-30 & -27 \\ 3 & 1 & 7 & x+14 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+26 & -15 & 93 & 63 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -9 & 4 & x-30 & -27 \\ 3 & 1 & 7 & x+14 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+26 & -15 & 63 & 63 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & x-22 & -27 \\ 3 & 1 & 9 & x+14 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+26 & 63 & 63 \\ -9 & x-22 & -27 \\ 3 & 9 & x+14 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+26 & 0 & 63 \\ -9 & x+5 & -27 \\ 3 & -x-5 & x+14 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_3)
\end{aligned}$$

$$= (x+5)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x+26 & 0 & 63 \\ -9 & 1 & -27 \\ 3 & -1 & x+14 \end{vmatrix}$$

$$= (x+5)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x+26 & 0 & 63 \\ -9 & 1 & -27 \\ -6 & 0 & x-13 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$$

$$= (x+5)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x+26 & 63 \\ -6 & x-13 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= (x+5)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x+26 & -3x-15 \\ -6 & x+5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1)$$

$$= (x+6)\cdot(x+5)^2\begin{vmatrix} x+26 & -3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+6)\cdot(x+5)^2\begin{vmatrix} x+8 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2)$$

$$= (x+6)\cdot(x+8)\cdot(x+5)^2.$$

Donc : $\chi_A = (X+6)\cdot(X+8)\cdot(X+5)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8,-6,-5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A+6\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -20x + 15y - 93z - 63t = 0 \\ 18x - 8y + 72z + 54t = 0 \\ 9x - 4y + 36z + 27t = 0 \\ -3x - y - 7z - 8t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - y - 7z - 8t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ 18x - 8y + 72z + 54t = 0 \\ 9x - 4y + 36z + 27t = 0 \\ -20x + 15y - 93z - 63t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y - 7z - 8t = 0 \\ -14y + 30z + 6t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 6L_1) \\ -7y + 15z + 3t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \\ \frac{65}{3}y - \frac{139}{3}z - \frac{29}{3}t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{20}{3}L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y - 7z - 8t = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ -7y + 15z + 3t = 0 \\ -14y + 30z + 6t = 0 \\ \frac{65}{3}y - \frac{139}{3}z - \frac{29}{3}t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y - 7z - 8t = 0 \\ -7y + 15z + 3t = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ \frac{2}{21}z - \frac{8}{21}t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{65}{21}L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - y - 7z - 8t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ -7y + 15z + 3t = 0 \\ \frac{2}{21}z - \frac{8}{21}t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y - \frac{7}{3}z - \frac{8}{3}t \\ y = \frac{15}{7}z + \frac{3}{7}t \\ z = 4t \\ t = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -15a \\ y = 9a \\ z = 4a \\ t = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A+6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-

espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A+6\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-15\\9\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+8\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}7\\-6\\-3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+5\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=-6X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=-8X_2$, $f_A(X_3)=AX_3=-5X_3$ et $f_A(X_4)=AX_4=-5X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}-6&0&0&0\\0&-8&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}-15&7&-3&0\\9&-6&0&-2\\4&-3&0&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}-6&0&0&0\\0&-8&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 49. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x+58&48&-348\\51&x+54&-345\\17&16&x-109\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}x+7&0&-3x-21\\51&x+54&-345\\17&16&x-109\end{vmatrix}\quad(L_1\leftarrow L_1-3L_3)\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}1&0&-3\\51&x+54&-345\\17&16&x-109\end{vmatrix}\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}1&0&0\\51&x+54&-192\\17&16&x-58\end{vmatrix}\quad(C_3\leftarrow C_3+3C_1)\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}x+54&-192\\16&x-58\end{vmatrix}\quad(\text{développement par rapport à la }1^{\text{re}}\text{ ligne})\\
&=(x+7)\begin{vmatrix}x-10&-4x+40\\16&x-58\end{vmatrix}\quad(L_1\leftarrow L_1-4L_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-10)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 16 & x-58 \end{vmatrix} \\
&= (x-10)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-10)\cdot(x+6)\cdot(x+7).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X+6)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 10, -6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rrrrrrr} - & 68x & - & 48y & + & 348z & = 0 \\ - & 51x & - & 64y & + & 345z & = 0 \\ - & 17x & - & 16y & + & 99z & = 0 \end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 17x & - & 16y & + & 99z & = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ - & 51x & - & 64y & + & 345z & = 0 & \\ - & 68x & - & 48y & + & 348z & = 0 & \end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 17x & - & 16y & + & 99z & = 0 & \\ & & - & 16y & + & 48z & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & & & 16y & - & 48z & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 17x & - & 16y & + & 99z & = 0 & \\ & & - & 16y & + & 48z & = 0 & \\ & & & & & 0 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{16}{17}y + \frac{99}{17}z \\ y & = & 3z \\ z & = & a \end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & 3a \\ z & = & a \end{array}\right.
$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$
\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$
\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.
$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$
P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},
$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 50. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-9 & -5 & 10 \\ 34 & x+6 & 4 \\ 17 & 5 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+8 & 0 & x+8 \\ 34 & x+6 & 4 \\ 17 & 5 & x-2 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\
&= (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 34 & x+6 & 4 \\ 17 & 5 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 34 & x+6 & -30 \\ 17 & 5 & x-19 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\
&= (x+8)\begin{vmatrix} x+6 & -30 \\ 5 & x-19 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+8)\begin{vmatrix} x-9 & -3x+27 \\ 5 & x-19 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-9)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & x-19 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & x-4 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-4)\cdot(x+8).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-9)\cdot(X-4)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 9, 4\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 9\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 5y - 10z = 0 \\ -34x - 15y - 4z = 0 \\ -17x - 5y - 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -17x - 5y - 7z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -34x - 15y - 4z = 0 \\ 5y - 10z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -17x - 5y - 7z = 0 \\ -5y + 10z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 5y - 10z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -17x - 5y - 7z = 0 \\ -5y + 10z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{5}{17}y - \frac{7}{17}z \\ y &=& 2z \\ z &=& a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a \\ y &=& 2a \\ z &=& a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 4\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 9X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 4X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 51. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+54 & 56 & 124 & 6 \\ -85 & x-124 & -342 & -43 \\ 20 & 32 & x+92 & 12 \\ 5 & -8 & -42 & x-9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+89 & 0 & -170 & 7x-57 \\ \frac{5}{8}x - \frac{325}{2} & 0 & -\frac{21}{4}x + 309 & \frac{1}{8}x^2 - \frac{133}{8}x + \frac{193}{2} \\ 40 & 0 & x-76 & 4x-24 \\ 5 & -8 & -42 & x-9 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_1 + 7L_4) \\ \left(L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot (x-124)\right] L_4\right) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_4) \end{array}$$

$$= -1 \cdot 2^3 \begin{vmatrix} x+89 & -170 & 7x-57 \\ \frac{5}{8}x - \frac{325}{2} & -\frac{21}{4}x + 309 & \frac{1}{8}x^2 - \frac{133}{8}x + \frac{193}{2} \\ 40 & x-76 & 4x-24 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$
\begin{aligned}
&= -1\cdot 2^3 \begin{vmatrix} 8x+32 & -170 & 7x-57 \\ \frac{1}{8}x^2-16x-66 & -\frac{21}{4}x+309 & \frac{1}{8}x^2-\frac{133}{8}x+\frac{193}{2} \\ 4x+16 & x-76 & 4x-24 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1+C_3) \\
&= -1\cdot 2^3 \begin{vmatrix} (8)\cdot(x+4) & -1\cdot 2\cdot 5\cdot 17 & (7x-57) \\ \left(\frac{1}{8}\right)\cdot(x-132)\cdot(x+4) & \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(7x-412) & \left(\frac{1}{8}\right)\cdot(x^2-133x+772) \\ (4)\cdot(x+4) & (x-76) & (4)\cdot(x-6) \end{vmatrix} \\
&= (-8)\cdot(x+4) \begin{vmatrix} 8 & -170 & 7x-57 \\ \frac{1}{8}x-\frac{33}{2} & -\frac{21}{4}x+309 & \frac{1}{8}x^2-\frac{133}{8}x+\frac{193}{2} \\ 4 & x-76 & 4x-24 \end{vmatrix} \\
&= (-8)\cdot(x+4) \begin{vmatrix} 0 & -2x-18 & -x-9 \\ 0 & -\frac{1}{32}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{9}{2} & \frac{5}{8}x-\frac{5}{2} \\ 4 & x-76 & 4x-24 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_1-2L_3) \\ \left(L_2 \leftarrow L_2-\left[\left(\frac{1}{32}\right)\cdot(x-132)\right] L_3\right) \end{array} \\
&= (-32)\cdot(x+4) \begin{vmatrix} -2x-18 & -x-9 \\ -\frac{1}{32}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{9}{2} & \frac{5}{8}x-\frac{5}{2} \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}) \\
&= (-32)\cdot(x+4) \begin{vmatrix} (-2)\cdot(x+9) & (-1)\cdot(x+9) \\ \left(-\frac{1}{32}\right)\cdot(x-36)\cdot(x-4) & \left(\frac{5}{8}\right)\cdot(x-4) \end{vmatrix} \\
&= (-32)\cdot(x-4)\cdot(x+4)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} -1\cdot 2 & -1 \\ \left(-\frac{1}{32}\right)\cdot(x-36) & 2^{-3}\cdot 5 \end{vmatrix} \\
&= (-32)\cdot(x-4)\cdot(x+4)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{32}x-\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1-2C_2) \\
&= (x-4)\cdot(x+9)\cdot(x+4)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{8} \end{vmatrix} \\
&= (x-4)\cdot(x+9)\cdot(x+4)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{8} \end{vmatrix} \\
&= (x-4)\cdot(x+9)\cdot(x+4)^2\,(1) \\
&= (x-4)\cdot(x+9)\cdot(x+4)^2 \times (1)\,.
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-4)\cdot(X+9)\cdot(X+4)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{4,-4,-9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A-4\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcl} -58x-56y-124z-6t &=& 0 \\ 85x+120y+342z+43t &=& 0 \\ -20x-32y-96z-12t &=& 0 \\ -5x+8y+42z+5t &=& 0 \end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcll} -5x+8y+42z+5t &=& 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ 85x+120y+342z+43t &=& 0 & \\ -20x-32y-96z-12t &=& 0 & \\ -58x-56y-124z-6t &=& 0 & \end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcll} -5x+8y+42z+5t &=& 0 & \\ 256y+1056z+128t &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2+17L_1) \\ -64y-264z-32t &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3-4L_1) \\ -\frac{744}{5}y-\frac{3056}{5}z-64t &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4-\frac{58}{5}L_1) \end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcll} -5x+8y+42z+5t &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ -64y-264z-32t &=& 0 & \\ 256y+1056z+128t &=& 0 & \\ -\frac{744}{5}y-\frac{3056}{5}z-64t &=& 0 & \end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcll} -5x+8y+42z+5t &=& 0 & \\ -64y-264z-32t &=& 0 & \\ 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3+4L_2) \\ \frac{13}{5}z+\frac{52}{5}t &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4-\frac{93}{40}L_2) \end{array}\right.
$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -&5x&+&8\,y&+&42\,z&+&5\,t&=&0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_3)\\ &&-&64\,y&-&264\,z&-&32\,t&=&0\\ &&&&&\frac{13}{5}\,z&+&\frac{52}{5}\,t&=&0\\ &&&&&&&0&=&0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x&=&\frac{8}{5}y+\frac{42}{5}z+t\\ y&=&-\frac{33}{8}z-\frac{1}{2}t\\ z&=&-4t\\ t&=&a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x&=&-7a\\ y&=&16a\\ z&=&-4a\\ t&=&a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-7\\16\\-4\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-7\\16\\-4\\1\end{pmatrix}\right), \ \ker(A+9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}10\\-17\\4\\1\end{pmatrix}\right), \ \ker(A+4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -9X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -4X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -4X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&-9&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}-7&10&\frac{1}{2}&0\\16&-17&0&1\\-4&4&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&-9&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 52. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix}x-8&-24&-114&-96\\0&x-35&-144&-144\\3&12&x+55&48\\-3&-4&-22&x-15\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2x-4 & 0 \\ 0 & x-35 & -144 & -144 \\ 3 & 12 & x+55 & 48 \\ -3 & -4 & -22 & x-15 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3)$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & x-35 & -144 & -144 \\ 3 & 12 & x+55 & 48 \\ -3 & -4 & -22 & x-15 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-35 & -144 & -144 \\ 3 & 12 & x+49 & 48 \\ -3 & -4 & -16 & x-15 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1)$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x-35 & -144 & -144 \\ 12 & x+49 & 48 \\ -4 & -16 & x-15 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne})$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x-35 & 0 & -144 \\ 12 & x+1 & 48 \\ -4 & -x-1 & x-15 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_3)$$

$$= (x-2)\cdot(x+1)\begin{vmatrix} x-35 & 0 & -144 \\ 12 & 1 & 48 \\ -4 & -1 & x-15 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\cdot(x+1)\begin{vmatrix} x-35 & 0 & -144 \\ 12 & 1 & 48 \\ 8 & 0 & x+33 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$$

$$= (x-2)\cdot(x+1)\begin{vmatrix} x-35 & -144 \\ 8 & x+33 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ colonne})$$

$$= (x-2)\cdot(x+1)\begin{vmatrix} x-3 & 4x-12 \\ 8 & x+33 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2)$$

$$= (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & x+33 \end{vmatrix}$$

$$= (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1)$$

$$= (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)^2.$$

Donc : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-2)\cdot(X+1)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 3, -1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x & + & 24y & + & 114z & + & 96t & = & 0 \\ & & 32y & + & 144z & + & 144t & = & 0 \\ -3x & - & 12y & - & 58z & - & 48t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 22z & + & 12t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -3x & - & 12y & - & 58z & - & 48t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & & 32y & + & 144z & + & 144t & = & 0 & \\ 5x & + & 24y & + & 114z & + & 96t & = & 0 & \\ 3x & + & 4y & + & 22z & + & 12t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -3x & - & 12y & - & 58z & - & 48t & = & 0 & \\ & & 32y & + & 144z & + & 144t & = & 0 & \\ & & 4y & + & \frac{52}{3}z & + & 16t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{3}L_1) \\ & - & 8y & - & 36z & - & 36t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 3x & - & 12\,y & - & 58\,z & - & 48\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & & 4\,y & + & \frac{52}{3}\,z & + & 16\,t & = & 0 \\ & & & 32\,y & + & 144\,z & + & 144\,t & = & 0 \\ & & - & 8\,y & - & 36\,z & - & 36\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 3x & - & 12\,y & - & 58\,z & - & 48\,t & = & 0 \\ & & & 4\,y & + & \frac{52}{3}\,z & + & 16\,t & = & 0 \\ & & & & & \frac{16}{3}\,z & + & 16\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2) \\ & & & & - & \frac{4}{3}\,z & - & 4\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 3x & - & 12\,y & - & 58\,z & - & 48\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & & & 4\,y & + & \frac{52}{3}\,z & + & 16\,t & = & 0 \\ & & & & - & \frac{4}{3}\,z & - & 4\,t & = & 0 \\ & & & & & \frac{16}{3}\,z & + & 16\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 3x & - & 12\,y & - & 58\,z & - & 48\,t & = & 0 \\ & & & 4\,y & + & \frac{52}{3}\,z & + & 16\,t & = & 0 \\ & & & & - & \frac{4}{3}\,z & - & 4\,t & = & 0 \\ & & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4y - \frac{58}{3}z - 16t \\ y & = & -\frac{13}{3}z - 4t \\ z & = & -3t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6a \\ y & = & 9a \\ z & = & -3a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 53. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+19 & -20 & -30 \\ 3 & x+3 & -9 \\ 1 & -2 & x+6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+19 & 2x+18 & -30 \\ 3 & x+9 & -9 \\ 1 & 0 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+19 & 2 & -30 \\ 3 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & x+6 \end{vmatrix} \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+13 & 0 & -12 \\ 3 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & x+6 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+13 & -12 \\ 1 & x+6 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ colonne}) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+9 & -4x-36 \\ 1 & x+6 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x+9)^2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & x+6 \end{vmatrix} \\
&= (x+9)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+10 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x+10) \cdot (x+9)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X+10) \cdot (X+9)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-10, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + 10\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -9x + 20y + 30z = 0 \\ -3x + 7y + 9z = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -3x + 7y + 9z = 0 \\ -9x + 20y + 30z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ y - 3z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ 2y - 6z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2y + 4z \\ y = 3z \\ z = a \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 10a \\ y = 3a \\ z = a \end{cases}
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A+10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}10\\3\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A+10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}10\\3\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -9X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -9X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 54. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+47 & 33 & -156 \\ 0 & x+6 & 0 \\ 13 & 11 & x-44 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+47 & -156 \\ 13 & x-44 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-5 & -4x+20 \\ 13 & x-44 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-5)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 13 & x-44 \end{vmatrix} \\
&= (x-5)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 13 & x+8 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-5)\cdot(x+6)\cdot(x+8).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-5)\cdot(X+6)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, -6, 5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique :

on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 5\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -52x & - & 33\,y & + & 156\,z & = & 0 \\ & - & 11\,y & & & = & 0 \\ -13x & - & 11\,y & + & 39\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -13x & - & 11\,y & + & 39\,z & = & 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & - & 11\,y & & & = & 0 \\ -52x & - & 33\,y & + & 156\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -13x & - & 11\,y & + & 39\,z & = & 0 \\ & - & 11\,y & & & = & 0 \\ & & 11\,y & & & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -13x & - & 11\,y & + & 39\,z & = & 0 \\ & - & 11\,y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{11}{13}y + 3z \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 55. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-15 & 96 & 248 & 112 \\ -20 & x+89 & 212 & 88 \\ 4 & -24 & x-59 & -32 \\ 4 & -12 & -28 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+17 & 0 & 24 & 8x+88 \\ \frac{1}{3}x+\frac{29}{3} & 0 & -\frac{7}{3}x+\frac{13}{3} & \frac{1}{12}x^2+\frac{43}{6}x+\frac{263}{4} \\ -4 & 0 & x-3 & -2x-26 \\ 4 & -12 & -28 & x-3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 + 8L_4) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot(x+89)\right] L_4) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4) \end{matrix}$$

$$= -1\cdot 2^2 \cdot 3 \begin{vmatrix} x+17 & 24 & 8x+88 \\ \frac{1}{3}x+\frac{29}{3} & -\frac{7}{3}x+\frac{13}{3} & \frac{1}{12}x^2+\frac{43}{6}x+\frac{263}{4} \\ -4 & x-3 & -2x-26 \end{vmatrix} \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= -1\cdot 2^2 \cdot 3 \begin{vmatrix} x+17 & -2x-10 & 8x+88 \\ \frac{1}{3}x+\frac{29}{3} & -3x-15 & \frac{1}{12}x^2+\frac{43}{6}x+\frac{263}{4} \\ -4 & x+5 & -2x-26 \end{vmatrix} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)$$

$$= -1\cdot 2^2 \cdot 3 \begin{vmatrix} (x+17) & (-2)\cdot(x+5) & (8)\cdot(x+11) \\ \left(\frac{1}{3}\right)\cdot(x+29) & (-3)\cdot(x+5) & \left(\frac{1}{12}\right)\cdot(x^2+86x+789) \\ -1\cdot 2^2 & (x+5) & (-2)\cdot(x+13) \end{vmatrix}$$

$$= (-12)\cdot(x+5) \begin{vmatrix} x+17 & -2 & 8x+88 \\ \frac{1}{3}x+\frac{29}{3} & -3 & \frac{1}{12}x^2+\frac{43}{6}x+\frac{263}{4} \\ -4 & 1 & -2x-26 \end{vmatrix}$$

$$= (-12)\cdot(x+5) \begin{vmatrix} x+9 & 0 & 4x+36 \\ \frac{1}{3}x-\frac{7}{3} & 0 & \frac{1}{12}x^2+\frac{7}{6}x-\frac{49}{4} \\ -4 & 1 & -2x-26 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3) \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3) \end{matrix}$$

$$= (12)\cdot(x+5) \begin{vmatrix} x+9 & 4x+36 \\ \frac{1}{3}x-\frac{7}{3} & \frac{1}{12}x^2+\frac{7}{6}x-\frac{49}{4} \end{vmatrix} \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= (12)\cdot(x+5) \begin{vmatrix} (x+9) & (4)\cdot(x+9) \\ \left(\frac{1}{3}\right)\cdot(x-7) & \left(\frac{1}{12}\right)\cdot(x-7)\cdot(x+21) \end{vmatrix}$$

$$= (12)\cdot(x-7)\cdot(x+5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 2^2 \\ 3^{-1} & \left(\frac{1}{12}\right)\cdot(x+21) \end{vmatrix}$$

$$= (12)\cdot(x-7)\cdot(x+5)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12}x+\frac{7}{4} \end{vmatrix} (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2)$$

$$= (-3)\cdot(x-7)\cdot(x+9)\cdot(x+5)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12}x+\frac{7}{4} \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot(x-7)\cdot(x+9)\cdot(x+5)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12}x+\frac{7}{4} \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot(x-7)\cdot(x+9)\cdot(x+5)^2 \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= (-3)\cdot(x-7)\cdot(x+9)\cdot(x+5)^2 \times \left(-\frac{1}{3}\right).$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X+9)\cdot(X+5)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-5,-9,7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & 8x & - & 96\,y & - & 248\,z & - & 112\,t & = 0\\ & 20x & - & 96\,y & - & 212\,z & - & 88\,t & = 0\\ - & 4x & + & 24\,y & + & 52\,z & + & 32\,t & = 0\\ - & 4x & + & 12\,y & + & 28\,z & - & 4\,t & = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 4x & + & 24\,y & + & 52\,z & + & 32\,t & = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1)\\ & 20x & - & 96\,y & - & 212\,z & - & 88\,t & = 0 &\\ & 8x & - & 96\,y & - & 248\,z & - & 112\,t & = 0 &\\ - & 4x & + & 12\,y & + & 28\,z & - & 4\,t & = 0 &\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 4x & + & 24\,y & + & 52\,z & + & 32\,t & = 0 &\\ & & & 24\,y & + & 48\,z & + & 72\,t & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1)\\ & & - & 48\,y & - & 144\,z & - & 48\,t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1)\\ & & - & 12\,y & - & 24\,z & - & 36\,t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 4x & + & 24\,y & + & 52\,z & + & 32\,t & = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2)\\ & & - & 12\,y & - & 24\,z & - & 36\,t & = 0 &\\ & & - & 48\,y & - & 144\,z & - & 48\,t & = 0 &\\ & & & 24\,y & + & 48\,z & + & 72\,t & = 0 &\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 4x & + & 24\,y & + & 52\,z & + & 32\,t & = 0 &\\ & & - & 12\,y & - & 24\,z & - & 36\,t & = 0 &\\ & & & & - & 48\,z & + & 96\,t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2)\\ & & & & & & & 0 & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 6y + 13z + 8t\\ y & = & -2z - 3t\\ z & = & 2t\\ t & = & a\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -8a\\ y & = & -7a\\ z & = & 2a\\ t & = & a\end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-8\\-7\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-8\\-7\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-5\\-5\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\0\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -9X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -5X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -5X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -8 & -5 & -\frac{8}{3} & 0\\ -7 & -5 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -\frac{2}{3} & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :
$$A = P\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1},$$
d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 56. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-42 & -45 & -24 & -243 \\ -17 & x-8 & -8 & -83 \\ -68 & -60 & x-32 & -360 \\ 17 & 15 & 8 & x+90 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-42 & -45 & -24 & -243 \\ 0 & x+7 & 0 & x+7 \\ -68 & -60 & x-32 & -360 \\ 17 & 15 & 8 & x+90 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_4) \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} x-42 & -45 & -24 & -243 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -68 & -60 & x-32 & -360 \\ 17 & 15 & 8 & x+90 \end{vmatrix} \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} x-42 & -45 & -24 & -198 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -68 & -60 & x-32 & -300 \\ 17 & 15 & 8 & x+75 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} x-42 & -24 & -198 \\ -68 & x-32 & -300 \\ 17 & 8 & x+75 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} x+9 & 0 & 3x+27 \\ -68 & x-32 & -300 \\ 17 & 8 & x+75 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3) \\
&= (x+7)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -68 & x-32 & -300 \\ 17 & 8 & x+75 \end{vmatrix} \\
&= (x+7)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -68 & x-32 & -96 \\ 17 & 8 & x+24 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \\
&= (x+7)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x-32 & -96 \\ 8 & x+24 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+7)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x-32 & -3x \\ 8 & x \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= x\cdot(x+7)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x-32 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \\
&= x\cdot(x+7)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x-8 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= x\cdot(x-8)\cdot(x+7)\cdot(x+9).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot X\cdot(X+7)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, 0, -7, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à

fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 34x & +\,45\,y & +\,24\,z & +\,243\,t & = 0 \\ 17x & & +\,8\,z & +\,83\,t & = 0 \\ 68x & +\,60\,y & +\,24\,z & +\,360\,t & = 0 \\ -\,17x & -\,15\,y & -\,8\,z & -\,98\,t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrll} 17x & & +\,8\,z & +\,83\,t & = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 34x & +\,45\,y & +\,24\,z & +\,243\,t & = 0 & \\ 68x & +\,60\,y & +\,24\,z & +\,360\,t & = 0 & \\ -\,17x & -\,15\,y & -\,8\,z & -\,98\,t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} 17x & & +\,8\,z & +\,83\,t & = 0 & \\ & 45\,y & +\,8\,z & +\,77\,t & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & 60\,y & -\,8\,z & +\,28\,t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ & -\,15\,y & & -\,15\,t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} 17x & & +\,8\,z & +\,83\,t & = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & -\,15\,y & & -\,15\,t & = 0 & \\ & 60\,y & -\,8\,z & +\,28\,t & = 0 & \\ & 45\,y & +\,8\,z & +\,77\,t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} 17x & & +\,8\,z & +\,83\,t & = 0 & \\ & -\,15\,y & & -\,15\,t & = 0 & \\ & & -\,8\,z & -\,32\,t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \\ & & 8\,z & +\,32\,t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} 17x & & +\,8\,z & +\,83\,t & = 0 & \\ & -\,15\,y & & -\,15\,t & = 0 & \\ & & -\,8\,z & -\,32\,t & = 0 & \\ & & & 0 & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{8}{17}z - \frac{83}{17}t \\ y & = & -t \\ z & = & -4t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3a \\ y & = & -a \\ z & = & -4a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 0$, $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 57. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-19 & -2 & -18 \\ 52 & x-1 & 84 \\ 13 & 1 & x+16 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+7 & 0 & 2x+14 \\ 52 & x-1 & 84 \\ 13 & 1 & x+16 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3) \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 52 & x-1 & 84 \\ 13 & 1 & x+16 \end{vmatrix} \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 52 & x-1 & -20 \\ 13 & 1 & x-10 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} x-1 & -20 \\ 1 & x-10 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} x-1 & 4x-24 \\ 1 & x-6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} x-5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-6)\cdot(x-5)\cdot(x+7).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-6)\cdot(X-5)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 5, 6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 6\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 13x & + & 2\,y & + & 18\,z & = & 0 \\ -\ 52x & - & 5\,y & - & 84\,z & = & 0 \\ -\ 13x & - & y & - & 22\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 13x & + & 2\,y & + & 18\,z & = & 0 & \\ & & 3\,y & - & 12\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & & y & - & 4\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 13x & + & 2\,y & + & 18\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & y & - & 4\,z & = & 0 & \\ & & 3\,y & - & 12\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 13x & + & 2\,y & + & 18\,z & = & 0 & \\ & & y & - & 4\,z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{2}{13}y - \frac{18}{13}z \\ y & = & 4z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2a \\ y & = & 4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 6X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 58. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+25 & 2 & 1 & -40 \\ 51 & x-1 & 3 & -75 \\ 0 & 0 & x-8 & 0 \\ 17 & 2 & 1 & x-32 \end{vmatrix} \\ &= (x-8)\begin{vmatrix} x+25 & 2 & -40 \\ 51 & x-1 & -75 \\ 17 & 2 & x-32 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ ligne)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-8)\begin{vmatrix} x+8 & 0 & -x-8 \\ 51 & x-1 & -75 \\ 17 & 2 & x-32 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_3)\\
&= (x-8)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 51 & x-1 & -75 \\ 17 & 2 & x-32 \end{vmatrix}\\
&= (x-8)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 51 & x-1 & -24 \\ 17 & 2 & x-15 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_1)\\
&= (x-8)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x-1 & -24 \\ 2 & x-15 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne})\\
&= (x-8)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x-9 & -4x+36 \\ 2 & x-15 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)\\
&= (x-9)\cdot(x-8)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & x-15 \end{vmatrix}\\
&= (x-9)\cdot(x-8)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & x-7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)\\
&= (x-9)\cdot(x-8)\cdot(x-7)\cdot(x+8).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-9)\cdot(X-8)\cdot(X-7)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, 9, -8, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 9\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} -34x & -2y & -z & +40t & =0 \\ -51x & -8y & -3z & +75t & =0 \\ & & -z & & =0 \\ -17x & -2y & -z & +23t & =0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} -17x & -2y & -z & +23t & =0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -51x & -8y & -3z & +75t & =0 \\ & & -z & & =0 \\ -34x & -2y & -z & +40t & =0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} -17x & -2y & -z & +23t & =0 \\ & -2y & & +6t & =0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & & -z & & =0 \\ & 2y & +z & -6t & =0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} -17x & -2y & -z & +23t & =0 \\ & -2y & & +6t & =0 \\ & & -z & & =0 \\ & & z & & =0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} -17x & -2y & -z & +23t & =0 \\ & -2y & & +6t & =0 \\ & & -z & & =0 \\ & & & 0 & =0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2}{17}y - \frac{1}{17}z + \frac{23}{17}t \\ y & = & 3t \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & 3a \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\0\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 9X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 8X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 7X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&-8\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1&1&1&2\\3&3&4&3\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&-8\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 59. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix}x-29&-16&-8&26\\76&x+30&16&-8\\0&0&x-6&0\\19&8&4&x-4\end{vmatrix}\\
&= (x-6)\begin{vmatrix}x-29&-16&26\\76&x+30&-8\\19&8&x-4\end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ ligne)}\\
&= (x-6)\begin{vmatrix}x+9&0&2x+18\\76&x+30&-8\\19&8&x-4\end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3)\\
&= (x-6)\cdot(x+9)\begin{vmatrix}1&0&2\\76&x+30&-8\\19&8&x-4\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (x-6)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 76 & x+30 & -160 \\ 19 & 8 & x-42 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1)$$

$$= (x-6)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x+30 & -160 \\ 8 & x-42 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)}$$

$$= (x-6)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x+30 & 4x-40 \\ 8 & x-10 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)$$

$$= (x-10)\cdot(x-6)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x+30 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-10)\cdot(x-6)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)$$

$$= (x-10)\cdot(x-6)\cdot(x-2)\cdot(x+9).$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-6)\cdot(X-2)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, 2, 6, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 19x & + & 16y & + & 8z & - & 26t & = & 0 \\ -76x & - & 40y & - & 16z & + & 8t & = & 0 \\ & & & - & 4z & & & = & 0 \\ -19x & - & 8y & - & 4z & - & 6t & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 19x & + & 16y & + & 8z & - & 26t & = & 0 & \\ & & 24y & + & 16z & - & 96t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & & & - & 4z & & & = & 0 & \\ & & 8y & + & 4z & - & 32t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 19x & + & 16y & + & 8z & - & 26t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & & 8y & + & 4z & - & 32t & = & 0 & \\ & & & - & 4z & & & = & 0 & \\ & & 24y & + & 16z & - & 96t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 19x & + & 16y & + & 8z & - & 26t & = & 0 & \\ & & 8y & + & 4z & - & 32t & = & 0 & \\ & & & - & 4z & & & = & 0 & \\ & & & & 4z & & & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 19x & + & 16y & + & 8z & - & 26t & = & 0 & \\ & & 8y & + & 4z & - & 32t & = & 0 & \\ & & & - & 4z & & & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{16}{19}y - \frac{8}{19}z + \frac{26}{19}t \\ y & = & -\frac{1}{2}z + 4t \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a \\ y & = & 4a \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A-2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans

cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 6X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 60. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+66 & 21 & 15 & -189 \\ 19 & x+4 & 5 & -51 \\ -76 & -28 & x-25 & 196 \\ 19 & 7 & 5 & x-54 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+66 & 21 & 15 & -189 \\ 0 & x-3 & 0 & -x+3 \\ -76 & -28 & x-25 & 196 \\ 19 & 7 & 5 & x-54 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_4) \\
&= (x-3) \begin{vmatrix} x+66 & 21 & 15 & -189 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -76 & -28 & x-25 & 196 \\ 19 & 7 & 5 & x-54 \end{vmatrix} \\
&= (x-3) \begin{vmatrix} x+66 & 21 & 15 & -168 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -76 & -28 & x-25 & 168 \\ 19 & 7 & 5 & x-47 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + C_2) \\
&= (x-3) \begin{vmatrix} x+66 & 15 & -168 \\ -76 & x-25 & 168 \\ 19 & 5 & x-47 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-3) \begin{vmatrix} x-10 & x-10 & 0 \\ -76 & x-25 & 168 \\ 19 & 5 & x-47 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)
\end{aligned}$$

$$= (x-10)\cdot(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -76 & x-25 & 168 \\ 19 & 5 & x-47 \end{vmatrix}$$

$$= (x-10)\cdot(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -76 & x+51 & 168 \\ 19 & -14 & x-47 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$$

$$= (x-10)\cdot(x-3)\begin{vmatrix} x+51 & 168 \\ -14 & x-47 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)}$$

$$= (x-10)\cdot(x-3)\begin{vmatrix} x+51 & -3x+15 \\ -14 & x-5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1)$$

$$= (x-10)\cdot(x-5)\cdot(x-3)\begin{vmatrix} x+51 & -3 \\ -14 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-10)\cdot(x-5)\cdot(x-3)\begin{vmatrix} x+9 & 0 \\ -14 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2)$$

$$= (x-10)\cdot(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+9).$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-5)\cdot(X-3)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, 3, 5, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -76x & - & 21y & - & 15z & + & 189t & = & 0 \\ -19x & - & 14y & - & 5z & + & 51t & = & 0 \\ 76x & + & 28y & + & 15z & - & 196t & = & 0 \\ -19x & - & 7y & - & 5z & + & 44t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -19x & - & 14y & - & 5z & + & 51t & = & 0 \quad (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -76x & - & 21y & - & 15z & + & 189t & = & 0 \\ 76x & + & 28y & + & 15z & - & 196t & = & 0 \\ -19x & - & 7y & - & 5z & + & 44t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -19x & - & 14y & - & 5z & + & 51t & = & 0 \\ & & 35y & + & 5z & - & 15t & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & - & 28y & - & 5z & + & 8t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \\ & & 7y & & & - & 7t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -19x & - & 14y & - & 5z & + & 51t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & & 7y & & & - & 7t & = & 0 \\ & - & 28y & - & 5z & + & 8t & = & 0 \\ & & 35y & + & 5z & - & 15t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -19x & - & 14y & - & 5z & + & 51t & = & 0 \\ & & 7y & & & - & 7t & = & 0 \\ & & & - & 5z & - & 20t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \\ & & & & 5z & + & 20t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -19x & - & 14y & - & 5z & + & 51t & = & 0 \\ & & 7y & & & - & 7t & = & 0 \\ & & & - & 5z & - & 20t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{14}{19}y - \frac{5}{19}z + \frac{51}{19}t \\ y & = & t \\ z & = & -4t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & a \\ z & = & -4a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\-4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 3X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ -4 & -3 & -4 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 61. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+9 & 0 & 0\\ 11 & x+18 & -20\\ 11 & 10 & x-12\end{vmatrix}\\
&= (x+9)\begin{vmatrix} x+18 & -20\\ 10 & x-12\end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)}\\
&= (x+9)\begin{vmatrix} x-2 & -20\\ x-2 & x-12\end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2)\\
&= (x+9)\begin{vmatrix} x-2 & -20\\ 0 & x+8\end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)\\
&= (x-2)\cdot(x+8)\cdot(x+9).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+8)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 2, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 11x & & & & & = & 0 \\ - & 11x & - & 20\,y & + & 20\,z & = & 0 \\ - & 11x & - & 10\,y & + & 10\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} - & 11x & & & & & = & 0 & \\ & & - & 20\,y & + & 20\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & - & 10\,y & + & 10\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} - & 11x & & & & & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & - & 10\,y & + & 10\,z & = & 0 & \\ & & - & 20\,y & + & 20\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} - & 11x & & & & & = & 0 & \\ & & - & 10\,y & + & 10\,z & = & 0 & \\ & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -8X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -9X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 62. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$
\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-8 & 10 & -10 & 30 \\ 10 & x-28 & 30 & -70 \\ 10 & 0 & x+2 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & x+22 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-8 & 0 & -10 & 30 \\ 10 & x+2 & 30 & -70 \\ 10 & x+2 & x+2 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & x+22 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + C_3) \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-8 & 0 & -10 & 30 \\ 10 & 1 & 30 & -70 \\ 10 & 1 & x+2 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & x+22 \end{vmatrix} \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-8 & 0 & -10 & 30 \\ 10 & 1 & 30 & -70 \\ 0 & 0 & x-28 & 60 \\ 0 & 0 & -10 & x+22 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-8 & -10 & 30 \\ 0 & x-28 & 60 \\ 0 & -10 & x+22 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ colonne}) \\
&= (x-8) \cdot (x+2) \begin{vmatrix} x-28 & 60 \\ -10 & x+22 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}) \\
&= (x-8) \cdot (x+2) \begin{vmatrix} x+2 & -3x-6 \\ -10 & x+22 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-8) \cdot (x+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -10 & x+22 \end{vmatrix} \\
&= (x-8) \cdot (x+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -10 & x-8 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-8)^2 \cdot (x+2)^2.
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-8)^2 \cdot (X+2)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & - & 10\,y & + & 10\,z & - & 30\,t & = & 0 \\
-\ 10x & + & 20\,y & - & 30\,z & + & 70\,t & = & 0 \\
-\ 10x & & & - & 10\,z & + & 10\,t & = & 0 \\
 & - & 10\,y & + & 10\,z & - & 30\,t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-\ 10x & + & 20\,y & - & 30\,z & + & 70\,t & = & 0 \quad (L_2 \leftrightarrow L_1) \\
 & - & 10\,y & + & 10\,z & - & 30\,t & = & 0 \\
-\ 10x & & & - & 10\,z & + & 10\,t & = & 0 \\
 & - & 10\,y & + & 10\,z & - & 30\,t & = & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-\ 10x & + & 20\,y & - & 30\,z & + & 70\,t & = & 0 \\
 & - & 10\,y & + & 10\,z & - & 30\,t & = & 0 \\
 & - & 20\,y & + & 20\,z & - & 60\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
 & - & 10\,y & + & 10\,z & - & 30\,t & = & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-\ 10x & + & 20\,y & - & 30\,z & + & 70\,t & = & 0 \\
 & - & 10\,y & + & 10\,z & - & 30\,t & = & 0 \\
 & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\
 & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_2)
\end{array}\right.
$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2y-3z+7t\\ y &=& z-3t\\ z &=& a\\ t &=& b\end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a+b\\ y &=& a-3b\\ z &=& a\\ t &=& b\end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=8X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=8X_2$, $f_A(X_3)=AX_3=-2X_3$ et $f_A(X_4)=AX_4=-2X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}8&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}-2&0&1&0\\0&-2&0&1\\3&1&2&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix}8&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 63. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+43 & 24 & 12 & -144\\ -12 & x-5 & -4 & 44\\ 24 & 16 & x+7 & -80\\ 12 & 8 & 4 & x-41\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} x+43 & 24 & 12 & -144\\ 0 & x+3 & 0 & x+3\\ 24 & 16 & x+7 & -80\\ 12 & 8 & 4 & x-41\end{vmatrix} \quad (L_2\leftarrow L_2+L_4)\end{aligned}$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} x+43 & 24 & 12 & -144 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 24 & 16 & x+7 & -80 \\ 12 & 8 & 4 & x-41 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} x+43 & 24 & 12 & -168 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & 16 & x+7 & -96 \\ 12 & 8 & 4 & x-49 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_2)$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} x+43 & 12 & -168 \\ 24 & x+7 & -96 \\ 12 & 4 & x-49 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} x+43 & 12 & -168 \\ 0 & x-1 & -2x+2 \\ 12 & 4 & x-49 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3)$$

$$= (x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x+43 & 12 & -168 \\ 0 & 1 & -2 \\ 12 & 4 & x-49 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x+43 & 12 & -144 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & x-41 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2)$$

$$= (x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x+43 & -144 \\ 12 & x-41 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$= (x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x-5 & -4x+20 \\ 12 & x-41 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)$$

$$= (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 12 & x-41 \end{vmatrix}$$

$$= (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & x+7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)$$

$$= (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+7).$$

Donc : $\chi_A = (X-5)\cdot(X-1)\cdot(X+3)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -3, 5, -7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 5\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 48x & - & 24\,y & - & 12\,z & + & 144\,t & = 0 \\ & 12x & & & + & 4\,z & - & 44\,t & = 0 \\ - & 24x & - & 16\,y & - & 12\,z & + & 80\,t & = 0 \\ - & 12x & - & 8\,y & - & 4\,z & + & 36\,t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} & 12x & & & + & 4\,z & - & 44\,t & = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ - & 48x & - & 24\,y & - & 12\,z & + & 144\,t & = 0 & \\ - & 24x & - & 16\,y & - & 12\,z & + & 80\,t & = 0 & \\ - & 12x & - & 8\,y & - & 4\,z & + & 36\,t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 12x & & & + & 4\,z & - & 44\,t = 0 & \\ & - & 24\,y & + & 4\,z & - & 32\,t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & - & 16\,y & - & 4\,z & - & 8\,t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\ & - & 8\,y & & & - & 8\,t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 12x & & & + & 4\,z & - & 44\,t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 8\,y & & & - & 8\,t = 0 & \\ & - & 16\,y & - & 4\,z & - & 8\,t = 0 & \\ & - & 24\,y & + & 4\,z & - & 32\,t = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 12x & & & + & 4\,z & - & 44\,t & = & 0 & \\ & - & 8\,y & & & - & 8\,t & = & 0 & \\ & & & - & 4\,z & + & 8\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ & & & & 4\,z & - & 8\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 12x & & & + & 4\,z & - & 44\,t & = & 0 & \\ & - & 8\,y & & & - & 8\,t & = & 0 & \\ & & & - & 4\,z & + & 8\,t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{3}z + \frac{11}{3}t \\ y & = & -t \\ z & = & 2t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & -a \\ z & = & 2a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -3X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -7X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 64. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+10 & 72 & 222 & 288 \\ -8 & x+116 & 300 & 432 \\ 0 & -24 & x-64 & -96 \\ 2 & -12 & -30 & x-40 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+10 & 0 & 3x+30 & 0 \\ -8 & x+116 & 300 & 432 \\ 0 & -24 & x-64 & -96 \\ 2 & -12 & -30 & x-40 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3) \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & x+116 & 300 & 432 \\ 0 & -24 & x-64 & -96 \\ 2 & -12 & -30 & x-40 \end{vmatrix} \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & x+116 & 324 & 432 \\ 0 & -24 & x-64 & -96 \\ 2 & -12 & -36 & x-40 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} x+116 & 324 & 432 \\ -24 & x-64 & -96 \\ -12 & -36 & x-40 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+10)\begin{vmatrix} x+116 & 324 & 432 \\ 0 & x+8 & -2x-16 \\ -12 & -36 & x-40 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3) \\
&= (x+8)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x+116 & 324 & 432 \\ 0 & 1 & -2 \\ -12 & -36 & x-40 \end{vmatrix} \\
&= (x+8)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x+116 & 324 & 1080 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -36 & x-112 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\
&= (x+8)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x+116 & 1080 \\ -12 & x-112 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+8)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} x+8 & 9x+72 \\ -12 & x-112 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 9L_2) \\
&= (x+10)\cdot(x+8)^2\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -12 & x-112 \end{vmatrix} \\
&= (x+10)\cdot(x+8)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -12 & x-4 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 9C_1) \\
&= (x-4)\cdot(x+10)\cdot(x+8)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-4)\cdot(X+10)\cdot(X+8)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 4, -10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 4\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 14x & - & 72\,y & - & 222\,z & - & 288\,t & = & 0 \\ 8x & - & 120\,y & - & 300\,z & - & 432\,t & = & 0 \\ & & 24\,y & + & 60\,z & + & 96\,t & = & 0 \\ -\ 2x & + & 12\,y & + & 30\,z & + & 36\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 2x & + & 12\,y & + & 30\,z & + & 36\,t & = & 0 \\ 8x & - & 120\,y & - & 300\,z & - & 432\,t & = & 0 \\ & & 24\,y & + & 60\,z & + & 96\,t & = & 0 \\ -\ 14x & - & 72\,y & - & 222\,z & - & 288\,t & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftrightarrow L_1)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 2x & + & 12\,y & + & 30\,z & + & 36\,t & = & 0 \\ & - & 72\,y & - & 180\,z & - & 288\,t & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & & 24\,y & + & 60\,z & + & 96\,t & = & 0 \\ & - & 156\,y & - & 432\,z & - & 540\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 7L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 2x & + & 12\,y & + & 30\,z & + & 36\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 24\,y & + & 60\,z & + & 96\,t & = & 0 \\ & - & 72\,y & - & 180\,z & - & 288\,t & = & 0 \\ & - & 156\,y & - & 432\,z & - & 540\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 2x & + & 12\,y & + & 30\,z & + & 36\,t & = & 0 \\ & & 24\,y & + & 60\,z & + & 96\,t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \\ & & & - & 42\,z & + & 84\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{13}{2}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 2x & + & 12\,y & + & 30\,z & + & 36\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & & 24\,y & + & 60\,z & + & 96\,t & = & 0 \\ & & & - & 42\,z & + & 84\,t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6y + 15z + 18t \\ y & = & -\frac{5}{2}z - 4t \\ z & = & 2t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -6a \\ y & = & -9a \\ z & = & 2a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -10X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 & 0 \\ -9 & -4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 65. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-27 & -32 & -24 & -226 \\ -51 & x-42 & -36 & -342 \\ -68 & -64 & x-46 & -472 \\ 17 & 16 & 12 & x+120 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+7 & 0 & 0 & 2x+14 \\ -51 & x-42 & -36 & -342 \\ -68 & -64 & x-46 & -472 \\ 17 & 16 & 12 & x+120 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4) \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -51 & x-42 & -36 & -342 \\ -68 & -64 & x-46 & -472 \\ 17 & 16 & 12 & x+120 \end{vmatrix} \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -51 & x-42 & -36 & -240 \\ -68 & -64 & x-46 & -336 \\ 17 & 16 & 12 & x+86 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1) \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} x-42 & -36 & -240 \\ -64 & x-46 & -336 \\ 16 & 12 & x+86 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 3x+18 \\ -64 & x-46 & -336 \\ 16 & 12 & x+86 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3) \\
&= (x+6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -64 & x-46 & -336 \\ 16 & 12 & x+86 \end{vmatrix} \\
&= (x+6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -64 & x-46 & -144 \\ 16 & 12 & x+38 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \\
&= (x+6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} x-46 & -144 \\ 12 & x+38 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} x-46 & -3x-6 \\ 12 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x+2)\cdot(x+6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} x-46 & -3 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\cdot(x+6)\cdot(x+7) \begin{vmatrix} x-10 & 0 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x+2)\cdot(x+6)\cdot(x+7).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X+2)\cdot(X+6)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 10, -6, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à

$\ker(A-10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 17x & + & 32\,y & + & 24\,z & + & 226\,t & = & 0 \\ 51x & + & 32\,y & + & 36\,z & + & 342\,t & = & 0 \\ 68x & + & 64\,y & + & 36\,z & + & 472\,t & = & 0 \\ -\;17x & - & 16\,y & - & 12\,z & - & 130\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 17x & + & 32\,y & + & 24\,z & + & 226\,t & = & 0 & \\ & - & 64\,y & - & 36\,z & - & 336\,t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & - & 64\,y & - & 60\,z & - & 432\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ & & 16\,y & + & 12\,z & + & 96\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 17x & + & 32\,y & + & 24\,z & + & 226\,t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & & 16\,y & + & 12\,z & + & 96\,t & = & 0 & \\ & - & 64\,y & - & 60\,z & - & 432\,t & = & 0 & \\ & - & 64\,y & - & 36\,z & - & 336\,t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 17x & + & 32\,y & + & 24\,z & + & 226\,t & = & 0 & \\ & & 16\,y & + & 12\,z & + & 96\,t & = & 0 & \\ & & & - & 12\,z & - & 48\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \\ & & & & 12\,z & + & 48\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 17x & + & 32\,y & + & 24\,z & + & 226\,t & = & 0 & \\ & & 16\,y & + & 12\,z & + & 96\,t & = & 0 & \\ & & & - & 12\,z & - & 48\,t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{32}{17}y - \frac{24}{17}z - \frac{226}{17}t \\ y & = & -\frac{3}{4}z - 6t \\ z & = & -4t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2a \\ y & = & -3a \\ z & = & -4a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -7X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 66. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+12 & 7 & 5 & 6 \\ -44 & x-31 & -20 & -40 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 11 & 7 & 5 & x+7 \end{vmatrix} \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} x+12 & 7 & 6 \\ -44 & x-31 & -40 \\ 11 & 7 & x+7 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-5) \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -x-1 \\ -44 & x-31 & -40 \\ 11 & 7 & x+7 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\
&= (x-5)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -44 & x-31 & -40 \\ 11 & 7 & x+7 \end{vmatrix} \\
&= (x-5)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -44 & x-31 & -84 \\ 11 & 7 & x+18 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\
&= (x-5)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x-31 & -84 \\ 7 & x+18 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x-5)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x-31 & -3x+9 \\ 7 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x-31 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x-10 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+1).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-5)\cdot(X-3)\cdot(X+1)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, 3, 5, -1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} -22x & -7y & -5z & -6t & = & 0 \\ 44x & +21y & +20z & +40t & = & 0 \\ & & -5z & & = & 0 \\ -11x & -7y & -5z & -17t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrcll} -11x & -7y & -5z & -17t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ 44x & +21y & +20z & +40t & = & 0 & \\ & & -5z & & = & 0 & \\ -22x & -7y & -5z & -6t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcll} -11x & -7y & -5z & -17t & = & 0 & \\ & -7y & & -28t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & & -5z & & = & 0 & \\ & 7y & +5z & +28t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 11x & - & 7\,y & - & 5\,z & - & 17\,t & = & 0 \\ & & - & 7\,y & & & - & 28\,t & = & 0 \\ & & & & - & 5\,z & & & = & 0 \\ & & & & & 5\,z & & & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 11x & - & 7\,y & - & 5\,z & - & 17\,t & = & 0 \\ & & - & 7\,y & & & - & 28\,t & = & 0 \\ & & & & - & 5\,z & & & = & 0 \\ & & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{11}y - \frac{5}{11}z - \frac{17}{11}t \\ y & = & -4t \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & -4a \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 3X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 67. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+4 & 12 & -36 & -24 \\ 40 & x+4 & 0 & 40 \\ 16 & 12 & x-32 & -8 \\ -4 & -12 & 36 & x+24 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 40 & x+4 & 0 & 40 \\ 16 & 12 & x-32 & -8 \\ -4 & -12 & 36 & x+24 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_4) \\
&= x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 40 & x+4 & 0 & 40 \\ 16 & 12 & x-32 & -8 \\ -4 & -12 & 36 & x+24 \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & x+4 & 0 & 0 \\ 16 & 12 & x-32 & -24 \\ -4 & -12 & 36 & x+28 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\
&= x \begin{vmatrix} x+4 & 0 & 0 \\ 12 & x-32 & -24 \\ -12 & 36 & x+28 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= x \cdot (x+4) \begin{vmatrix} x-32 & -24 \\ 36 & x+28 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= x \cdot (x+4) \begin{vmatrix} x+4 & x+4 \\ 36 & x+28 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= x \cdot (x+4) \begin{vmatrix} x+4 & 0 \\ 36 & x-8 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= x \cdot (x-8) \cdot (x+4)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8) \cdot X \cdot (X+4)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, 0, -4\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -12x & - & 12y & + & 36z & + & 24t & = & 0 \\ -40x & - & 12y & & & - & 40t & = & 0 \\ -16x & - & 12y & + & 24z & + & 8t & = & 0 \\ 4x & + & 12y & - & 36z & - & 32t & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 12y & - & 36z & - & 32t & = & 0 \\ -40x & - & 12y & & & - & 40t & = & 0 \\ -16x & - & 12y & + & 24z & + & 8t & = & 0 \\ -12x & - & 12y & + & 36z & + & 24t & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftrightarrow L_1) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 12y & - & 36z & - & 32t & = & 0 \\ & & 108y & - & 360z & - & 360t & = & 0 \\ & & 36y & - & 120z & - & 120t & = & 0 \\ & & 24y & - & 72z & - & 72t & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \\ (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1) \end{array} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 12y & - & 36z & - & 32t & = & 0 \\ & & 24y & - & 72z & - & 72t & = & 0 \\ & & 36y & - & 120z & - & 120t & = & 0 \\ & & 108y & - & 360z & - & 360t & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftrightarrow L_2) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 12y & - & 36z & - & 32t & = & 0 \\ & & 24y & - & 72z & - & 72t & = & 0 \\ & & & - & 12z & - & 12t & = & 0 \\ & & & - & 36z & - & 36t & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2) \\ (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{9}{2}L_2) \end{array} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 12y & - & 36z & - & 32t & = & 0 \\ & & 24y & - & 72z & - & 72t & = & 0 \\ & & & - & 12z & - & 12t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3)
\end{aligned}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3y+9z+8t \\ y & = & 3z+3t \\ z & = & -t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -a \\ y & = & 0 \\ z & = & -a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 0$, $f_A(X_3) = AX_3 = -4X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -4X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 68. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+60 & 28 & 16 & -332 \\ 26 & x+16 & 8 & -154 \\ 13 & 7 & x+3 & -74 \\ 13 & 7 & 4 & x-75 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+60 & 28 & 16 & -332 \\ 26 & x+16 & 8 & -154 \\ 0 & 0 & x-1 & -x+1 \\ 13 & 7 & 4 & x-75 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_4)$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x+60 & 28 & 16 & -332 \\ 26 & x+16 & 8 & -154 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 13 & 7 & 4 & x-75 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x+60 & 28 & -316 & -332 \\ 26 & x+16 & -146 & -154 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 13 & 7 & x-71 & x-75 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_4)$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x+60 & 28 & -316 \\ 26 & x+16 & -146 \\ 13 & 7 & x-71 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x+60 & 28 & -316 \\ 0 & x+2 & -2x-4 \\ 13 & 7 & x-71 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3)$$

$$= (x-1)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+60 & 28 & -316 \\ 0 & 1 & -2 \\ 13 & 7 & x-71 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+60 & 28 & -260 \\ 0 & 1 & 0 \\ 13 & 7 & x-57 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2)$$

$$= (x-1)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+60 & -260 \\ 13 & x-57 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$= (x-1)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+60 & 4x-20 \\ 13 & x-5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)$$

$$= (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+60 & 4 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+8 & 0 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)$$

$$= (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+8).$$

Donc : $\chi_A = (X-5)\cdot(X-1)\cdot(X+2)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 1, 5, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 5\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} -65x & -28y & -16z & +332t & = 0 \\ -26x & -21y & -8z & +154t & = 0 \\ -13x & -7y & -8z & +74t & = 0 \\ -13x & -7y & -4z & +70t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrl} -13x & -7y & -8z & +74t & = 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -26x & -21y & -8z & +154t & = 0 \\ -65x & -28y & -16z & +332t & = 0 \\ -13x & -7y & -4z & +70t & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} -13x & -7y & -8z & +74t & = 0 \\ & -7y & +8z & +6t & = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & 7y & +24z & -38t & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \\ & & 4z & -4t & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} -13x & -7y & -8z & +74t & = 0 \\ & -7y & +8z & +6t & = 0 \\ & & 32z & -32t & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ & & 4z & -4t & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 13x & - & 7y & - & 8z & + & 74t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & - & 7y & + & 8z & + & 6t & = & 0 \\ & & & & 4z & - & 4t & = & 0 \\ & & & & 32z & - & 32t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 13x & - & 7y & - & 8z & + & 74t & = & 0 \\ & - & 7y & + & 8z & + & 6t & = & 0 \\ & & & & 4z & - & 4t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{13}y - \frac{8}{13}z + \frac{74}{13}t \\ y & = & \frac{8}{7}z + \frac{6}{7}t \\ z & = & t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4a \\ y & = & 2a \\ z & = & a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 69. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+34 & 16 & 8 & -144 \\ 36 & x+30 & 12 & -204 \\ 36 & 24 & x+14 & -192 \\ 12 & 8 & 4 & x-62 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+10 & 0 & 0 & -2x-20 \\ 36 & x+30 & 12 & -204 \\ 36 & 24 & x+14 & -192 \\ 12 & 8 & 4 & x-62 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 36 & x+30 & 12 & -204 \\ 36 & 24 & x+14 & -192 \\ 12 & 8 & 4 & x-62 \end{vmatrix} \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & x+30 & 12 & -132 \\ 36 & 24 & x+14 & -120 \\ 12 & 8 & 4 & x-38 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+30 & 12 & -132 \\ 24 & x+14 & -120 \\ 8 & 4 & x-38 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+10) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & -3x-18 \\ 24 & x+14 & -120 \\ 8 & 4 & x-38 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3) \\
&= (x+6)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 24 & x+14 & -120 \\ 8 & 4 & x-38 \end{vmatrix} \\
&= (x+6)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 24 & x+14 & -48 \\ 8 & 4 & x-14 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \\
&= (x+6)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x+14 & -48 \\ 4 & x-14 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+6)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} x-2 & -4x+8 \\ 4 & x-14 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-2)\cdot(x+6)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & x-14 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\cdot(x+6)\cdot(x+10) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+6)\cdot(x+10).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+2)\cdot(X+6)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -6, -2, -10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 2\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 36x & - & 16\,y & - & 8\,z & + & 144\,t & = 0 \\ - & 36x & - & 32\,y & - & 12\,z & + & 204\,t & = 0 \\ - & 36x & - & 24\,y & - & 16\,z & + & 192\,t & = 0 \\ - & 12x & - & 8\,y & - & 4\,z & + & 60\,t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 12x & - & 8\,y & - & 4\,z & + & 60\,t & = 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ - & 36x & - & 32\,y & - & 12\,z & + & 204\,t & = 0 \\ - & 36x & - & 24\,y & - & 16\,z & + & 192\,t & = 0 \\ - & 36x & - & 16\,y & - & 8\,z & + & 144\,t & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 12x & - & 8\,y & - & 4\,z & + & 60\,t & = & 0 \\ & - & 8\,y & & & + & 24\,t & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & & & - & 4\,z & + & 12\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ & & 8\,y & + & 4\,z & - & 36\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 12x & - & 8\,y & - & 4\,z & + & 60\,t & = & 0 \\ & - & 8\,y & & & + & 24\,t & = & 0 \\ & & & - & 4\,z & + & 12\,t & = & 0 \\ & & & & 4\,z & - & 12\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\ 12x & - & 8\,y & - & 4\,z & + & 60\,t & = & 0 \\ & - & 8\,y & & & + & 24\,t & = & 0 \\ & & & - & 4\,z & + & 12\,t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 5t \\ y & = & 3t \\ z & = & 3t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2a \\ y & = & 3a \\ z & = & 3a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\3\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -10X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 70. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$
\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+6 & 12 & -42 & 12 \\ 24 & x+75 & -312 & -96 \\ 6 & 18 & x-75 & -24 \\ -3 & -6 & 30 & x+21 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+6 & 12 & -42 & 4x+36 \\ 24 & x+75 & -312 & 0 \\ 6 & 18 & x-75 & 0 \\ -3 & -6 & 30 & x+9 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + 4C_1) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+6 & 12 & -42 & 4 \\ 24 & x+75 & -312 & 0 \\ 6 & 18 & x-75 & 0 \\ -3 & -6 & 30 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+18 & 36 & -162 & 0 \\ 24 & x+75 & -312 & 0 \\ 6 & 18 & x-75 & 0 \\ -3 & -6 & 30 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_4) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+18 & 36 & -162 \\ 24 & x+75 & -312 \\ 6 & 18 & x-75 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 4^{\text{e}} \text{ colonne}) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & -2x-12 \\ 24 & x+75 & -312 \\ 6 & 18 & x-75 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\
&= (x+6)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 24 & x+75 & -312 \\ 6 & 18 & x-75 \end{vmatrix} \\
&= (x+6)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 24 & x+75 & -264 \\ 6 & 18 & x-63 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1) \\
&= (x+6)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x+75 & -264 \\ 18 & x-63 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+6)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x+3 & -4x-12 \\ 18 & x-63 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x+3)\cdot(x+6)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 18 & x-63 \end{vmatrix} \\
&= (x+3)\cdot(x+6)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 18 & x+9 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x+3)\cdot(x+6)\cdot(x+9)^2.
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X+3)\cdot(X+6)\cdot(X+9)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6, -3, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A + 3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{ \begin{array}{rrrrl}
-3x & -12y & +42z & -12t & = 0 \\
-24x & -72y & +312z & +96t & = 0 \\
-6x & -18y & +78z & +24t & = 0 \\
3x & +6y & -30z & -18t & = 0
\end{array} \right.
\iff
\left\{ \begin{array}{rrrrll}
-3x & -12y & +42z & -12t & = 0 & \\
 & 24y & -24z & +192t & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1) \\
 & 6y & -6z & +48t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\
 & -6y & +12z & -30t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)
\end{array} \right.
$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\;3x & - & 12\,y & + & 42\,z & - & 12\,t & = & 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2)\\ & & 6\,y & - & 6\,z & + & 48\,t & = & 0\\ & & 24\,y & - & 24\,z & + & 192\,t & = & 0\\ & - & 6\,y & + & 12\,z & - & 30\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\;3x & - & 12\,y & + & 42\,z & - & 12\,t & = & 0\\ & & 6\,y & - & 6\,z & + & 48\,t & = & 0\\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2)\\ & & & & 6\,z & + & 18\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\;3x & - & 12\,y & + & 42\,z & - & 12\,t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_3)\\ & & 6\,y & - & 6\,z & + & 48\,t & = & 0\\ & & & & 6\,z & + & 18\,t & = & 0\\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4y + 14z - 4t\\ y & = & z - 8t\\ z & = & -3t\\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2a\\ y & = & -11a\\ z & = & -3a\\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2\\ -11\\ -3\\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2\\ -11\\ -3\\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1\\ -8\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -8\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -9X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 0\\ -11 & -8 & 0 & -8\\ -3 & -2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 71. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

← page 8

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+20 & 6 & -96 \\ 14 & x-2 & -54 \\ 7 & 2 & x-33 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+20 & 6 & -96 \\ 0 & x-6 & -2x+12 \\ 7 & 2 & x-33 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3) \\
&= (x-6) \begin{vmatrix} x+20 & 6 & -96 \\ 0 & 1 & -2 \\ 7 & 2 & x-33 \end{vmatrix} \\
&= (x-6) \begin{vmatrix} x+20 & 6 & -84 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & x-29 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\
&= (x-6) \begin{vmatrix} x+20 & -84 \\ 7 & x-29 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-6) \begin{vmatrix} x-8 & -4x+32 \\ 7 & x-29 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-8)\cdot(x-6) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & x-29 \end{vmatrix} \\
&= (x-8)\cdot(x-6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & x-1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-8)\cdot(x-6)\cdot(x-1).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X-6)\cdot(X-1)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, 1, 6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rrrrrrr} - & 28x & - & 6\,y & + & 96\,z & = 0 \\ - & 14x & - & 6\,y & + & 54\,z & = 0 \\ - & 7x & - & 2\,y & + & 25\,z & = 0 \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 7x & - & 2\,y & + & 25\,z & = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ - & 14x & - & 6\,y & + & 54\,z & = 0 & \\ - & 28x & - & 6\,y & + & 96\,z & = 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 7x & - & 2\,y & + & 25\,z & = 0 & \\ & & - & 2\,y & + & 4\,z & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & 2\,y & - & 4\,z & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 7x & - & 2\,y & + & 25\,z & = 0 & \\ & & - & 2\,y & + & 4\,z & = 0 & \\ & & & & & 0 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2}{7}y + \frac{25}{7}z \\ y & = & 2z \\ z & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & 2a \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-

espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-8\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-6\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=8X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=6X_2$ et $f_A(X_3)=AX_3=X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&6&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}3&3&4\\2&3&2\\1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}8&0&0\\0&6&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 72. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x-10&108&288&396\\-12&x+170&462&624\\12&-36&x-76&-120\\-6&-18&-66&x-76\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}x-46&0&-108&6x-60\\-\frac13x-\frac{206}{3}&0&-\frac{11}{3}x-\frac{484}{3}&\frac1{18}x^2+\frac{47}{9}x-\frac{844}{9}\\24&0&x+56&-2x+32\\-6&-18&-66&x-76\end{vmatrix}
\quad\begin{matrix}(L_1\leftarrow L_1+6L_4)\\(L_2\leftarrow L_2-\left[\left(-\frac1{18}\right)\cdot(x+170)\right]L_4)\\(L_3\leftarrow L_3-2L_4)\end{matrix}\\
&=-1\cdot2\cdot3^2\begin{vmatrix}x-46&-108&6x-60\\-\frac13x-\frac{206}{3}&-\frac{11}{3}x-\frac{484}{3}&\frac1{18}x^2+\frac{47}{9}x-\frac{844}{9}\\24&x+56&-2x+32\end{vmatrix}\quad\text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}\\
&=-1\cdot2\cdot3^2\begin{vmatrix}x-46&-6x-48&6x-60\\-\frac13x-\frac{206}{3}&-\frac1{18}x^2-\frac{80}{9}x-\frac{608}{9}&\frac1{18}x^2+\frac{47}{9}x-\frac{844}{9}\\24&3x+24&-2x+32\end{vmatrix}\quad(C_2\leftarrow C_2-C_3)\\
&=-1\cdot2\cdot3^2\begin{vmatrix}(x-46)&(-6)\cdot(x+8)&(6)\cdot(x-10)\\\left(-\frac13\right)\cdot(x+206)&\left(-\frac1{18}\right)\cdot(x+8)\cdot(x+152)&\left(\frac1{18}\right)\cdot(x^2+94x-1688)\\2^3\cdot3&(3)\cdot(x+8)&(-2)\cdot(x-16)\end{vmatrix}\\
&=(-18)\cdot(x+8)\begin{vmatrix}x-46&-6&6x-60\\-\frac13x-\frac{206}{3}&-\frac1{18}x-\frac{76}{9}&\frac1{18}x^2+\frac{47}{9}x-\frac{844}{9}\\24&3&-2x+32\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-18)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 2x+4 \\ \frac{1}{9}x-\frac{10}{9} & 0 & \frac{1}{54}x^2+\frac{5}{27}x-\frac{100}{27} \\ 24 & 3 & -2x+32 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l}(L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3) \\ \left(L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(-\frac{1}{54}\right)\cdot(x+152)\right] L_3\right)\end{array} \\
&= (54)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+2 & 2x+4 \\ \frac{1}{9}x-\frac{10}{9} & \frac{1}{54}x^2+\frac{5}{27}x-\frac{100}{27} \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)} \\
&= (54)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} (x+2) & (2)\cdot(x+2) \\ \left(\frac{1}{9}\right)\cdot(x-10) & \left(\frac{1}{54}\right)\cdot(x-10)\cdot(x+20) \end{vmatrix} \\
&= (54)\cdot(x-10)\cdot(x+2)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3^{-2} & \left(\frac{1}{54}\right)\cdot(x+20) \end{vmatrix} \\
&= (54)\cdot(x-10)\cdot(x+2)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{54}x+\frac{4}{27} \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\
&= (x-10)\cdot(x+2)\cdot(x+8)^2.
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X+2)\cdot(X+8)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 10, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} & - & 108y & - & 288z & - & 396t & = & 0 \\ 12x & - & 180y & - & 462z & - & 624t & = & 0 \\ -12x & + & 36y & + & 66z & + & 120t & = & 0 \\ 6x & + & 18y & + & 66z & + & 66t & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} 6x & + & 18y & + & 66z & + & 66t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ 12x & - & 180y & - & 462z & - & 624t & = & 0 & \\ -12x & + & 36y & + & 66z & + & 120t & = & 0 & \\ & - & 108y & - & 288z & - & 396t & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} 6x & + & 18y & + & 66z & + & 66t & = & 0 & \\ & - & 216y & - & 594z & - & 756t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & 72y & + & 198z & + & 252t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\ & - & 108y & - & 288z & - & 396t & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} 6x & + & 18y & + & 66z & + & 66t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 72y & + & 198z & + & 252t & = & 0 & \\ & - & 216y & - & 594z & - & 756t & = & 0 & \\ & - & 108y & - & 288z & - & 396t & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} 6x & + & 18y & + & 66z & + & 66t & = & 0 & \\ & & 72y & + & 198z & + & 252t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \\ & & & & 9z & - & 18t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} 6x & + & 18y & + & 66z & + & 66t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & & 72y & + & 198z & + & 252t & = & 0 & \\ & & & & 9z & - & 18t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3y - 11z - 11t \\ y & = & -\frac{11}{4}z - \frac{7}{2}t \\ z & = & 2t \\ t & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -6a \\ y & = & -9a \\ z & = & 2a \\ t & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-

espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-6\\-9\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+8\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\-\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=10X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=-2X_2$, $f_A(X_3)=AX_3=-8X_3$ et $f_A(X_4)=AX_4=-8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}10&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-8&0\\0&0&0&-8\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}-6&3&\frac{2}{3}&0\\-9&2&0&-1\\2&-2&-\frac{4}{3}&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}10&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-8&0\\0&0&0&-8\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 73. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x-22&-14&-12&-6\\36&x+18&18&24\\-24&-14&x-16&-18\\12&7&6&x+5\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}x+2&0&0&2x+4\\36&x+18&18&24\\-24&-14&x-16&-18\\12&7&6&x+5\end{vmatrix}\quad (L_1\leftarrow L_1+2L_4)\\
&=(x+2)\begin{vmatrix}1&0&0&2\\36&x+18&18&24\\-24&-14&x-16&-18\\12&7&6&x+5\end{vmatrix}\\
&=(x+2)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\36&x+18&18&-48\\-24&-14&x-16&30\\12&7&6&x-19\end{vmatrix}\quad (C_4\leftarrow C_4-2C_1)\\
&=(x+2)\begin{vmatrix}x+18&18&-48\\-14&x-16&30\\7&6&x-19\end{vmatrix}\quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+2)\begin{vmatrix} x+18 & 18 & -48 \\ 0 & x-4 & 2x-8 \\ 7 & 6 & x-19 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3) \\
&= (x-4)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+18 & 18 & -48 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & x-19 \end{vmatrix} \\
&= (x-4)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+18 & 18 & -84 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & x-31 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2) \\
&= (x-4)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x+18 & -84 \\ 7 & x-31 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne}) \\
&= (x-4)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x-10 & -4x+40 \\ 7 & x-31 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x-4)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & x-31 \end{vmatrix} \\
&= (x-10)\cdot(x-4)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-10)\cdot(x-4)\cdot(x-3)\cdot(x+2).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-4)\cdot(X-3)\cdot(X+2)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, 3, 4, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & 12x & + & 14y & + & 12z & + & 6t & = 0 \\
- & 36x & - & 28y & - & 18z & - & 24t & = 0 \\
 & 24x & + & 14y & + & 6z & + & 18t & = 0 \\
- & 12x & - & 7y & - & 6z & - & 15t & = 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrrrl}
12x & + & 14y & + & 12z & + & 6t & = 0 \\
 & & 14y & + & 18z & - & 6t & = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\
 & - & 14y & - & 18z & + & 6t & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\
 & & 7y & + & 6z & - & 9t & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrrrl}
12x & + & 14y & + & 12z & + & 6t & = 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_2) \\
 & & 7y & + & 6z & - & 9t & = 0 \\
 & - & 14y & - & 18z & + & 6t & = 0 \\
 & & 14y & + & 18z & - & 6t & = 0
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrrrl}
12x & + & 14y & + & 12z & + & 6t & = 0 \\
 & & 7y & + & 6z & - & 9t & = 0 \\
 & & & - & 6z & - & 12t & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \\
 & & & & 6z & + & 12t & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrrrl}
12x & + & 14y & + & 12z & + & 6t & = 0 \\
 & & 7y & + & 6z & - & 9t & = 0 \\
 & & & - & 6z & - & 12t & = 0 \\
 & & & & & & 0 & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl}
x & = & -\frac{7}{6}y - z - \frac{1}{2}t \\
y & = & -\frac{6}{7}z + \frac{9}{7}t \\
z & = & -2t \\
t & = & a
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl}
x & = & -2a \\
y & = & 3a \\
z & = & -2a \\
t & = & a
\end{array}\right.
$$

De là, on déduit : $\ker(A-10\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-4\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-3\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+2\mathrm{I}_4)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=10X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=4X_2$, $f_A(X_3)=AX_3=3X_3$ et $f_A(X_4)=AX_4=-2X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}10&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}-2&-2&-2&-1\\3&3&4&3\\-2&-1&-2&-2\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}10&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 74. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x+150&36&-696&-732\\84&x+30&-408&-444\\24&0&x-102&-96\\12&9&-66&x-81\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}x+102&0&-432&-4x-408\\-\frac{4}{3}x+44&0&\frac{22}{3}x-188&-\frac{1}{9}x^2+\frac{17}{3}x-174\\24&0&x-102&-96\\12&9&-66&x-81\end{vmatrix}\quad\begin{matrix}(L_1\leftarrow L_1-4L_4)\\(L_2\leftarrow L_2-\left[\left(\frac{1}{9}\right)\cdot(x+30)\right]L_4)\end{matrix}\\
&=3^2\begin{vmatrix}x+102&-432&-4x-408\\-\frac{4}{3}x+44&\frac{22}{3}x-188&-\frac{1}{9}x^2+\frac{17}{3}x-174\\24&x-102&-96\end{vmatrix}\quad(\text{développement par rapport à la }2^{\text{e}}\text{ colonne})\\
&=3^2\begin{vmatrix}x+102&4x-24&-4x-408\\-\frac{4}{3}x+44&\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{3}x-14&-\frac{1}{9}x^2+\frac{17}{3}x-174\\24&x-6&-96\end{vmatrix}\quad(C_2\leftarrow C_2-C_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3^2 \begin{vmatrix} (x+102) & (4)\cdot(x-6) & (-4)\cdot(x+102) \\ \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(x-33) & \left(\frac{1}{9}\right)\cdot(x-6)\cdot(x+21) & \left(-\frac{1}{9}\right)\cdot(x^2-51x+1566) \\ 2^3\cdot 3 & (x-6) & -1\cdot 2^5\cdot 3 \end{vmatrix} \\
&= (9)\cdot(x-6) \begin{vmatrix} x+102 & 4 & -4x-408 \\ -\frac{4}{3}x+44 & \frac{1}{9}x+\frac{7}{3} & -\frac{1}{9}x^2+\frac{17}{3}x-174 \\ 24 & 1 & -96 \end{vmatrix} \\
&= (9)\cdot(x-6) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & -4x-24 \\ -4x-12 & 0 & -\frac{1}{9}x^2+\frac{49}{3}x+50 \\ 24 & 1 & -96 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3) \\ \left(L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(\frac{1}{9}\right)\cdot(x+21)\right] L_3\right) \end{array} \\
&= (-9)\cdot(x-6) \begin{vmatrix} x+6 & -4x-24 \\ -4x-12 & -\frac{1}{9}x^2+\frac{49}{3}x+50 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)} \\
&= (-9)\cdot(x-6) \begin{vmatrix} (x+6) & (-4)\cdot(x+6) \\ (-4)\cdot(x+3) & \left(-\frac{1}{9}\right)\cdot(x-150)\cdot(x+3) \end{vmatrix} \\
&= (-9)\cdot(x-6)\cdot(x+3)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & -1\cdot 2^2 \\ -1\cdot 2^2 & \left(-\frac{1}{9}\right)\cdot(x-150) \end{vmatrix} \\
&= (-9)\cdot(x-6)\cdot(x+3)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{9}x+\frac{2}{3} \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x+3)\cdot(x+6)\cdot(x-6)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X+3)\cdot(X+6)\cdot(X-6)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6,-3,6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A+3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -147x - 36y + 696z + 732t = 0 \\ -84x - 27y + 408z + 444t = 0 \\ -24x + 105z + 96t = 0 \\ -12x - 9y + 66z + 84t = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -12x - 9y + 66z + 84t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -84x - 27y + 408z + 444t = 0 \\ -24x + 105z + 96t = 0 \\ -147x - 36y + 696z + 732t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -12x - 9y + 66z + 84t = 0 \\ 36y - 54z - 144t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1) \\ 18y - 27z - 72t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ \frac{297}{4}y - \frac{225}{2}z - 297t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{49}{4}L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -12x - 9y + 66z + 84t = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ 18y - 27z - 72t = 0 \\ 36y - 54z - 144t = 0 \\ \frac{297}{4}y - \frac{225}{2}z - 297t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -12x - 9y + 66z + 84t = 0 \\ 18y - 27z - 72t = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ -\frac{9}{8}z = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{33}{8}L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -12x - 9y + 66z + 84t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ 18y - 27z - 72t = 0 \\ -\frac{9}{8}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y + \frac{11}{2}z + 7t \\ y = \frac{3}{2}z + 4t \\ z = 0 \\ t = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 4a \\ y = 4a \\ z = 0 \\ t = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A+3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\4\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A+3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\4\\0\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}13\\7\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = -3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 6X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = 6X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-6&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}4&13&-2&0\\4&7&0&1\\0&2&-\frac{3}{2}&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-6&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 75. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix}x+40&9&3&-99\\-10&x&-1&26\\-40&-12&x-3&96\\10&3&1&x-23\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}x&x&x&x\\-10&x&-1&26\\-40&-12&x-3&96\\10&3&1&x-23\end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3+L_4)\\
&= \begin{vmatrix}x&0&0&0\\-10&x+10&9&36\\-40&28&x+37&136\\10&-7&-9&x-33\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}\\(C_2 \leftarrow C_2-C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3-C_1)\\(C_4 \leftarrow C_4-C_1)\end{matrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x \begin{vmatrix} x+10 & 9 & 36 \\ 28 & x+37 & 136 \\ -7 & -9 & x-33 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ colonne)} \\
&= x \begin{vmatrix} x+3 & 0 & x+3 \\ 28 & x+37 & 136 \\ -7 & -9 & x-33 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\
&= x\cdot(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 28 & x+37 & 136 \\ -7 & -9 & x-33 \end{vmatrix} \\
&= x\cdot(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 28 & x+37 & 108 \\ -7 & -9 & x-26 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\
&= x\cdot(x+3) \begin{vmatrix} x+37 & 108 \\ -9 & x-26 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= x\cdot(x+3) \begin{vmatrix} x+37 & -3x-3 \\ -9 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= x\cdot(x+1)\cdot(x+3) \begin{vmatrix} x+37 & -3 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} \\
&= x\cdot(x+1)\cdot(x+3) \begin{vmatrix} x+10 & 0 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+10).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = X\cdot(X+1)\cdot(X+3)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,-3,-1,-10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
-40x - 9y - 3z + 99t &=& 0 \\
10x + z - 26t &=& 0 \\
40x + 12y + 3z - 96t &=& 0 \\
-10x - 3y - z + 23t &=& 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcll}
10x + z - 26t &=& 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\
-40x - 9y - 3z + 99t &=& 0 & \\
40x + 12y + 3z - 96t &=& 0 & \\
-10x - 3y - z + 23t &=& 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcll}
10x + z - 26t &=& 0 & \\
-9y + z - 5t &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\
12y - z + 8t &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\
-3y - 3t &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcll}
10x + z - 26t &=& 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\
-3y - 3t &=& 0 & \\
12y - z + 8t &=& 0 & \\
-9y + z - 5t &=& 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcll}
10x + z - 26t &=& 0 & \\
-3y - 3t &=& 0 & \\
-z - 4t &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \\
z + 4t &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcll}
10x + z - 26t &=& 0 & \\
-3y - 3t &=& 0 & \\
-z - 4t &=& 0 & \\
0 &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R},\
\left\{\begin{array}{rcl}
x &=& -\frac{1}{10}z + \frac{13}{5}t \\
y &=& -t \\
z &=& -4t \\
t &=& a
\end{array}\right.
$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 3a \\ y &= -a \\ z &= -4a \\ t &= a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 0$, $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -3X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -10X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 76. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-46 & -39 & -21 & 15 \\ 18 & x+16 & 7 & 0 \\ 72 & 52 & x+25 & 24 \\ 18 & 13 & 7 & x+3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-46 & -39 & -21 & 15 \\ 0 & x+3 & 0 & -x-3 \\ 72 & 52 & x+25 & 24 \\ 18 & 13 & 7 & x+3 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_4) \\
&= (x+3) \begin{vmatrix} x-46 & -39 & -21 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 72 & 52 & x+25 & 24 \\ 18 & 13 & 7 & x+3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} x-46 & -39 & -21 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 72 & 52 & x+25 & 76 \\ 18 & 13 & 7 & x+16 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + C_2)$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} x-46 & -21 & -24 \\ 72 & x+25 & 76 \\ 18 & 7 & x+16 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} x+8 & 0 & 3x+24 \\ 72 & x+25 & 76 \\ 18 & 7 & x+16 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3)$$

$$= (x+3)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 72 & x+25 & 76 \\ 18 & 7 & x+16 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 72 & x+25 & -140 \\ 18 & 7 & x-38 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1)$$

$$= (x+3)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+25 & -140 \\ 7 & x-38 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)}$$

$$= (x+3)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+25 & 4x-40 \\ 7 & x-10 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1)$$

$$= (x-10)\cdot(x+3)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x+25 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-10)\cdot(x+3)\cdot(x+8)\begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2)$$

$$= (x-10)\cdot(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x+8).$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-3)\cdot(X+3)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 10, 3, -3\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 36x & + & 39y & + & 21z & - & 15t & = & 0 \\ -18x & - & 26y & - & 7z & & & = & 0 \\ -72x & - & 52y & - & 35z & - & 24t & = & 0 \\ -18x & - & 13y & - & 7z & - & 13t & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -18x & - & 26y & - & 7z & & & = & 0 \\ 36x & + & 39y & + & 21z & - & 15t & = & 0 \\ -72x & - & 52y & - & 35z & - & 24t & = & 0 \\ -18x & - & 13y & - & 7z & - & 13t & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_2 \leftrightarrow L_1)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -18x & - & 26y & - & 7z & & & = & 0 \\ & - & 13y & + & 7z & - & 15t & = & 0 \\ & & 52y & - & 7z & - & 24t & = & 0 \\ & & 13y & & & - & 13t & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -18x & - & 26y & - & 7z & & & = & 0 \\ & - & 13y & + & 7z & - & 15t & = & 0 \\ & & & & 21z & - & 84t & = & 0 \\ & & & & 7z & - & 28t & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \\ (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -18x & - & 26y & - & 7z & & & = & 0 \\ & - & 13y & + & 7z & - & 15t & = & 0 \\ & & & & 7z & - & 28t & = & 0 \\ & & & & 21z & - & 84t & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftrightarrow L_3)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -18x & - & 26y & - & 7z & & & = & 0 \\ & - & 13y & + & 7z & - & 15t & = & 0 \\ & & & & 7z & - & 28t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3)$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{13}{9}y - \frac{7}{18}z \\ y & = & \frac{7}{13}z - \frac{15}{13}t \\ z & = & 4t \\ t & = & a \end{array} \right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3a \\ y & = & a \\ z & = & 4a \\ t & = & a \end{array} \right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 3X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -3X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 77. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+10 & 2 & -24 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 4 & 1 & x-10 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x+10 & -24 \\ 4 & x-10 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & -3x+6 \\ 4 & x-10 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-2)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & x-10 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & x+2 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+2).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+2)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcl} -12x - 2y + 24z &=& 0 \\ -y &=& 0 \\ -4x - y + 8z &=& 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcll} -4x - y + 8z &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -y &=& 0 & \\ -12x - 2y + 24z &=& 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} -4x - y + 8z &=& 0 & \\ -y &=& 0 & \\ y &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} -4x - y + 8z &=& 0 & \\ -y &=& 0 & \\ 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{1}{4}y + 2z \\ y &=& 0 \\ z &=& a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2a \\ y &=& 0 \\ z &=& a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -2X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 78. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+36 & 6 & 3 & -135 \\ 20 & x+2 & 2 & -74 \\ 10 & 2 & x-2 & -36 \\ 10 & 2 & 1 & x-39 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+36 & 6 & 3 & -135 \\ 20 & x+2 & 2 & -74 \\ 0 & 0 & x-3 & -x+3 \\ 10 & 2 & 1 & x-39 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_4) \\
&= (x-3)\begin{vmatrix} x+36 & 6 & 3 & -135 \\ 20 & x+2 & 2 & -74 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & 2 & 1 & x-39 \end{vmatrix} \\
&= (x-3)\begin{vmatrix} x+36 & 6 & -132 & -135 \\ 20 & x+2 & -72 & -74 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 2 & x-38 & x-39 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_4) \\
&= (x-3)\begin{vmatrix} x+36 & 6 & -132 \\ 20 & x+2 & -72 \\ 10 & 2 & x-38 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 3^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-3)\begin{vmatrix} x+36 & 6 & -132 \\ 0 & x-2 & -2x+4 \\ 10 & 2 & x-38 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3) \\
&= (x-3)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x+36 & 6 & -132 \\ 0 & 1 & -2 \\ 10 & 2 & x-38 \end{vmatrix} \\
&= (x-3)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x+36 & 6 & -120 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & x-34 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\
&= (x-3)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x+36 & -120 \\ 10 & x-34 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-3)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x-4 & -4x+16 \\ 10 & x-34 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-4)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 10 & x-34 \end{vmatrix} \\
&= (x-4)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 10 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-4)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-4)\cdot(X-3)\cdot(X-2)\cdot(X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6,2,3,4\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 4\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -40x & - & 6y & - & 3z & + & 135t & = & 0 \\ -20x & - & 6y & - & 2z & + & 74t & = & 0 \\ -10x & - & 2y & - & 2z & + & 36t & = & 0 \\ -10x & - & 2y & - & z & + & 35t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -10x & - & 2y & - & 2z & + & 36t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -20x & - & 6y & - & 2z & + & 74t & = & 0 & \\ -40x & - & 6y & - & 3z & + & 135t & = & 0 & \\ -10x & - & 2y & - & z & + & 35t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -10x & - & 2y & - & 2z & + & 36t & = & 0 & \\ & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & 2y & + & 5z & - & 9t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ & & & & z & - & t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -10x & - & 2y & - & 2z & + & 36t & = & 0 & \\ & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 0 & \\ & & & & 7z & - & 7t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ & & & & z & - & t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -10x & - & 2y & - & 2z & + & 36t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 0 & \\ & & & & z & - & t & = & 0 & \\ & & & & 7z & - & 7t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -10x & - & 2y & - & 2z & + & 36t & = & 0 & \\ & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 0 & \\ & & & & z & - & t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 7L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z + \frac{18}{5}t \\ y & = & z + t \\ z & = & t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3a \\ y & = & 2a \\ z & = & a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A-3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A-2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A+6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 3X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -6X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :
$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$
c'est-à-dire :
$$A = P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}P^{-1},$$
d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 79. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+39 & 26 & 18 & -64 \\ -15 & x-6 & -9 & 30 \\ 0 & 0 & x+3 & 0 \\ 15 & 13 & 9 & x-23 \end{vmatrix} \\
&= (x+3)\begin{vmatrix} x+39 & 26 & -64 \\ -15 & x-6 & 30 \\ 15 & 13 & x-23 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x+3)\begin{vmatrix} x+39 & 26 & -64 \\ 0 & x+7 & x+7 \\ 15 & 13 & x-23 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\
&= (x+3)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+39 & 26 & -64 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & 13 & x-23 \end{vmatrix} \\
&= (x+3)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+39 & 26 & -90 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & 13 & x-36 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= (x+3)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+39 & -90 \\ 15 & x-36 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x+3)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x-6 & -3x+18 \\ 15 & x-36 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-6)\cdot(x+3)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 15 & x-36 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)\cdot(x+3)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 15 & x+9 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-6)\cdot(x+3)\cdot(x+7)\cdot(x+9).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-6)\cdot(X+3)\cdot(X+7)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, -3, 6, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à

$\ker(A-6\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 45x & - & 26\,y & - & 18\,z & + & 64\,t & = 0 \\ & 15x & & & + & 9\,z & - & 30\,t & = 0 \\ & & & & - & 9\,z & & & = 0 \\ - & 15x & - & 13\,y & - & 9\,z & + & 17\,t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} & 15x & & & + & 9\,z & - & 30\,t & = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ - & 45x & - & 26\,y & - & 18\,z & + & 64\,t & = 0 & \\ & & & & - & 9\,z & & & = 0 & \\ - & 15x & - & 13\,y & - & 9\,z & + & 17\,t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 15x & & & + & 9\,z & - & 30\,t = 0 & \\ & - & 26\,y & + & 9\,z & - & 26\,t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & & - & 9\,z & & = 0 & \\ & - & 13\,y & & & - & 13\,t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 15x & & & + & 9\,z & - & 30\,t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 13\,y & & & - & 13\,t = 0 & \\ & & & - & 9\,z & & = 0 & \\ & - & 26\,y & + & 9\,z & - & 26\,t = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 15x & & & + & 9\,z & - & 30\,t = 0 & \\ & - & 13\,y & & & - & 13\,t = 0 & \\ & & & - & 9\,z & & = 0 & \\ & & & & 9\,z & & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 15x & & & + & 9\,z & - & 30\,t = 0 & \\ & - & 13\,y & & & - & 13\,t = 0 & \\ & & & - & 9\,z & & = 0 & \\ & & & & & & 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{5}z + 2t \\ y & = & -t \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2a \\ y & = & -a \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A+9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 6X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 80. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-17 & 8 & 62 & 36 \\ 8 & x-15 & -40 & -16 \\ -8 & 8 & x+33 & 16 \\ 2 & -8 & -14 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-17 & 8 & 62 & 36 \\ 0 & x-7 & x-7 & 0 \\ -8 & 8 & x+33 & 16 \\ 2 & -8 & -14 & x-3 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\
&= (x-7) \begin{vmatrix} x-17 & 8 & 62 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & x+33 & 16 \\ 2 & -8 & -14 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= (x-7) \begin{vmatrix} x-17 & 8 & 54 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & x+25 & 16 \\ 2 & -8 & -6 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= (x-7) \begin{vmatrix} x-17 & 54 & 36 \\ -8 & x+25 & 16 \\ 2 & -6 & x-3 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-7) \begin{vmatrix} x-17 & 54 & 2x+2 \\ -8 & x+25 & 0 \\ 2 & -6 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1) \\
&= (x-7) \cdot (x+1) \begin{vmatrix} x-17 & 54 & 2 \\ -8 & x+25 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-7) \cdot (x+1) \begin{vmatrix} x-21 & 66 & 0 \\ -8 & x+25 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\
&= (x-7) \cdot (x+1) \begin{vmatrix} x-21 & 66 \\ -8 & x+25 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 3^{\text{e}} \text{ colonne}) \\
&= (x-7) \cdot (x+1) \begin{vmatrix} x-21 & 3x+3 \\ -8 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-7) \cdot (x+1)^2 \begin{vmatrix} x-21 & 3 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-7) \cdot (x+1)^2 \begin{vmatrix} x+3 & 0 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-7) \cdot (x+3) \cdot (x+1)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X+3)\cdot(X+1)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,-1,7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10x - 8y - 62z - 36t &=& 0 \\ -8x + 8y + 40z + 16t &=& 0 \\ 8x - 8y - 40z - 16t &=& 0 \\ -2x + 8y + 14z - 4t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x + 8y + 14z - 4t &=& 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -8x + 8y + 40z + 16t &=& 0 \\ 8x - 8y - 40z - 16t &=& 0 \\ 10x - 8y - 62z - 36t &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x + 8y + 14z - 4t &=& 0 \\ -24y - 16z + 32t &=& 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ 24y + 16z - 32t &=& 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \\ 32y + 8z - 56t &=& 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + 5L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x + 8y + 14z - 4t &=& 0 \\ -24y - 16z + 32t &=& 0 \\ 0 &=& 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ -\frac{40}{3}z - \frac{40}{3}t &=& 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{4}{3}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x + 8y + 14z - 4t &=& 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ -24y - 16z + 32t &=& 0 \\ -\frac{40}{3}z - \frac{40}{3}t &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4y + 7z - 2t \\ y &=& -\frac{2}{3}z + \frac{4}{3}t \\ z &=& -t \\ t &=& a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a \\ y &=& 2a \\ z &=& -a \\ t &=& a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & \frac{2}{3} \\ -1 & -4 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 81. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-17 & -18 & -38 \\ -10 & x-7 & -20 \\ 10 & 9 & x+22 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-17 & -18 & -38 \\ 0 & x+2 & x+2 \\ 10 & 9 & x+22 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-17 & -18 & -38 \\ 0 & 1 & 1 \\ 10 & 9 & x+22 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-17 & -18 & -20 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 9 & x+13 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-17 & -20 \\ 10 & x+13 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-7 & x-7 \\ 10 & x+13 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-7 & 0 \\ 10 & x+3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= (x-7)\cdot(x+2)\cdot(x+3).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X+2)\cdot(X+3)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,-2,7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 10x & + & 18y & + & 38z & = & 0 \\ 10x & & & + & 20z & = & 0 \\ -10x & - & 9y & - & 29z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 10x & + & 18y & + & 38z & = & 0 & \\ & - & 18y & - & 18z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & 9y & + & 9z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 10x & + & 18y & + & 38z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 9y & + & 9z & = & 0 & \\ & - & 18y & - & 18z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 10x & + & 18y & + & 38z & = & 0 & \\ & & 9y & + & 9z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{9}{5}y - \frac{19}{5}z \\ y & = & -z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2a \\ y & = & -a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -3X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 82. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+41 & 22 & 16 & -100 \\ -51 & x-32 & -24 & 132 \\ 68 & 44 & x+30 & -164 \\ 17 & 11 & 8 & x-43 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+7 & 0 & 0 & -2x-14 \\ -51 & x-32 & -24 & 132 \\ 68 & 44 & x+30 & -164 \\ 17 & 11 & 8 & x-43 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4) \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -51 & x-32 & -24 & 132 \\ 68 & 44 & x+30 & -164 \\ 17 & 11 & 8 & x-43 \end{vmatrix} \\
&= (x+7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -51 & x-32 & -24 & 30 \\ 68 & 44 & x+30 & -28 \\ 17 & 11 & 8 & x-9 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+7)\begin{vmatrix} x-32 & -24 & 30 \\ 44 & x+30 & -28 \\ 11 & 8 & x-9 \end{vmatrix} && \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+7)\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 3x+3 \\ 44 & x+30 & -28 \\ 11 & 8 & x-9 \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3) \\
&= (x+1)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 44 & x+30 & -28 \\ 11 & 8 & x-9 \end{vmatrix} \\
&= (x+1)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 44 & x+30 & -160 \\ 11 & 8 & x-42 \end{vmatrix} && (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \\
&= (x+1)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+30 & -160 \\ 8 & x-42 \end{vmatrix} && \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+1)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+30 & 4x-40 \\ 8 & x-10 \end{vmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-10)\cdot(x+1)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x+30 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-10)\cdot(x+1)\cdot(x+7)\begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+7).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-2)\cdot(X+1)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 10, 2, -1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} -51x - 22y - 16z + 100t = 0 \\ 51x + 22y + 24z - 132t = 0 \\ -68x - 44y - 40z + 164t = 0 \\ -17x - 11y - 8z + 33t = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -17x - 11y - 8z + 33t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ 51x + 22y + 24z - 132t = 0 \\ -68x - 44y - 40z + 164t = 0 \\ -51x - 22y - 16z + 100t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -17x - 11y - 8z + 33t = 0 \\ -11y - 33t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ -8z + 32t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ 11y + 8z + t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -17x - 11y - 8z + 33t = 0 \\ -11y - 33t = 0 \\ -8z + 32t = 0 \\ 8z - 32t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -17x - 11y - 8z + 33t = 0 \\ -11y - 33t = 0 \\ -8z + 32t = 0 \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = -\frac{11}{17}y - \frac{8}{17}z + \frac{33}{17}t \\ y = -3t \\ z = 4t \\ t = a \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 2a \\ y = -3a \\ z = 4a \\ t = a \end{cases}
\end{aligned}
$$

De là, on déduit : $\ker(A-10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\5\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\-3\\4\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -7X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 3\\ -3 & -3 & -2 & -3\\ 4 & 5 & 4 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 83. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+16 & 9 & 8 & -1\\ -30 & x-22 & -24 & 0\\ 10 & 9 & x+12 & 1\\ 10 & 9 & 8 & x+5\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & -x-6\\ -30 & x-22 & -24 & 0\\ 10 & 9 & x+12 & 1\\ 10 & 9 & 8 & x+5\end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_4)\\
&= (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ -30 & x-22 & -24 & 0\\ 10 & 9 & x+12 & 1\\ 10 & 9 & 8 & x+5\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & x-22 & -24 & -30 \\ 10 & 9 & x+12 & 11 \\ 10 & 9 & 8 & x+15 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \\
&= (x+6)\begin{vmatrix} x-22 & -24 & -30 \\ 9 & x+12 & 11 \\ 9 & 8 & x+15 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+6)\begin{vmatrix} x-4 & x-4 & x-4 \\ 9 & x+12 & 11 \\ 9 & 8 & x+15 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3) \\
&= (x+6)\begin{vmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 9 & x+3 & 2 \\ 9 & -1 & x+6 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{matrix} \\
&= (x-4)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ -1 & x+6 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ colonne)} \\
&= (x-4)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ x+5 & x+6 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\
&= (x-4)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ 0 & x+4 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&= (x-4)\cdot(x+4)\cdot(x+5)\cdot(x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-4)\cdot(X+4)\cdot(X+5)\cdot(X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6, -5, 4, -4\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 4\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -20x & - & 9y & - & 8z & + & t & = & 0 \\ 30x & + & 18y & + & 24z & & & = & 0 \\ -10x & - & 9y & - & 16z & - & t & = & 0 \\ -10x & - & 9y & - & 8z & - & 9t & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 9y & - & 16z & - & t & = & 0 \\ 30x & + & 18y & + & 24z & & & = & 0 \\ -20x & - & 9y & - & 8z & + & t & = & 0 \\ -10x & - & 9y & - & 8z & - & 9t & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 9y & - & 16z & - & t & = & 0 \\ & - & 9y & - & 24z & - & 3t & = & 0 \\ & & 9y & + & 24z & + & 3t & = & 0 \\ & & & & 8z & - & 8t & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{matrix} \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{matrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 9y & - & 16z & - & t & = & 0 \\ & - & 9y & - & 24z & - & 3t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 8z & - & 8t & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ \\ \end{matrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 9y & - & 16z & - & t & = & 0 \\ & - & 9y & - & 24z & - & 3t & = & 0 \\ & & & & 8z & - & 8t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftrightarrow L_3) \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{9}{10}y - \frac{8}{5}z - \frac{1}{10}t \\ y & = & -\frac{8}{3}z - \frac{1}{3}t \\ z & = & t \\ t & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & a \\ y & = & -3a \\ z & = & a \\ t & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A-4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -5X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -6X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-6\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1&1&1&2\\-3&-3&-2&-3\\1&2&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-6\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 84. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix}x-12&-6&-14\\-4&x-8&-8\\4&3&x+3\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}x-12&-6&-14\\0&x-5&x-5\\4&3&x+3\end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3)\\
&= (x-5)\begin{vmatrix}x-12&-6&-14\\0&1&1\\4&3&x+3\end{vmatrix}\\
&= (x-5)\begin{vmatrix}x-12&-6&-8\\0&1&0\\4&3&x\end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2)\\
&= (x-5)\begin{vmatrix}x-12&-8\\4&x\end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne})
\end{aligned}$$

$$= (x-5)\begin{vmatrix} x-8 & x-8 \\ 4 & x \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$
$$= (x-5)\begin{vmatrix} x-8 & 0 \\ 4 & x-4 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$$
$$= (x-8)\cdot(x-5)\cdot(x-4).$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X-5)\cdot(X-4)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8,4,5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 4x & +\ 6y & +\ 14z & = & 0 \\ 4x & & +\ 8z & = & 0 \\ -\ 4x & -\ 3y & -\ 11z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 4x & +\ 6y & +\ 14z & = & 0 & \\ & -\ 6y & -\ 6z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & 3y & +\ 3z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 4x & +\ 6y & +\ 14z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & 3y & +\ 3z & = & 0 & \\ & -\ 6y & -\ 6z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 4x & +\ 6y & +\ 14z & = & 0 & \\ & 3y & +\ 3z & = & 0 & \\ & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z \\ y & = & -z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a \\ y & = & -a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 4\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = 4X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 85. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-26 & -60 & 0 \\ 6 & x+12 & 0 \\ -2 & -6 & x-6 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)\begin{vmatrix} x-26 & -60 \\ 6 & x+12 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ colonne)} \\
&= (x-6)\begin{vmatrix} x-26 & -3x+18 \\ 6 & x-6 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x-6)^2\begin{vmatrix} x-26 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)^2\begin{vmatrix} x-8 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= (x-8)\cdot(x-6)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X-6)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, 6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 18x & + & 60\,y & & & = & 0 \\ -\ 6x & - & 20\,y & & & = & 0 \\ 2x & + & 6\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 6\,y & - & 2\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -\ 6x & - & 20\,y & & & = & 0 & \\ 18x & + & 60\,y & & & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 6\,y & - & 2\,z & = & 0 & \\ & - & 2\,y & - & 6\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & 6\,y & + & 18\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 6\,y & - & 2\,z & = & 0 & \\ & - & 2\,y & - & 6\,z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y + z \\ y & = & -3z \\ z & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 10a \\ y & = & -3a \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière l'autre sous-espace propre, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-8\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}10\\-3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-6\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1)=AX_1=8X_1$, $f_A(X_2)=AX_2=6X_2$ et $f_A(X_3)=AX_3=6X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}10&-3&0\\-3&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A=P\begin{pmatrix}8&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 86. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)&=\begin{vmatrix}x+3&-4&-40&28\\-36&x+1&112&-82\\12&-3&x-45&27\\12&-1&-28&x+16\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}x-45&0&72&-4x-36\\12x-24&0&-28x+84&x^2+17x-66\\-24&0&x+39&-3x-21\\12&-1&-28&x+16\end{vmatrix}\quad\begin{matrix}(L_1\leftarrow L_1-4L_4)\\(L_2\leftarrow L_2-[(-1)\cdot(x+1)]\,L_4)\\(L_3\leftarrow L_3-3L_4)\\ \ \end{matrix}\\
&=-\begin{vmatrix}x-45&72&-4x-36\\12x-24&-28x+84&x^2+17x-66\\-24&x+39&-3x-21\end{vmatrix}\quad(\text{développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne})\\
&=-\begin{vmatrix}x-45&-4x+36&-4x-36\\12x-24&x^2-11x+18&x^2+17x-66\\-24&-2x+18&-3x-21\end{vmatrix}\quad(C_2\leftarrow C_2+C_3)\\
&=-\begin{vmatrix}(x-45)&(-4)\cdot(x-9)&(-4)\cdot(x+9)\\(12)\cdot(x-2)&(x-9)\cdot(x-2)&(x^2+17x-66)\\-1\cdot 2^3\cdot 3&(-2)\cdot(x-9)&(-3)\cdot(x+7)\end{vmatrix}\\
&=(-1)\cdot(x-9)\begin{vmatrix}x-45&-4&-4x-36\\12x-24&x-2&x^2+17x-66\\-24&-2&-3x-21\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (-1)\cdot(x-9)\begin{vmatrix} x+3 & 0 & 2x+6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}x^2+\frac{19}{2}x-45 \\ -24 & -2 & -3x-21 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l}(L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)\right] L_3)\end{array}$$

$$= (-2)\cdot(x-9)\begin{vmatrix} x+3 & 2x+6 \\ 0 & -\frac{1}{2}x^2+\frac{19}{2}x-45 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= (x-10)\cdot(x+3)\cdot(x-9)^2.$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X+3)\cdot(X-9)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, 10, -3\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -13x + 4y + 40z - 28t &=& 0 \\ 36x - 11y - 112z + 82t &=& 0 \\ -12x + 3y + 35z - 27t &=& 0 \\ -12x + y + 28z - 26t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} -12x + 3y + 35z - 27t &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 36x - 11y - 112z + 82t &=& 0 & \\ -13x + 4y + 40z - 28t &=& 0 & \\ -12x + y + 28z - 26t &=& 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -12x + 3y + 35z - 27t &=& 0 & \\ -2y - 7z + t &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ \frac{3}{4}y + \frac{25}{12}z + \frac{5}{4}t &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{13}{12}L_1) \\ -2y - 7z + t &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -12x + 3y + 35z - 27t &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ \frac{3}{4}y + \frac{25}{12}z + \frac{5}{4}t &=& 0 & \\ -2y - 7z + t &=& 0 & \\ -2y - 7z + t &=& 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -12x + 3y + 35z - 27t &=& 0 & \\ \frac{3}{4}y + \frac{25}{12}z + \frac{5}{4}t &=& 0 & \\ -\frac{13}{9}z + \frac{13}{3}t &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{8}{3}L_2) \\ -\frac{13}{9}z + \frac{13}{3}t &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{8}{3}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -12x + 3y + 35z - 27t &=& 0 & \\ \frac{3}{4}y + \frac{25}{12}z + \frac{5}{4}t &=& 0 & \\ -\frac{13}{9}z + \frac{13}{3}t &=& 0 & \\ 0 &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{4}y + \frac{35}{12}z - \frac{9}{4}t \\ y &=& -\frac{25}{9}z - \frac{5}{3}t \\ z &=& 3t \\ t &=& a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4a \\ y &=& -10a \\ z &=& 3a \\ t &=& a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a

$f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 9X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = 9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -10 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 87. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & -7 & -1 & 14 \\ 24 & x+18 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 \\ 12 & 7 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x-3 & -7 & 14 \\ 24 & x+18 & -18 \\ 12 & 7 & x-5 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 3}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x+9 & 0 & x+9 \\ 24 & x+18 & -18 \\ 12 & 7 & x-5 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\
&= (x-2)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 24 & x+18 & -18 \\ 12 & 7 & x-5 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 24 & x+18 & -42 \\ 12 & 7 & x-17 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\
&= (x-2)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x+18 & -42 \\ 7 & x-17 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x-2)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} x-3 & -3x+9 \\ 7 & x-17 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & x-17 \end{vmatrix} \\
&= (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & x+4 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1)
\end{aligned}$$

$$= (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+4)\cdot(x+9).$$

Donc : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-2)\cdot(X+4)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,3,-4,-9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A-3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7y+z-14t &=& 0\\ -24x-21y-2z+18t &=& 0\\ -z &=& 0\\ -12x-7y-z+2t &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -12x-7y-z+2t &=& 0 \quad (L_4\leftrightarrow L_1)\\ -24x-21y-2z+18t &=& 0\\ -z &=& 0\\ 7y+z-14t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -12x-7y-z+2t &=& 0\\ -7y+14t &=& 0 \quad (L_2\leftarrow L_2-2L_1)\\ -z &=& 0\\ 7y+z-14t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -12x-7y-z+2t &=& 0\\ -7y+14t &=& 0\\ -z &=& 0\\ z &=& 0 \quad (L_4\leftarrow L_4+L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -12x-7y-z+2t &=& 0\\ -7y+14t &=& 0\\ -z &=& 0\\ 0 &=& 0 \quad (L_4\leftarrow L_4+L_3)\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{7}{12}y-\frac{1}{12}z+\frac{1}{6}t\\ y &=& 2t\\ z &=& 0\\ t &=& a\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a\\ y &=& 2a\\ z &=& 0\\ t &=& a\end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A-3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+4\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -4X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 88. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+9 & 0 & 0 \\ 34 & x+19 & -54 \\ 17 & 9 & x-26 \end{vmatrix} \\
&= (x+9)\begin{vmatrix} x+19 & -54 \\ 9 & x-26 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\
&= (x+9)\begin{vmatrix} x-8 & -3x+24 \\ 9 & x-26 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-8)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & x-26 \end{vmatrix} \\
&= (x-8)\cdot(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-8)\cdot(x+1)\cdot(x+9).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X+1)\cdot(X+9)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, -1, -9\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rrrl} -17x & & & = 0 \\ -34x & -27y & +54z & = 0 \\ -17x & -9y & +18z & = 0 \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} -17x & & & = 0 & \\ & -27y & +54z & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & -9y & +18z & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} -17x & & & = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & -9y & +18z & = 0 & \\ & -27y & +54z & = 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} -17x & & & = 0 & \\ & -9y & +18z & = 0 & \\ & & 0 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 2z \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2a \\ z &= a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -9X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 89. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-69 & 4 & 64 & -68 \\ 90 & x-15 & -96 & 102 \\ -60 & 3 & x+54 & -66 \\ 15 & -1 & -16 & x+8 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-9 & 0 & 0 & 4x-36 \\ 90 & x-15 & -96 & 102 \\ -60 & 3 & x+54 & -66 \\ 15 & -1 & -16 & x+8 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 4L_4) \\
&= (x-9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 90 & x-15 & -96 & 102 \\ -60 & 3 & x+54 & -66 \\ 15 & -1 & -16 & x+8 \end{vmatrix} \\
&= (x-9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & x-15 & -96 & -258 \\ -60 & 3 & x+54 & 174 \\ 15 & -1 & -16 & x-52 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-9)\begin{vmatrix} x-15 & -96 & -258 \\ 3 & x+54 & 174 \\ -1 & -16 & x-52 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)}\\
&= (x-9)\begin{vmatrix} x-15 & -96 & -258 \\ 0 & x+6 & 3x+18 \\ -1 & -16 & x-52 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3)\\
&= (x-9)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x-15 & -96 & -258 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -16 & x-52 \end{vmatrix}\\
&= (x-9)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x-15 & -96 & 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -16 & x-4 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2)\\
&= (x-9)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x-15 & 30 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}\\
&= (x-9)\cdot(x+6)\begin{vmatrix} x-9 & -6x+54 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2)\\
&= (x+6)\cdot(x-9)^2\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix}\\
&= (x+6)\cdot(x-9)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & x-10 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 6C_1)\\
&= (x-10)\cdot(x+6)\cdot(x-9)^2.
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X+6)\cdot(X-9)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, 10, -6\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
59x & - & 4y & - & 64z & + & 68t & = & 0\\
-90x & + & 5y & + & 96z & - & 102t & = & 0\\
60x & - & 3y & - & 64z & + & 66t & = & 0\\
-15x & + & y & + & 16z & - & 18t & = & 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-15x & + & y & + & 16z & - & 18t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_1)\\
-90x & + & 5y & + & 96z & - & 102t & = & 0\\
60x & - & 3y & - & 64z & + & 66t & = & 0\\
59x & - & 4y & - & 64z & + & 68t & = & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-15x & + & y & + & 16z & - & 18t & = & 0\\
 & - & y & & & + & 6t & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1)\\
 & & y & & & - & 6t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1)\\
 & - & \frac{1}{15}y & - & \frac{16}{15}z & - & \frac{14}{5}t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{59}{15}L_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-15x & + & y & + & 16z & - & 18t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_2)\\
 & - & \frac{1}{15}y & - & \frac{16}{15}z & - & \frac{14}{5}t & = & 0\\
 & & y & & & - & 6t & = & 0\\
 & - & y & & & + & 6t & = & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-15x & + & y & + & 16z & - & 18t & = & 0\\
 & - & \frac{1}{15}y & - & \frac{16}{15}z & - & \frac{14}{5}t & = & 0\\
 & & & - & 16z & - & 48t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 15L_2)\\
 & & & & 16z & + & 48t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 15L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
-15x & + & y & + & 16z & - & 18t & = & 0\\
 & - & \frac{1}{15}y & - & \frac{16}{15}z & - & \frac{14}{5}t & = & 0\\
 & & & - & 16z & - & 48t & = & 0\\
 & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl}
x & = & \frac{1}{15}y + \frac{16}{15}z - \frac{6}{5}t\\
y & = & -16z - 42t\\
z & = & -3t\\
t & = & a
\end{array}\right.
$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -4a \\ y & = & 6a \\ z & = & -3a \\ t & = & a \end{array} \right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \ \ker(A + 6\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \ \ker(A - 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 9X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = 9X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 90. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+37 & 6 & -84 \\ -15 & x-8 & 30 \\ 15 & 3 & x-35 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+37 & 6 & -84 \\ 0 & x-5 & x-5 \\ 15 & 3 & x-35 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\ &= (x-5) \begin{vmatrix} x+37 & 6 & -84 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & x-35 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-5)\begin{vmatrix} x+37 & 6 & -90 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & 3 & x-38 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2)\\
&= (x-5)\begin{vmatrix} x+37 & -90 \\ 15 & x-38 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)}\\
&= (x-5)\begin{vmatrix} x-8 & -3x+24 \\ 15 & x-38 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2)\\
&= (x-8)\cdot(x-5)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 15 & x-38 \end{vmatrix}\\
&= (x-8)\cdot(x-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 15 & x+7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1)\\
&= (x-8)\cdot(x-5)\cdot(x+7).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X-5)\cdot(X+7)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8,-7,5\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcl} -45x - 6y + 84z &=& 0 \\ 15x - 30z &=& 0 \\ -15x - 3y + 27z &=& 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rcll} 15x - 30z &=& 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -45x - 6y + 84z &=& 0 & \\ -15x - 3y + 27z &=& 0 & \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} 15x - 30z &=& 0 & \\ -6y - 6z &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ -3y - 3z &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} 15x - 30z &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ -3y - 3z &=& 0 & \\ -6y - 6z &=& 0 & \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} 15x - 30z &=& 0 & \\ -3y - 3z &=& 0 & \\ 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.\\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2z \\ y &=& -z \\ z &=& a \end{array}\right.\\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2a \\ y &=& -a \\ z &=& a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des

bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 91. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-21 & -20 & -4 & -68 \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & x-1 & 22 \\ 6 & 5 & 1 & x+20 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-21 & -4 & -68 \\ 6 & x-1 & 22 \\ 6 & 1 & x+20 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x+2)\begin{vmatrix} x-21 & -4 & -68 \\ 0 & x-2 & -x+2 \\ 6 & 1 & x+20 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x-21 & -4 & -68 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & x+20 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x-21 & -4 & -72 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & x+21 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x-21 & -72 \\ 6 & x+21 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\begin{vmatrix} x-21 & -3x-9 \\ 6 & x+3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x-21 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-2)\cdot(X+2)\cdot(X+3)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 3, -3, -2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue

$X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} & 18x & + & 20y & + & 4z & + & 68t & = 0 \\ & & - & 5y & & & & & = 0 \\ - & 6x & - & 5y & - & 2z & - & 22t & = 0 \\ - & 6x & - & 5y & - & z & - & 23t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} - & 6x & - & 5y & - & 2z & - & 22t & = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & & - & 5y & & & & & = 0 & \\ & 18x & + & 20y & + & 4z & + & 68t & = 0 & \\ - & 6x & - & 5y & - & z & - & 23t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} - & 6x & - & 5y & - & 2z & - & 22t & = 0 & \\ & & - & 5y & & & & & = 0 & \\ & & & 5y & - & 2z & + & 2t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \\ & & & & & z & - & t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} - & 6x & - & 5y & - & 2z & - & 22t & = 0 & \\ & & - & 5y & & & & & = 0 & \\ & & & & - & 2z & + & 2t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ & & & & & z & - & t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} - & 6x & - & 5y & - & 2z & - & 22t & = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & & - & 5y & & & & & = 0 & \\ & & & & & z & - & t & = 0 & \\ & & & & - & 2z & + & 2t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrll} - & 6x & - & 5y & - & 2z & - & 22t & = 0 & \\ & & - & 5y & & & & & = 0 & \\ & & & & & z & - & t & = 0 & \\ & & & & & & & 0 & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z - \frac{11}{3}t \\ y & = & 0 \\ z & = & t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4a \\ y & = & 0 \\ z & = & a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -3X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 92. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-7 & -6 & 18 \\ 39 & x+17 & -33 \\ 13 & 6 & x-12 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+6 & 0 & x+6 \\ 39 & x+17 & -33 \\ 13 & 6 & x-12 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 39 & x+17 & -33 \\ 13 & 6 & x-12 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 39 & x+17 & -72 \\ 13 & 6 & x-25 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+17 & -72 \\ 6 & x-25 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-7 & -4x+28 \\ 6 & x-25 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-7)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 6 & x-25 \end{vmatrix} \\
&= (x-7)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & x-1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-7)\cdot(x-1)\cdot(x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X-1)\cdot(X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -6, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 6y & - & 18z & = & 0 \\ -39x & - & 24y & + & 33z & = & 0 \\ -13x & - & 6y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -13x & - & 6y & + & 5z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -39x & - & 24y & + & 33z & = & 0 & \\ & & 6y & - & 18z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -13x & - & 6y & + & 5z & = & 0 \\ & - & 6y & + & 18z & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & & 6y & - & 18z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -13x & - & 6y & + & 5z & = & 0 \\ & - & 6y & + & 18z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{6}{13}y + \frac{5}{13}z \\ y & = & 3z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a \\ y & = & 3a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 93. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+56 & 18 & -174 \\ -16 & x-8 & 48 \\ 16 & 6 & x-50 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+56 & 18 & -174 \\ 0 & x-2 & x-2 \\ 16 & 6 & x-50 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$$

$$\begin{aligned}
&= (x-2)\begin{vmatrix} x+56 & 18 & -174 \\ 0 & 1 & 1 \\ 16 & 6 & x-50 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x+56 & 18 & -192 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 6 & x-56 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x+56 & -192 \\ 16 & x-56 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-8 & -4x+32 \\ 16 & x-56 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-8)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 16 & x-56 \end{vmatrix} \\
&= (x-8)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16 & x+8 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-8)\cdot(x-2)\cdot(x+8).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-8)\cdot(X-2)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, -8, 2\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 8\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -64x - 18y + 174z = 0 \\ 16x - 48z = 0 \\ -16x - 6y + 42z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} 16x - 48z = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -64x - 18y + 174z = 0 \\ -16x - 6y + 42z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 16x - 48z = 0 \\ -18y - 18z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ -6y - 6z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 16x - 48z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ -6y - 6z = 0 \\ -18y - 18z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 16x - 48z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3z \\ y = -z \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3a \\ y = -a \\ z = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 94. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-28 & -3 & -66 \\ -36 & x-13 & -120 \\ 9 & 1 & x+21 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 3x-3 \\ -36 & x-13 & -120 \\ 9 & 1 & x+21 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3) \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -36 & x-13 & -120 \\ 9 & 1 & x+21 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -36 & x-13 & -12 \\ 9 & 1 & x-6 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} x-13 & -12 \\ 1 & x-6 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} x-13 & -3x+27 \\ 1 & x-9 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-13 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-10 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= (x-10)\cdot(x-9)\cdot(x-1).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-10)\cdot(X-9)\cdot(X-1)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, 10, 1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique :

on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 10\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 18x & + & 3\,y & + & 66\,z & = & 0 \\ 36x & + & 3\,y & + & 120\,z & = & 0 \\ -\;9x & - & y & - & 31\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\;9x & - & y & - & 31\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 36x & + & 3\,y & + & 120\,z & = & 0 & \\ 18x & + & 3\,y & + & 66\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\;9x & - & y & - & 31\,z & = & 0 & \\ & - & y & - & 4\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & & y & + & 4\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\;9x & - & y & - & 31\,z & = & 0 & \\ & - & y & - & 4\,z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{9}y - \frac{31}{9}z \\ y & = & -4z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3a \\ y & = & -4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 9X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 95. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-24 & -28 & -8 & -232 \\ -32 & x-21 & -8 & -236 \\ -24 & -21 & x-4 & -192 \\ 8 & 7 & 2 & x+66 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-24 & -28 & -8 & -232 \\ -32 & x-21 & -8 & -236 \\ 0 & 0 & x+2 & 3x+6 \\ 8 & 7 & 2 & x+66 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_4) \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-24 & -28 & -8 & -232 \\ -32 & x-21 & -8 & -236 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & x+66 \end{vmatrix} \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-24 & -28 & -8 & -208 \\ -32 & x-21 & -8 & -212 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & x+60 \end{vmatrix} \quad (C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3) \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-24 & -28 & -208 \\ -32 & x-21 & -212 \\ 8 & 7 & x+60 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 3^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x+8 & 0 & 4x+32 \\ -32 & x-21 & -212 \\ 8 & 7 & x+60 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3) \\
&= (x+2)\cdot(x+8) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -32 & x-21 & -212 \\ 8 & 7 & x+60 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\cdot(x+8) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -32 & x-21 & -84 \\ 8 & 7 & x+28 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1) \\
&= (x+2)\cdot(x+8) \begin{vmatrix} x-21 & -84 \\ 7 & x+28 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+2)\cdot(x+8) \begin{vmatrix} x-21 & -3x-21 \\ 7 & x+7 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\
&= (x+2)\cdot(x+7)\cdot(x+8) \begin{vmatrix} x-21 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)\cdot(x+7)\cdot(x+8) \begin{vmatrix} x & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2) \\
&= x\cdot(x+2)\cdot(x+7)\cdot(x+8).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = X\cdot(X+2)\cdot(X+7)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -7, -2, -8\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 24x &+& 28y &+& 8z &+& 232t &=& 0 \\ 32x &+& 21y &+& 8z &+& 236t &=& 0 \\ 24x &+& 21y &+& 4z &+& 192t &=& 0 \\ -\ 8x &-& 7y &-& 2z &-& 66t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -\ 8x &-& 7y &-& 2z &-& 66t &=& 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ 32x &+& 21y &+& 8z &+& 236t &=& 0 & \\ 24x &+& 21y &+& 4z &+& 192t &=& 0 & \\ 24x &+& 28y &+& 8z &+& 232t &=& 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} - & 8x & - & 7y & - & 2z & - & 66t & = 0 \\ & & - & 7y & & & - & 28t & = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ & & & & - & 2z & - & 6t & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \\ & & & 7y & + & 2z & + & 34t & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} - & 8x & - & 7y & - & 2z & - & 66t & = 0 \\ & & - & 7y & & & - & 28t & = 0 \\ & & & & - & 2z & - & 6t & = 0 \\ & & & & & 2z & + & 6t & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} - & 8x & - & 7y & - & 2z & - & 66t & = 0 \\ & & - & 7y & & & - & 28t & = 0 \\ & & & & - & 2z & - & 6t & = 0 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{8}y - \frac{1}{4}z - \frac{33}{4}t \\ y & = & -4t \\ z & = & -3t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4a \\ y & = & -4a \\ z & = & -3a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 7\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 8\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 0$, $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -7X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -8X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -3 \\ -4 & -4 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 96. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+21 & 60 & -260 & 300 \\ 20 & x+49 & -224 & 252 \\ 4 & 12 & x-51 & 60 \\ -2 & -4 & 20 & x-21 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -5x-5 & 0 \\ 20 & x+49 & -224 & 252 \\ 4 & 12 & x-51 & 60 \\ -2 & -4 & 20 & x-21 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3) \\
&= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 20 & x+49 & -224 & 252 \\ 4 & 12 & x-51 & 60 \\ -2 & -4 & 20 & x-21 \end{vmatrix} \\
&= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & x+49 & -124 & 252 \\ 4 & 12 & x-31 & 60 \\ -2 & -4 & 10 & x-21 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1) \\
&= (x+1) \begin{vmatrix} x+49 & -124 & 252 \\ 12 & x-31 & 60 \\ -4 & 10 & x-21 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+1) \begin{vmatrix} x+49 & -124 & 252 \\ 0 & x-1 & 3x-3 \\ -4 & 10 & x-21 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3) \\
&= (x-1)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x+49 & -124 & 252 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & 10 & x-21 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x+49 & -124 & 624 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & x-51 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2) \\
&= (x-1)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x+49 & 624 \\ -4 & x-51 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne}) \\
&= (x-1)\cdot(x+1) \begin{vmatrix} x+1 & 12x+12 \\ -4 & x-51 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 12L_2) \\
&= (x-1)\cdot(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ -4 & x-51 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - 12C_1) \\
&= (x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)^2.
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-1)\cdot(X+1)^2$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 3, -1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -24x & - & 60y & + & 260z & - & 300t & = & 0 \\ -20x & - & 52y & + & 224z & - & 252t & = & 0 \\ -4x & - & 12y & + & 48z & - & 60t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 20z & + & 18t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 4y & - & 20z & + & 18t & = & 0 \quad (L_4 \leftrightarrow L_1) \\ -20x & - & 52y & + & 224z & - & 252t & = & 0 \\ -4x & - & 12y & + & 48z & - & 60t & = & 0 \\ -24x & - & 60y & + & 260z & - & 300t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 4\,y & - & 20\,z & + & 18\,t & = & 0 & \\ & - & 12\,y & + & 24\,z & - & 72\,t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1) \\ & - & 4\,y & + & 8\,z & - & 24\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\ & - & 12\,y & + & 20\,z & - & 84\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 12L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 4\,y & - & 20\,z & + & 18\,t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 4\,y & + & 8\,z & - & 24\,t & = & 0 & \\ & - & 12\,y & + & 24\,z & - & 72\,t & = & 0 & \\ & - & 12\,y & + & 20\,z & - & 84\,t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 4\,y & - & 20\,z & + & 18\,t & = & 0 & \\ & - & 4\,y & + & 8\,z & - & 24\,t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \\ & & & - & 4\,z & - & 12\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 4\,y & - & 20\,z & + & 18\,t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \\ & - & 4\,y & + & 8\,z & - & 24\,t & = & 0 & \\ & & & - & 4\,z & - & 12\,t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y + 10z - 9t \\ y & = & 2z - 6t \\ z & = & -3t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -15a \\ y & = & -12a \\ z & = & -3a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -15 \\ -12 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -15 \\ -12 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -15 & -10 & \frac{7}{3} & 0 \\ -12 & -10 & 0 & -\frac{7}{4} \\ -3 & -2 & \frac{4}{3} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 97. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-17 & -14 & -8 & -16 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & x+7 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-17 & -8 & -16 \\ 0 & x-5 & 0 \\ 8 & 4 & x+7 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-5)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x-17 & -16 \\ 8 & x+7 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-5)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x-9 & x-9 \\ 8 & x+7 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= (x-5)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} x-9 & 0 \\ 8 & x-1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-5)\cdot(x-2)\cdot(x-1).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-9)\cdot(X-5)\cdot(X-2)\cdot(X-1)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{9, 2, 5, 1\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 9\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 8x & +\,14y & +\,8z & +\,16t & = 0 \\ & -\,7y & & & = 0 \\ & & -\,4z & & = 0 \\ -\,8x & -\,7y & -\,4z & -\,16t & = 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} 8x & +\,14y & +\,8z & +\,16t & = 0 \\ & -\,7y & & & = 0 \\ & & -\,4z & & = 0 \\ & 7y & +\,4z & & = 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} 8x & +\,14y & +\,8z & +\,16t & = 0 \\ & -\,7y & & & = 0 \\ & & -\,4z & & = 0 \\ & & 4z & & = 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} 8x & +\,14y & +\,8z & +\,16t & = 0 \\ & -\,7y & & & = 0 \\ & & -\,4z & & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3)$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{4}y - z - 2t \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 9\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 5\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 9X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 5X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = 2X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 98. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-16 & -12 & -4 & -42 \\ -26 & x-9 & -4 & -56 \\ 26 & 12 & x+3 & 64 \\ 13 & 6 & 2 & x+31 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & x-3 & x-3 & x-3 \\ -26 & x-9 & -4 & -56 \\ 26 & 12 & x+3 & 64 \\ 13 & 6 & 2 & x+31 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4) \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & x+17 & 22 & -30 \\ 26 & -14 & x-23 & 38 \\ 13 & -7 & -11 & x+18 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \end{matrix} \\
&= (x-3) \begin{vmatrix} x+17 & 22 & -30 \\ -14 & x-23 & 38 \\ -7 & -11 & x+18 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}) \\
&= (x-3) \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 2x+6 \\ -14 & x-23 & 38 \\ -7 & -11 & x+18 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3) \\
&= (x-3) \cdot (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -14 & x-23 & 38 \\ -7 & -11 & x+18 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-3)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & x-23 & 66 \\ -7 & -11 & x+32 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1)\\
&= (x-3)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x-23 & 66 \\ -11 & x+32 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)}\\
&= (x-3)\cdot(x+3)\begin{vmatrix} x+10 & -3x-30 \\ -11 & x+32 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2)\\
&= (x-3)\cdot(x+3)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -11 & x+32 \end{vmatrix}\\
&= (x-3)\cdot(x+3)\cdot(x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -11 & x-1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1)\\
&= (x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+10).
\end{aligned}
$$

Donc : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-1)\cdot(X+3)\cdot(X+10)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 3, -3, -10\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 3\mathrm{I}_4)$ si et seulement si :

$$
\left\{\begin{array}{rrrrl}
13x & +\ 12y & +\ 4z & +\ 42t & = 0 \\
26x & +\ 6y & +\ 4z & +\ 56t & = 0 \\
-\ 26x & -\ 12y & -\ 6z & -\ 64t & = 0 \\
-\ 13x & -\ 6y & -\ 2z & -\ 34t & = 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrll}
13x & +\ 12y & +\ 4z & +\ 42t & = 0 & \\
 & -\ 18y & -\ 4z & -\ 28t & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\
 & 12y & +\ 2z & +\ 20t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\
 & 6y & +\ 2z & +\ 8t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrll}
13x & +\ 12y & +\ 4z & +\ 42t & = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\
 & 6y & +\ 2z & +\ 8t & = 0 & \\
 & 12y & +\ 2z & +\ 20t & = 0 & \\
 & -\ 18y & -\ 4z & -\ 28t & = 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrll}
13x & +\ 12y & +\ 4z & +\ 42t & = 0 & \\
 & 6y & +\ 2z & +\ 8t & = 0 & \\
 & & -\ 2z & +\ 4t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\
 & & 2z & -\ 4t & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrll}
13x & +\ 12y & +\ 4z & +\ 42t & = 0 & \\
 & 6y & +\ 2z & +\ 8t & = 0 & \\
 & & -\ 2z & +\ 4t & = 0 & \\
 & & & 0 & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \exists a \in \mathbb{R},\
\left\{\begin{array}{rcl}
x & = & -\frac{12}{13}y - \frac{4}{13}z - \frac{42}{13}t \\
y & = & -\frac{1}{3}z - \frac{4}{3}t \\
z & = & 2t \\
t & = & a
\end{array}\right.
\iff \exists a \in \mathbb{R},\
\left\{\begin{array}{rcl}
x & = & -2a \\
y & = & -2a \\
z & = & 2a \\
t & = & a
\end{array}\right.
$$

De là, on déduit : $\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$
\ker(A - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 10\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Notons X_1, X_2, X_3 et X_4 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans

cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$, $f_A(X_3) = AX_3 = -3X_3$ et $f_A(X_4) = AX_4 = -10X_4$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 99. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+32 & 16 & -110 \\ 26 & x+17 & -100 \\ 13 & 8 & x-49 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+6 & 0 & -2x-12 \\ 26 & x+17 & -100 \\ 13 & 8 & x-49 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 26 & x+17 & -100 \\ 13 & 8 & x-49 \end{vmatrix} \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 26 & x+17 & -48 \\ 13 & 8 & x-23 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x+17 & -48 \\ 8 & x-23 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ ligne}) \\
&= (x+6) \begin{vmatrix} x-7 & -3x+21 \\ 8 & x-23 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= (x-7)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & x-23 \end{vmatrix} \\
&= (x-7)\cdot(x+6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & x+1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\
&= (x-7)\cdot(x+1)\cdot(x+6).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-7)\cdot(X+1)\cdot(X+6)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6,-1,7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 7\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 39x & - & 16\,y & + & 110\,z & = & 0 \\ - & 26x & - & 24\,y & + & 100\,z & = & 0 \\ - & 13x & - & 8\,y & + & 42\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & 13x & - & 8\,y & + & 42\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ - & 26x & - & 24\,y & + & 100\,z & = & 0 & \\ - & 39x & - & 16\,y & + & 110\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & 13x & - & 8\,y & + & 42\,z & = & 0 & \\ & & - & 8\,y & + & 16\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & 8\,y & - & 16\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & 13x & - & 8\,y & + & 42\,z & = & 0 & \\ & & - & 8\,y & + & 16\,z & = & 0 & \\ & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{8}{13}y + \frac{42}{13}z \\ y & = & 2z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2a \\ y & = & 2a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \ker(A + 6\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -6X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.

Corrigé 100. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 11

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+59 & 6 & -204 \\ 0 & x-7 & 0 \\ 17 & 2 & x-60 \end{vmatrix} \\
&= (x-7) \begin{vmatrix} x+59 & -204 \\ 17 & x-60 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 2}^{\text{e}}\text{ ligne)} \\
&= (x-7) \begin{vmatrix} x-9 & -4x+36 \\ 17 & x-60 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2) \\
&= (x-9)\cdot(x-7) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 17 & x-60 \end{vmatrix} \\
&= (x-9)\cdot(x-7) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 17 & x+8 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\
&= (x-9)\cdot(x-7)\cdot(x+8).
\end{aligned}$$

Donc : $\chi_A = (X-9)\cdot(X-7)\cdot(X+8)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, 9, 7\}$. On détermine alors les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Nous ne détaillons la résolution que pour un sous-espace propre, la méthode étant tout à fait classique : on utilise la méthode du pivot de Gauß. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors X appartient à $\ker(A - 9\mathrm{I}_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rrrrrrr} - & 68x & - & 6\,y & + & 204\,z & = 0 \\ & & - & 2\,y & & & = 0 \\ - & 17x & - & 2\,y & + & 51\,z & = 0 \end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 17x & - & 2\,y & + & 51\,z & = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & & - & 2\,y & & & = 0 & \\ - & 68x & - & 6\,y & + & 204\,z & = 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 17x & - & 2\,y & + & 51\,z & = 0 & \\ & & - & 2\,y & & & = 0 & \\ & & & 2\,y & & & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 17x & - & 2\,y & + & 51\,z & = 0 & \\ & & - & 2\,y & & & = 0 & \\ & & & & & 0 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2}{17}y + 3z \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière les autres sous-espaces propres, et on trouve en conclusion :

$$\ker(A - 9\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + 8\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs qui engendrent les sous-espaces propres ci-dessus, dans cet ordre. Alors la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est obtenue en concaténant des

bases des sous-espaces propres de A, qui sont en somme directe. Si l'on note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, la résolution ci-dessus montre qu'on a $f_A(X_1) = AX_1 = 9X_1$, $f_A(X_2) = AX_2 = 7X_2$ et $f_A(X_3) = AX_3 = -8X_3$, donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, en appliquant la formule du changement de base à f_A, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}),$$

c'est-à-dire :

$$A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où le résultat, en notant D la matrice diagonale de cette égalité : on a diagonalisé A.