Développements asymptotiques à l'ordre 3

Comment effectuer un développement asymptotique à l'ordre 3. L'occasion de prendre conscience d'une difficulté à laquelle prêter attention, lorsque vous faites des développements limités : quand vous composez les développements limités de deux fonctions, poussez le second développement à un ordre suffisamment élevé.

Remarque sur les corrigés. Pour progresser en faisant ces exercices et en lisant les corrigés, vous devez vous interroger sur l'ordre choisi pour chacun des développements limités. Bien que l'énoncé demande systématiquement un développement à l'ordre 3, parfois le corrigé se contente de développements à l'ordre 2, parfois à l'ordre 1, etc. Pourquoi n'est-il pas toujours nécessaire de pousser tous les développements à l'ordre 3 ? Ce n'est bien sûr pas laissé au hasard et cela doit alimenter votre réflexion.

Exercice 1. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 11

$$\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-4}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 2. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 11

$$\frac{5}{n}-\frac{7}{n+3}+\frac{1}{2\,(n-1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 3. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 11

$$\frac{1}{3\,n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{14\,(n-3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 4. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 11

$$e^{\left(6\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 5. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 12

$$-\frac{1}{n}-\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n-1}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 6. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 12

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{3\,(n+3)}-\frac{2}{n-4}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 7. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 12

$$\frac{1}{\left(\frac{\sinh(x)}{x}+\arctan(x)\right)^{\frac{11}{6}}}=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 8. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 13

$$\ln\left(\arctan(x)-\sinh(x)+1\right)=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 9. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 13

$$\ln\left(-\arctan(x)+\cosh(x)\right)=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 10. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 14

$$\ln\left(-4\,\arctan(x)+\ln(x+1)+1\right) = a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 11. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 14

$$\sqrt{-11\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 12. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 14

$$-\frac{1}{6\,n}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n-1} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 13. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 15

$$\frac{1}{e^x-\sinh(x)} = a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 14. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 15

$$-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{6}{n-1} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 15. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 15

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{8\,(n+1)}+\frac{1}{n-4} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 16. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 16

$$\frac{5}{n}-\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n-3} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 17. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 16

$$\sinh\left(\frac{6\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+8\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 18. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 16

$$\frac{1}{\sqrt{x\cos(x)+2\,\sinh(x)+1}} = a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 19. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 17

$$-\frac{1}{n}+\frac{7}{2\,(n+1)}+\frac{4}{5\,(n-2)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 20. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 17

$$-\frac{2}{n}-\frac{2}{n+4}+\frac{1}{n-4} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 21. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 17

$$\sinh\left(-\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+4\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 22. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 18

$$-\frac{1}{2\,n}+\frac{1}{3\,(n+3)}-\frac{1}{n-4}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 23. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 18

$$-\frac{1}{\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-3\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-1}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 24. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 19

$$\frac{1}{4\,n}-\frac{10}{n+4}-\frac{1}{n-1}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 25. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 19

$$\ln\left(x\cosh\left(x\right)+\sin\left(x\right)+1\right)=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 26. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 19

$$\ln\left(\cos\left(x\right)+5\,\ln\left(x+1\right)\right)=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 27. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 20

$$\frac{1}{3\,n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{24\,(n-1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 28. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 20

$$\frac{1}{n}+\frac{304}{5\,(n+2)}-\frac{2}{n-2}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 29. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 20

$$\cosh\left(-x\cos\left(x\right)-\sin\left(x\right)\right)=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 30. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 21

$$\frac{1}{\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)-18\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 31. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 21

$$e^{(\sin(x)-\sinh(x))}=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 32. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 22

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{138\,(n-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 33. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 22

$$e^{\left(-\frac{2\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\right)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 34. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 22

$$\ln\left(-13\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 35. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 23

$$\frac{1}{\ln(x+1) + \sinh(x) + 1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 36. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 23

$$e^{\left(\frac{14\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 37. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 24

$$-\frac{1}{n} - \frac{2}{27\,(n+3)} + \frac{3}{n-1} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 38. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 24

$$\frac{1}{n} - \frac{3}{n+2} + \frac{2}{n-1} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 39. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 24

$$\frac{13}{n} - \frac{2}{3\,(n+4)} - \frac{1}{3\,(n-3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 40. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 25

$$\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{27}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 41. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 25

$$\frac{50}{n} + \frac{3}{2\,(n+1)} - \frac{1}{n-4} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 42. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 25

$$\ln\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + \frac{5\,e^{\frac{1}{n}}}{n}\right) = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 43. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 26

$$-\frac{2}{n}+\frac{1}{30\,(n+4)}+\frac{3}{2\,(n-1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 44. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 26

$$\frac{1}{n}+\frac{4}{n+4}-\frac{2}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 45. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 26

$$\frac{1}{n}+\frac{11}{2\,(n+1)}-\frac{42}{n-4}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 46. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 26

$$-\frac{1}{8\,n}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 47. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 27

$$\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 48. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 27

$$-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n-2}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 49. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 27

$$-\frac{1}{3\,n}-\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2\,(n-2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 50. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 28

$$\cosh\left(-x\cosh\left(x\right)-2\,\sin\left(x\right)\right)=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 51. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 28

$$\frac{1}{\frac{2\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+e^{\frac{1}{n}}}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 52. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 29

$$\frac{1}{\left(\frac{\arctan(x)}{x}-9\,\sin\left(x\right)\right)^2}=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 53. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 29

$$-\frac{1}{6\,n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 54. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 29

$$-\frac{1}{n}+\frac{5}{4\,(n+4)}+\frac{4}{n-4}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 55. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 30

$$-\frac{3}{2\,n}-\frac{1}{n+1}+\frac{5}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 56. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 30

$$\cosh\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)-2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 57. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 30

$$\frac{5}{3\,n}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{2\,(n-1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 58. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 30

$$\frac{1}{\left(\frac{\arctan(x)}{x}+10\,\sinh(x)\right)^{\frac{3}{4}}}=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 59. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 31

$$\frac{1}{\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+5\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)^2}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 60. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 32

$$\frac{1}{\left(-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)^{\frac{2}{89}}}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 61. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 32

$$-\frac{3}{2\,n}+\frac{1}{6\,(n+3)}-\frac{1}{n-1}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 62. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 32

$$\frac{3}{n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 63. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 33

$$\frac{1}{n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)-2\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 64. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 33

$$\frac{1}{\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-6\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{3}}}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 65. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 34

$$\frac{1}{7\,n}-\frac{2}{21\,(n+2)}-\frac{1}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 66. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 34

$$\ln\left(-2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 67. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 34

$$-\frac{4}{n}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{7\,(n-4)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 68. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 35

$$-\frac{1}{196\,x\cosh(x)-\frac{\sin(x)}{x}}=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 69. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 35

$$\cosh\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 70. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 35

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 71. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 36

$$\ln\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 72. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 36

$$\frac{1}{2\,n}+\frac{1}{n+3}+\frac{8}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 73. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 36

$$\frac{1}{\left(-\frac{4\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right)^{\frac{5}{2}}}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 74. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 37

$$\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{11}}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 75. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 38

$$\frac{16}{n}+\frac{1}{2\,(n+2)}-\frac{2}{5\,(n-1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 76. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 38

$$-\frac{6}{n}-\frac{1}{8\,(n+4)}+\frac{1}{6\,(n-2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 77. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 38

$$-\frac{5}{3\,n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n-2}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 78. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 38

$$\ln\left(63\,\ln\left(x+1\right)+\sinh\left(x\right)+1\right)=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 79. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 39

$$\frac{1}{42\,n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2\,(n-2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 80. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 39

$$\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{7}}=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 81. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 39

$$\frac{2}{n}-\frac{1}{7\,(n+2)}-\frac{1}{n-1}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 82. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 40

$$\cos\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 83. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 40

$$\frac{1}{\left(\cosh\left(x\right)-10\,\ln\left(x+1\right)\right)^{\frac{1}{6}}}=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 84. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 41

$$\frac{3}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n-3}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 85. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 41

$$-\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,(n+4)}+\frac{1}{5\,(n-2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 86. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 41

$$e^{\left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 87. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 42

$$-\frac{1}{15\,n} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n-2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 88. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 42

$$\frac{1}{\left(x\cosh\left(x\right) + \ln\left(x+1\right) + 1\right)^{\frac{1}{4}}} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 89. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 42

$$\left(-\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{3}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 90. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 43

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{4\left(n+4\right)} - \frac{1}{n-3} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 91. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 43

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{18\left(n+4\right)} + \frac{19}{n-3} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 92. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 43

$$\frac{1}{21\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cosh\left(\frac{1}{n}\right)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 93. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 44

$$\sinh\left(-\frac{4\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\right) = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 94. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 44

$$\frac{1}{8\,n} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n-2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 95. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 45

$$\frac{1}{n} - \frac{7}{n+2} + \frac{6}{n-4} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 96. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 45

$$\frac{1}{20\,n}+\frac{1}{7\,(n+2)}+\frac{1}{4\,(n-3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 97. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 45

$$\ln\left(e^{\frac{1}{n}}+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 98. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 46

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-5\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 99. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 46

$$\frac{1}{x\cosh(x)+e^{x}}=a+bx+cx^2+dx^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 100. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 47

$$\arctan\left(\frac{3\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Corrigé 1. On écrit : ← page 1
$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$
et de même : $\frac{1}{n-4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{1}{n}$ et $x=\frac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :
$$\begin{aligned}\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-4}&=\frac{2}{n}+1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{17}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 2. On écrit : ← page 1
$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$
et de même : $\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{3}{n}$ et $x=\frac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :
$$\begin{aligned}\frac{5}{n}-\frac{7}{n+3}+\frac{1}{2\,(n-1)}&=\frac{5}{n}-7\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=-\frac{3}{2\,n}+\frac{43}{2\,n^2}-\frac{125}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 3. On écrit : ← page 1
$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$
et de même : $\frac{1}{n-3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{1}{n}$ et $x=\frac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :
$$\begin{aligned}\frac{1}{3\,n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{14\,(n-3)}&=\frac{1}{3\,n}+1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{14}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{59}{42\,n}-\frac{11}{14\,n^2}+\frac{23}{14\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 4. On a : ← page 1
$$\sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad \ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$
On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to0$), et on obtient :
$$\begin{aligned}\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+6\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)&=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{13}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$
En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto e^x$ en 0 à l'ordre 3 :
$$e^x=1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&e^{\left(6\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&= 1+\left(\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{13}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{7}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1+\left(\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{13}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{49}{n^2}-\frac{42}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{343}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1+\frac{7}{n}+\frac{43}{2\,n^2}+\frac{115}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 5. On écrit : ← page 1

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{3}{n}$ et $x=\dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}-\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n-1}&=-\frac{1}{n}-3\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}-\frac{26}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 6. On écrit : ← page 1

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{3}{n}$ et $x=\dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}+\frac{1}{3\,(n+3)}-\frac{2}{n-4}&=\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-2\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{2}{3\,n}-\frac{9}{n^2}-\frac{29}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 7. On a : ← page 1

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad \sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\arctan(x)+\frac{\sinh(x)}{x}&=\left(x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(1+\frac{1}{6}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&=1+x+\frac{1}{6}\,x^2-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\dfrac{1}{(x+1)^{\frac{11}{6}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{11}{6}}}=1-\frac{11}{6}\,x+\frac{187}{72}\,x^2-\frac{4301}{1296}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(\frac{\sinh(x)}{x}+\arctan(x)\right)^{\frac{11}{6}}}\\
&=1-\frac{11}{6}\left(x+\frac{1}{6}\,x^2-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{187}{72}\left(x+\frac{1}{6}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2-\frac{4301}{1296}\left(x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=1-\frac{11}{6}\left(x+\frac{1}{6}\,x^2-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{187}{72}\left(x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{4301}{1296}\left(x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=1-\frac{11}{6}\,x+\frac{55}{24}\,x^2-\frac{2387}{1296}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. On a : ← page 1

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\qquad \text{et :}\qquad \sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\arctan(x)-\sinh(x)&=\left(x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\left(x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&=-\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\ln(x+1)=x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\arctan(x)-\sinh(x)+1\right)\\
&=\left(-\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=\left(-\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=-\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 9. On a : ← page 1

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\qquad \text{et :}\qquad \cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\arctan(x)+\cosh(x)&=-\left(x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&=1-x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(-\arctan(x)+\cosh(x)\right)\\
&=\left(-x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-x+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=\left(-x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{3}\left(-x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=-x+\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. On a : ← page 2

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}-4\arctan(x) + \ln(x+1) + 1 &= -4\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 1 - 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\ln(-4\arctan(x) + \ln(x+1) + 1)\\ &= \left(-3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-3x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-3x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= \left(-3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(9x^2 + 3x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{3}\left(-27x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= -3x - 5x^2 - \frac{53}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 11. On a : ← page 2

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}-11\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) &= -11\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{11}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{11}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\sqrt{-11\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{11}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{11}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{11}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{11}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{121}{n^2} + \frac{11}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{16}\left(-\frac{1331}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 - \frac{11}{2n} - \frac{123}{8n^2} - \frac{3971}{48n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 12. On écrit : ← page 2

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{4}{n}$ et $x = \dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6\,n} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n-1} &= -\frac{1}{6\,n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{11}{6\,n} - \frac{3}{n^2} + \frac{17}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 13. On a : ← page 2

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\sinh(x) + e^x &= -\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{e^x - \sinh(x)}\\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 14. On écrit : ← page 2

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{2}{n}$ et $x = \dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{6}{n-1} &= -\frac{1}{n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{10}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 15. On écrit : ← page 2

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{1}{n}$ et $x=\dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}+\frac{1}{8\,(n+1)}+\frac{1}{n-4} &= \frac{1}{n}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{17}{8\,n}+\frac{31}{8\,n^2}+\frac{129}{8\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 16. On écrit : ← page 2

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{3}{n}$ et $x=\dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{5}{n}-\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n-3} &= \frac{5}{n}-3\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{3}{n}+\frac{12}{n^2}-\frac{18}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 17. On a : ← page 2

$$\cosh(x) = 1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad \sin(x) = x-\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}6\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+8\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= 6\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+8\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{14}{n}+\frac{5}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\sinh(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sinh(x) = x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\sinh\left(\frac{6\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+8\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \left(\frac{14}{n}+\frac{5}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{14}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \left(\frac{14}{n}+\frac{5}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{2744}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{14}{n}+\frac{459}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 18. On a : ← page 2

$$\sinh(x) = x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad x\cos(x) = x-\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2\sinh(x) + x\cos(x) &= 2\left(x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(x - \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 3\,x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{5}{16}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{x\cos(x) + 2\,\sinh(x) + 1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(3\,x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{3}{8}\left(3\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \frac{5}{16}\left(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(3\,x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{3}{8}\left(9\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{5}{16}\left(27\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\ &= 1 - \frac{3}{2}\,x + \frac{27}{8}\,x^2 - \frac{401}{48}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 19. On écrit : ← page 2

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-2} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{1}{n}$ et $x = \dfrac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} + \frac{7}{2\,(n+1)} + \frac{4}{5\,(n-2)} &= -\frac{1}{n} + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{33}{10\,n} - \frac{19}{10\,n^2} + \frac{67}{10\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 20. On écrit : ← page 2

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{4}{n}$ et $x = \dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{n} - \frac{2}{n+4} + \frac{1}{n-4} &= -\frac{2}{n} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{3}{n} + \frac{12}{n^2} - \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 21. On a : ← page 3

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad x\cos(x) = x - \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}4\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} &= 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{11}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \sinh(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\sinh\left(-\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + 4\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)\\ &= \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{11}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{11}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{27}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{19}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 22. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{3}{n}$ et $x = \frac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,(n+3)} - \frac{1}{n-4} &= -\frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= -\frac{7}{6\,n} - \frac{5}{n^2} - \frac{13}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 23. On a : ← page 3

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - 3\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= -\frac{2}{n} + \frac{3}{2\,n^2} - \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-3\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-1}\\
&=1+\left(-\frac{2}{n}+\frac{3}{2\,n^2}-\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(-\frac{2}{n}+\frac{3}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\left(-\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1+\left(-\frac{2}{n}+\frac{3}{2\,n^2}-\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(\frac{4}{n^2}-\frac{6}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(-\frac{8}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1-\frac{2}{n}+\frac{11}{2\,n^2}-\frac{29}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}
$$

d'où le résultat.

Corrigé 24. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{4}{n}$ et $x=\frac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4\,n}-\frac{10}{n+4}-\frac{1}{n-1}&=\frac{1}{4\,n}-10\left(\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{43}{4\,n}+\frac{39}{n^2}-\frac{161}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}
$$

Corrigé 25. On a : ← page 3

$$\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right),\qquad\text{et :}\qquad\sin(x)=x-\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$
\begin{aligned}
x\cosh(x)+\sin(x)+1&=\left(x+\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(1+x-\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&=1+2\,x+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}
$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$
\begin{aligned}
&\ln(x\cosh(x)+\sin(x)+1)\\
&=\left(2\,x+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(2\,x+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)^2+\frac{1}{3}\left(2\,x+\underset{x\to0}{o}\left(x\right)\right)^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\\
&=\left(2\,x+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(4\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{3}\left(8\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\\
&=2\,x-2\,x^2+3\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}
$$

d'où le résultat.

Corrigé 26. On a : ← page 3

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad\cos(x)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$5\ln(x+1)+\cos(x) = 5\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(1-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)$$
$$= 1+5x-3x^2+\frac{5}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\ln(\cos(x)+5\ln(x+1))\\ &= \left(5x-3x^2+\frac{5}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(5x-3x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2+\frac{1}{3}\left(5x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= \left(5x-3x^2+\frac{5}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(25x^2-30x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{3}\left(125x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= 5x-\frac{31}{2}x^2+\frac{175}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 27. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{2}{n}$ et $x=\frac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\frac{1}{3n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{24(n-1)} = \frac{1}{3n}-1\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= -\frac{17}{24n}+\frac{47}{24n^2}-\frac{97}{24n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Corrigé 28. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{2}{n}$ et $x=\frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\frac{1}{n}+\frac{304}{5(n+2)}-\frac{2}{n-2} = \frac{1}{n}+\frac{304}{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-2\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= \frac{299}{5n}-\frac{628}{5n^2}+\frac{1176}{5n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Corrigé 29. On a : ← page 3

$$\cos(x) = 1+\underset{x\to 0}{o}(x), \quad \text{et :} \quad \sin(x) = x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On en déduit :

$$-x\cos(x)-\sin(x) = -\left(x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)-\left(x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)$$
$$= -2x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \cosh(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\cosh(-x\cos(x) - \sin(x)) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-2\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(4\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 + 2\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 30. On a : ← page 3

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-18\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + n\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= -18\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{18}{n} - \frac{1}{6\,n^2} - \frac{3}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^3} = 1 - 3\,x + 6\,x^2 - 10\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 18\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3} \\
&= 1 - 3\left(-\frac{18}{n} - \frac{1}{6\,n^2} - \frac{3}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 6\left(-\frac{18}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - 10\left(-\frac{18}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 - 3\left(-\frac{18}{n} - \frac{1}{6\,n^2} - \frac{3}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 6\left(\frac{324}{n^2} + \frac{6}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 10\left(-\frac{5832}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \frac{54}{n} + \frac{3889}{2\,n^2} + \frac{58365}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 31. On a : ← page 3

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \sinh(x) = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sinh(x) &= \left(x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \left(x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= -\frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto e^x$ en 0 à l'ordre 1 :

$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&e^{(\sin(x)-\sinh(x))}\\
&=1+\left(-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=1+\left(-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=1-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 32. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{3}{n}$ et $x=\dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{138\,(n-4)}&=\frac{1}{n}-1\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{138}\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{1}{138\,n}+\frac{205}{69\,n^2}-\frac{629}{69\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 33. On a : ← page 4

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),\qquad\text{et :}\qquad x\cosh(x)=x+\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}-2\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}&=-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto e^x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&e^{\left(-\frac{2\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\right)}\\
&=1+\left(-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{3}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1+\left(-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{n^2}+\frac{6}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{27}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1-\frac{3}{n}+\frac{7}{2\,n^2}-\frac{3}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. On a : ← page 4

$$\sin(x)=x-\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad \ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 13\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) &= -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 13\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -\frac{14}{n} + \frac{13}{2\,n^2} - \frac{25}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(-13\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) \\
&= \left(-\frac{14}{n} + \frac{13}{2\,n^2} - \frac{25}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{14}{n} + \frac{13}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{14}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \left(-\frac{14}{n} + \frac{13}{2\,n^2} - \frac{25}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{196}{n^2} - \frac{182}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{2744}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{14}{n} - \frac{183}{2\,n^2} - \frac{4967}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 35. On a : ← page 4

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sinh(x) + \ln(x+1) + 1 &= \left(x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 + x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= 1 + 2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\ln(x+1) + \sinh(x) + 1} \\
&= 1 - \left(2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \left(2\,x + \underset{x\to0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 - \left(2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(4\,x^2 - 2\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) - \left(8\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 - 2\,x + \frac{9}{2}\,x^2 - \frac{21}{2}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 36. On a : ← page 4

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad \sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
14\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= 14\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{15}{n} + \frac{14}{n^2} + \frac{41}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto e^x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&e^{\left(\frac{14\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= 1 + \left(\frac{15}{n} + \frac{14}{n^2} + \frac{41}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{n} + \frac{14}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{15}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \left(\frac{15}{n} + \frac{14}{n^2} + \frac{41}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{225}{n^2} + \frac{420}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3375}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \frac{15}{n} + \frac{253}{2\,n^2} + \frac{2338}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 37. On écrit : ← page 4

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{3}{n}$ et $x = \dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} - \frac{2}{27\,(n+3)} + \frac{3}{n-1} &= -\frac{1}{n} - \frac{2}{27}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 3\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{52}{27\,n} + \frac{29}{9\,n^2} + \frac{7}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 38. On écrit : ← page 4

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{2}{n}$ et $x = \dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} - \frac{3}{n+2} + \frac{2}{n-1} &= \frac{1}{n} - 3\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{8}{n^2} - \frac{10}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 39. On écrit : ← page 4

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{4}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{13}{n} - \frac{2}{3\,(n+4)} - \frac{1}{3\,(n-3)} &= \frac{13}{n} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{12}{n} + \frac{5}{3\,n^2} - \frac{41}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 40. On a :
← page 4

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned} 2\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) &= 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} - \frac{1}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \frac{1}{12\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto (x+1)^{\frac{2}{27}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$(x+1)^{\frac{2}{27}} = 1 + \frac{2}{27}x - \frac{25}{729}x^2 + \frac{1300}{59049}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} &\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{27}} \\ &= 1 + \frac{2}{27}\left(\frac{3}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \frac{1}{12\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{25}{729}\left(\frac{3}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1300}{59049}\left(\frac{3}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\\ &= 1 + \frac{2}{27}\left(\frac{3}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \frac{1}{12\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{25}{729}\left(\frac{9}{4\,n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1300}{59049}\left(\frac{27}{8\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{9\,n} - \frac{17}{324\,n^2} + \frac{101}{2187\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 41. On écrit :
← page 4

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{1}{n}$ et $x = \frac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{50}{n} + \frac{3}{2\,(n+1)} - \frac{1}{n-4} &= \frac{50}{n} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{101}{2\,n} - \frac{11}{2\,n^2} - \frac{29}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 42. On a :
← page 4

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \quad \text{et :} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned} 5\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) &= 5\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} - \frac{1}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{9}{2\,n} + \frac{16}{3\,n^2} + \frac{9}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\frac{5\,e^{\frac{1}{n}}}{n}\right)\\
&=\left(\frac{9}{2\,n}+\frac{16}{3\,n^2}+\frac{9}{4\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2\,n}+\frac{16}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=\left(\frac{9}{2\,n}+\frac{16}{3\,n^2}+\frac{9}{4\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{81}{4\,n^2}+\frac{48}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{729}{8\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=\frac{9}{2\,n}-\frac{115}{24\,n^2}+\frac{69}{8\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 43. On écrit : ← page 5

$$\frac{1}{n+4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{4}{n}$ et $x=\dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{n}+\frac{1}{30\,(n+4)}+\frac{3}{2\,(n-1)}&=-\frac{2}{n}+\frac{1}{30}\left(\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{7}{15\,n}+\frac{41}{30\,n^2}+\frac{61}{30\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 44. On écrit : ← page 5

$$\frac{1}{n+4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{4}{n}$ et $x=\dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}+\frac{4}{n+4}-\frac{2}{n-3}&=\frac{1}{n}+4\left(\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-2\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=\frac{3}{n}-\frac{22}{n^2}+\frac{46}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 45. On écrit : ← page 5

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{1}{n}$ et $x=\dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}+\frac{11}{2\,(n+1)}-\frac{42}{n-4}&=\frac{1}{n}+\frac{11}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-42\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{71}{2\,n}-\frac{347}{2\,n^2}-\frac{1333}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 46. On écrit : ← page 5

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{2}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\,n} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-3} &= -\frac{1}{8\,n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{8\,n} - \frac{5}{n^2} - \frac{5}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 47. On a : ← page 5

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned} -\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \cosh\left(\frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{3}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$(x+1)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} &\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{5}{81}\left(-\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{5}{81}\left(-\frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3\,n} + \frac{1}{18\,n^2} - \frac{1}{162\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 48. On écrit : ← page 5

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-2} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{2}{n}$ et $x = \dfrac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n-2} &= -\frac{1}{n} - 1\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 49. On écrit : ← page 5

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{1}{n}$ et $x = \frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3\,n} - \frac{1}{n+1} + \frac{3}{2\,(n-2)} &= -\frac{1}{3\,n} - 1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{6\,n} + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 50. On a : ← page 5

$$\cosh(x) = 1 + \underset{x\to0}{o}(x), \qquad \text{et :} \qquad \sin(x) = x + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}-x\cosh(x) - 2\sin(x) &= -\left(x + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right) - 2\left(x + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)\\ &= -3\,x + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \cosh(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\cosh\left(-x\cosh(x) - 2\,\sin(x)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-3\,x + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(9\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\\ &= 1 + \frac{9}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 51. On a : ← page 5

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}2\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + e^{\frac{1}{n}} &= 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \frac{7}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\frac{2\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + e^{\frac{1}{n}}}\\ &= 1 - \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \frac{7}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \left(\frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 - \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \frac{7}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(\frac{9}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{27}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 - \frac{3}{n} + \frac{17}{2\,n^2} - \frac{151}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 52. On a : ← page 5

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad \arctan(x) = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} -9\sin(x) + \frac{\arctan(x)}{x} &= -9\left(x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 1 - 9\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left(\frac{\arctan(x)}{x} - 9\,\sin(x)\right)^2} \\ &= 1 - 2\left(-9\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + 3\left(-9\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - 4\left(-9\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\ &= 1 - 2\left(-9\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + 3\left(81\,x^2 + 6\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - 4\left(-729\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\ &= 1 + 18\,x + \frac{731}{3}\,x^2 + 2931\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. On écrit : ← page 5

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{2}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6\,n} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-3} &= -\frac{1}{6\,n} - 1\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{13}{6\,n} - \frac{1}{n^2} - \frac{13}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 54. On écrit : ← page 6

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{4}{n}$ et $x = \dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} + \frac{5}{4\,(n+4)} + \frac{4}{n-4} &= -\frac{1}{n} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 4\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{17}{4\,n} + \frac{11}{n^2} + \frac{84}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 55. On écrit : ← page 6

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{1}{n}$ et $x=\dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{3}{2\,n}-\frac{1}{n+1}+\frac{5}{n-3} &= -\frac{3}{2\,n} - 1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+5\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{5}{2\,n}+\frac{16}{n^2}+\frac{44}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 56. On a : ← page 6

$$\sin(x) = x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),\qquad \text{et :}\qquad \sinh(x) = x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{n}\right)-2\sinh\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-2\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\cosh(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\cosh(x) = 1+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\cosh\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)-2\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 57. On écrit : ← page 6

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{3}{n}$ et $x=\dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{5}{3\,n}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{2\,(n-1)} &= \frac{5}{3\,n}+1\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{13}{6\,n}-\frac{7}{2\,n^2}+\frac{17}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 58. On a : ← page 6

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad \arctan(x) = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}10\sinh(x) + \frac{\arctan(x)}{x} &= 10\left(x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 1 + 10\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{5}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^{\frac{3}{4}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{4}}} = 1 - \frac{3}{4}\,x + \frac{21}{32}\,x^2 - \frac{77}{128}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(\frac{\arctan(x)}{x} + 10\,\sinh(x)\right)^{\frac{3}{4}}}\\ &= 1 - \frac{3}{4}\left(10\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{5}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{21}{32}\left(10\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \frac{77}{128}\left(10\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= 1 - \frac{3}{4}\left(10\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{5}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{21}{32}\left(100\,x^2 - \frac{20}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{77}{128}\left(1000\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= 1 - \frac{15}{2}\,x + \frac{527}{8}\,x^2 - \frac{9715}{16}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 59. On a : ← page 6

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad x\cosh(x) = x + \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}5\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} &= 5\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{6}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + 5\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^2}\\ &= 1 - 2\left(\frac{6}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 3\left(\frac{6}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - 4\left(\frac{6}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 - 2\left(\frac{6}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 3\left(\frac{36}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 4\left(\frac{216}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 - \frac{12}{n} + \frac{108}{n^2} - \frac{2590}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 60. On a : ← page 6

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned} -\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1 &= -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{89}}}$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{89}}} = 1 - \frac{2}{89}x + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left(-\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^{\frac{2}{89}}} \\ &= 1 - \frac{2}{89}\left(\frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{89}\left(\frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{267\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 61. On écrit : ← page 6

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{3}{n}$ et $x = \frac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2\,n} + \frac{1}{6\,(n+3)} - \frac{1}{n-1} &= -\frac{3}{2\,n} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{7}{3\,n} - \frac{3}{2\,n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 62. On écrit : ← page 6

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{2}{n}$ et $x = \frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{3}{n} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2} &= \frac{3}{n} - 1\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{8}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 63. On a : ← page 6

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}-2\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + n\sinh\left(\frac{1}{n}\right) &= -2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{6\,n^2} + \frac{2}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n\sinh\left(\frac{1}{n}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}\\ &= 1 - \left(-\frac{2}{n} + \frac{1}{6\,n^2} + \frac{2}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(-\frac{2}{n} + \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \left(-\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 - \left(-\frac{2}{n} + \frac{1}{6\,n^2} + \frac{2}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(\frac{4}{n^2} - \frac{2}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(-\frac{8}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 + \frac{2}{n} + \frac{23}{6\,n^2} + \frac{20}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 64. On a : ← page 6

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}-6\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) &= -6\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} - \frac{1}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{13}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \frac{7}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}x^2 - \frac{40}{81}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - 6\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{3}}}\\ &= 1 - \frac{2}{3}\left(-\frac{13}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \frac{7}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{5}{9}\left(-\frac{13}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{40}{81}\left(-\frac{13}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right.\\ &= 1 - \frac{2}{3}\left(-\frac{13}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \frac{7}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{5}{9}\left(\frac{169}{4\,n^2} - \frac{13}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{40}{81}\left(-\frac{2197}{8\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right.\\ &= 1 + \frac{13}{3\,n} + \frac{93}{4\,n^2} + \frac{21391}{162\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 65. On écrit : ← page 7

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{2}{n}$ et $x=\dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{7\,n}-\frac{2}{21\,(n+2)}-\frac{1}{n-3}&=\frac{1}{7\,n}-\frac{2}{21}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=-\frac{20}{21\,n}-\frac{59}{21\,n^2}-\frac{197}{21\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 66. On a : ← page 7

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad\sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n}\to0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}-2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+1&=-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=1-\frac{1}{n}+\frac{5}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\ln\left(-2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)\\&=\left(-\frac{1}{n}+\frac{5}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\&=\left(-\frac{1}{n}+\frac{5}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\&=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. On écrit : ← page 7

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{3}{n}$ et $x=\dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{4}{n}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{7\,(n-4)}&=-\frac{4}{n}+1\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=-\frac{22}{7\,n}-\frac{25}{7\,n^2}+\frac{47}{7\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 68. On a :

← page 7

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad \sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
-196x\cosh(x) + \frac{\sin(x)}{x} &= -196\left(x + \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= 1 - 196\,x - \frac{1}{6}\,x^2 - 98\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{196\,x\cosh(x) - \frac{\sin(x)}{x}} \\
&= 1 - \left(-196\,x - \frac{1}{6}\,x^2 - 98\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(-196\,x - \frac{1}{6}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \left(-196\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 - \left(-196\,x - \frac{1}{6}\,x^2 - 98\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(38416\,x^2 + \frac{196}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \left(-7529536\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 + 196\,x + \frac{230497}{6}\,x^2 + \frac{22589098}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 69. On a :

← page 7

$$\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) &= -\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \cosh(x)$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\cosh(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\cosh\left(\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) - \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. On écrit :

← page 7

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{4}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n-3} &= \frac{1}{n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{7}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 71. On a : ← page 7

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \quad \text{et :} \quad \cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \cosh\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\ln\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{2}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 72. On écrit : ← page 7

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{3}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\,n} + \frac{1}{n+3} + \frac{8}{n-3} &= \frac{1}{2\,n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 8\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{19}{2\,n} + \frac{21}{n^2} + \frac{81}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 73. On a : ← page 7

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-4\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1 &= -4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 1 - \frac{3}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{7}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} = 1 - \frac{5}{2}\,x + \frac{35}{8}\,x^2 - \frac{105}{16}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(-\frac{4\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1\right)^{\frac{5}{2}}}\\
&= 1 - \frac{5}{2}\left(-\frac{3}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{7}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{35}{8}\left(-\frac{3}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{105}{16}\left(-\frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 - \frac{5}{2}\left(-\frac{3}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{7}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{35}{8}\left(\frac{9}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{105}{16}\left(-\frac{27}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 + \frac{15}{2\,n} + \frac{325}{8\,n^2} + \frac{8855}{48\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 74. On a : ← page 7

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad \sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-4\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + n\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= -4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 1 - \frac{4}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \frac{4}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{11}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$(x+1)^{\frac{1}{11}} = 1 + \frac{1}{11}\,x - \frac{5}{121}\,x^2 + \frac{35}{1331}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 4\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{11}}\\
&= 1 + \frac{1}{11}\left(-\frac{4}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \frac{4}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{5}{121}\left(-\frac{4}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{35}{1331}\left(-\frac{4}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 + \frac{1}{11}\left(-\frac{4}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \frac{4}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{5}{121}\left(\frac{16}{n^2} + \frac{4}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{35}{1331}\left(-\frac{64}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 - \frac{4}{11\,n} - \frac{491}{726\,n^2} - \frac{2152}{1331\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 75. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{2}{n}$ et $x=\dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{16}{n}+\frac{1}{2\,(n+2)}-\frac{2}{5\,(n-1)}&=\frac{16}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{161}{10\,n}-\frac{7}{5\,n^2}+\frac{8}{5\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 76. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{4}{n}$ et $x=\dfrac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{6}{n}-\frac{1}{8\,(n+4)}+\frac{1}{6\,(n-2)}&=-\frac{6}{n}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=-\frac{143}{24\,n}+\frac{5}{6\,n^2}-\frac{4}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 77. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{1}{n}$ et $x=\dfrac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{5}{3\,n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n-2}&=-\frac{5}{3\,n}+1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-3\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=-\frac{11}{3\,n}-\frac{7}{n^2}-\frac{11}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 78. On a : ← page 8

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad\sinh(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}63\ln(x+1)+\sinh(x)+1&=63\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(1+x+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)\\&=1+64\,x-\frac{63}{2}x^2+\frac{127}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(63\,\ln(x+1)+\sinh(x)+1\right)\\
&=\left(64\,x-\frac{63}{2}\,x^2+\frac{127}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(64\,x-\frac{63}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2+\frac{1}{3}\left(64\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=\left(64\,x-\frac{63}{2}\,x^2+\frac{127}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{2}\left(4096\,x^2-4032\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{3}\left(262144\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&=64\,x-\frac{4159}{2}\,x^2+\frac{178837}{2}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 79. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{1}{n}$ et $x=\dfrac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{42\,n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2\,(n-2)}&=\frac{1}{42\,n}+1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=\frac{11}{21\,n}-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 80. On a : ← page 8

$$\sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)&=-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(1+\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}-\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto(x+1)^{\frac{1}{7}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$(x+1)^{\frac{1}{7}}=1+\frac{1}{7}\,x-\frac{3}{49}\,x^2+\frac{13}{343}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{7}}\\
&=1+\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}-\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{3}{49}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\frac{13}{343}\left(-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1+\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}-\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{3}{49}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{13}{343}\left(-\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1-\frac{1}{7\,n}+\frac{1}{98\,n^2}-\frac{1}{2058\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 81. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{2}{n}$ et $x = \dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} - \frac{1}{7\,(n+2)} - \frac{1}{n-1} &= \frac{2}{n} - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{6}{7\,n} - \frac{5}{7\,n^2} - \frac{11}{7\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 82. On a : ← page 8

$$\sin(x) = x + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right), \quad \text{et :} \quad x\cosh(x) = x + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}-\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} &= -\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\cos(x) = 1 + \underset{x\to0}{o}(x),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 83. On a : ← page 8

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}-10\ln(x+1) + \cosh(x) &= -10\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 1 - 10\,x + \frac{11}{2}\,x^2 - \frac{10}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^{\frac{1}{6}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{6}}} = 1 - \frac{1}{6}\,x + \frac{7}{72}\,x^2 - \frac{91}{1296}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\cosh(x) - 10\ln(x+1))^{\frac{1}{6}}}\\
&= 1 - \frac{1}{6}\left(-10\,x + \frac{11}{2}\,x^2 - \frac{10}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{7}{72}\left(-10\,x + \frac{11}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \frac{91}{1296}\left(-10\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1 - \frac{1}{6}\left(-10\,x + \frac{11}{2}\,x^2 - \frac{10}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{7}{72}\left(100\,x^2 - 110\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{91}{1296}\left(-1000\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1 + \frac{5}{3}\,x + \frac{317}{36}\,x^2 + \frac{19465}{324}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 84. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{1}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n-3} &= \frac{3}{n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{19}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 85. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-2} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{4}{n}$ et $x = \dfrac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+4)} + \frac{1}{5(n-2)} &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -\frac{3}{10\,n} - \frac{8}{5\,n^2} + \frac{44}{5\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 86. On a : ← page 9

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \quad \text{et :} \quad \sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -\frac{2}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto e^x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$e^{\left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$
$$= 1 + \left(-\frac{2}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$= 1 + \left(-\frac{2}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{8}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$= 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 87. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{4}{n}$ et $x = \frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$-\frac{1}{15\,n} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n-2} = -\frac{1}{15\,n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{15\,n} - \frac{6}{n^2} + \frac{12}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Corrigé 88. On a : ← page 9

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right), \quad \text{et :} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$x\cosh(x) + \ln(x+1) + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 + x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)$$
$$= 1 + 2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}} = 1 - \frac{1}{4}\,x + \frac{5}{32}\,x^2 - \frac{15}{128}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\frac{1}{(x\cosh(x) + \ln(x+1) + 1)^{\frac{1}{4}}}$$
$$= 1 - \frac{1}{4}\left(2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{5}{32}\left(2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \frac{15}{128}\left(2\,x + \underset{x\to0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{4}\left(2\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{5}{32}\left(4\,x^2 - 2\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{15}{128}\left(8\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{4}\,x^2 - \frac{35}{24}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. On a : ← page 9

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et}: \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto (x+1)^{\frac{2}{3}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$(x+1)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\left(-\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{3}}\\
&= 1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{4}{81}\left(-\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{4}{81}\left(-\frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 - \frac{2}{3\,n} - \frac{4}{9\,n^2} + \frac{5}{81\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 90. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{4}{n}$ et $x = \frac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} + \frac{1}{4\,(n+4)} - \frac{1}{n-3} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4\,n} - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 91. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{4}{n}$ et $x = \frac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} + \frac{1}{18\,(n+4)} + \frac{19}{n-3} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 19\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{361}{18\,n} + \frac{511}{9\,n^2} + \frac{1547}{9\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 92. On a : ← page 9

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad \cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
21\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cosh\left(\frac{1}{n}\right) &= 21\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 1 + \frac{21}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{7}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{21\ \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cosh\left(\frac{1}{n}\right)}\\
&= 1 - \left(\frac{21}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{7}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(\frac{21}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \left(\frac{21}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 - \left(\frac{21}{n} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{7}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(\frac{441}{n^2} + \frac{21}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{9261}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 - \frac{21}{n} + \frac{881}{2\,n^2} - \frac{9233}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. On a : ← page 9

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \qquad \text{et :} \qquad x\cosh(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} - 4\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} &= -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{5}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \sinh(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\sinh\left(-\frac{4\ \cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\right)\\
&= \left(-\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{5}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{5}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= \left(-\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{5}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{125}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= -\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{70}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 94. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{3}{n}$ et $x=\frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\,n}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n-2}&=\frac{1}{8\,n}-1\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{1}{8\,n}+\frac{5}{n^2}-\frac{5}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 95. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{2}{n}$ et $x=\frac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}-\frac{7}{n+2}+\frac{6}{n-4}&=\frac{1}{n}-7\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+6\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{38}{n^2}+\frac{68}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 96. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{2}{n}$ et $x=\frac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{20\,n}+\frac{1}{7\,(n+2)}+\frac{1}{4\,(n-3)}&=\frac{1}{20\,n}+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{31}{70\,n}+\frac{13}{28\,n^2}+\frac{79}{28\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 97. On a : ← page 10

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et : }\quad e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+e^{\frac{1}{n}}&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(e^{\frac{1}{n}}+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)\\
&=\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{8}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{19}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 98. On a : ← page 10

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et :}\qquad\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-5\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\arctan\left(\frac{1}{n}\right)&=-5\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{4}{n}+\frac{5}{2\,n^2}-\frac{2}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\sin(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sin(x)=x-\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-5\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)\\
&=\left(-\frac{4}{n}+\frac{5}{2\,n^2}-\frac{2}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{6}\left(-\frac{4}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=\left(-\frac{4}{n}+\frac{5}{2\,n^2}-\frac{2}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{6}\left(-\frac{64}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=-\frac{4}{n}+\frac{5}{2\,n^2}+\frac{26}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 99. On a : ← page 10

$$\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right),\qquad\text{et :}\qquad e^x=1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
x\cosh(x)+e^x&=\left(x+\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&=1+2\,x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{2}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2-x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x\cosh(x)+e^x}\\
&= 1-\left(2\,x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{2}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(2\,x+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2-\left(2\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1-\left(2\,x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{2}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(4\,x^2+2\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\left(8\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1-2\,x+\frac{7}{2}\,x^2-\frac{20}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 100. On a : ← page 10

$$\cos(x)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),\qquad \text{et :}\qquad \sin(x)=x-\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
3\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= 3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{4}{n}-\frac{5}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\arctan(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\arctan\left(\frac{3\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \left(\frac{4}{n}-\frac{5}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= \left(\frac{4}{n}-\frac{5}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{64}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= \frac{4}{n}-\frac{23}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.