Développements limités, asymptotiques, équivalents, limites

Divers exercices dont l'objectif est de tester l'aisance dans le maniement des relations de comparaison : choisir le bon ordre d'un développement limité ou asymptotique, directement prendre un équivalent quand c'est possible (et quand ce n'est pas possible de le faire directement, y parvenir après un développement limité), lever une forme indéterminée, etc.

Remarque sur la programmation des corrigés. L'ordre des développements limités et asymptotiques est parfois un cran plus loin que nécessaire, à cause de défauts de programmation.

Exercice 1. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 10

$$u_n = \left(\frac{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + e^{\frac{1}{n}}\right)^{-2n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 10

$$f(x) = \cos\left(\frac{-x^2-1}{x^4-x^3-3x^2-x-3}\right) \times \frac{-2x^3+x^2+1}{-2x}.$$

Exercice 3. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 11

$$f(x) = \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\cosh(3x)-1)} \times \frac{\ln(\ln(3x+1)+1)}{\ln(\sinh(x)+1)},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 4. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : → page 11

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = \frac{6}{n} - \frac{3}{4}n\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{11}{18}n\ln\left(\frac{3}{n}+1\right) - \frac{13}{12}e^{\frac{3}{n}}.$$

Exercice 5. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de : → page 11

$$g(x) = \frac{-3x^2e^{x}\ln(x+1)^2 + x^2e^{(2x)}\ln(x+1) - x\ln(x+1)^3}{-5x^4e^{(-x)}\ln(x) + x\ln(x)^4 + 2x^2\ln(x)^2 + x^3 + x^2\ln(x)}.$$

Exercice 6. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de : → page 12

$$g(x) = \frac{-x^3\ln(x+1)^3 - x^2e^{(2x)}\ln(x+1)^2 - 2x\ln(x+1)^4 - 12e^{(3x)}\ln(x+1)^3}{-6x^4\ln(x)^2 + 6x\ln(x)^4 + xe^{(-2x)} - xe^{(-5x)}}.$$

Exercice 7. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : → page 12

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = -\frac{1}{8n} + \frac{1}{92}n\sinh\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{7}{184}\sinh\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{1}{46}n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right).$$

Exercice 8. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(8x)-\sinh(9x)}{\ln(x+1)}$. → page 12

Exercice 9. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 13

$$\ln\left(\frac{28e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 10. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 13

$$\frac{1}{n} - \frac{5}{2\,(n+3)} - \frac{2}{n-3} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 11. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 13

$$\frac{3}{n} - \frac{1}{n+3} - \frac{7}{5\,(n-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 12. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 14

$$\frac{1}{(2\,xe^{x} + \ln(x+1) + 1)^{\frac{9}{2}}} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 13. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{5}\arctan(x)\right) - 1} + \frac{50}{9\,x^2}\right)$. → page 14

Exercice 14. Donner un équivalent simple, quand $x\to+\infty$, de : → page 14

$$g(x) = \frac{x^2 e^{(3\,x)}\ln(x+1) - 2\,x^2 e^{(4\,x)} - 5\,xe^{(3\,x)}}{-x^5 + x^2\ln(x) - xe^{(-x)}\ln(x) + 2\,e^{(-2\,x)}\ln(x)}.$$

Exercice 15. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n\to+\infty$, de : → page 15

$$\sqrt{n^2+10} - \sqrt[3]{n^3-1},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 16. Déterminer la limite, quand $n\to+\infty$, de : → page 15

$$u_n = \left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - \frac{3\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)^{-n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n\to+\infty$.

Exercice 17. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 16

$$\ln\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 18. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x\to 0$, de : → page 16

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(2\,x))}{\ln(\cosh(3\,x) - 1)} \times \frac{\ln(\ln(3\,x+1)+1)}{\ln(\cosh(3\,x))},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x\to 0^+$.

Exercice 19. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 16

$$\frac{1}{31\,\sin(x) + \sinh(x) + 1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 20. Donner un équivalent simple, quand $x\to+\infty$, de : → page 17

$$g(x) = \frac{-11\,x^2 e^{x}\ln(x+1)^2 - x^3 e^{x} - 2\,x^2\ln(x+1) - \ln(x+1)^2}{-x^3 e^{(-2\,x)} + 5\,x^2 e^{(-4\,x)} - x\ln(x)^2 - 4\,x}.$$

Exercice 21. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de :

→ page 17

$$g(x) = \frac{-11\,x^4 e^{(2\,x)} - x^2 \ln{(x+1)}^2 - 14\,x e^{(3\,x)}}{x^6 + e^{(-x)} \ln{(x)}^4 + 2\,x^3 e^{(-3\,x)} - x e^{(-x)} \ln{(x)}}.$$

Exercice 22. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de :

→ page 17

$$f(x) = \frac{\ln{(\sinh{(4\,x)})}}{\ln{(\cosh{(3\,x)} - 1)}} \times \frac{\ln{(\sin{(x)} + 1)}}{\ln{(\cos{(2\,x)})}},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 23. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de :

→ page 18

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 4\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 24. Déterminer des réels a, b, c et d tels que :

→ page 18

$$e^{(2\,x \cos(x) - 3\,\ln(x+1))} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 25. Déterminer des réels a, b et c tels que :

→ page 19

$$-\frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4\,(n-3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 26. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de :

→ page 19

$$\sqrt[3]{n^3 - 1} - \sqrt[3]{n^3 - 3\,n^2 - n + 2},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 27. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$, définie par :

→ page 19

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -\frac{1}{7\,n} - 3\,\cosh\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{65}{63}\,n \sin\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{2}{63}\,n \ln\left(\frac{3}{n} + 1\right).$$

Exercice 28. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de :

→ page 20

$$f(x) = \arctan\left(\frac{-x^4 + 30\,x^3 - x^2 + 2\,x + 3}{x^4 - x^3 + 584\,x^2 + 3\,x}\right) \times \frac{9\,x^4 + x^2 - 3\,x}{3\,x^3 + 6\,x^2 + 3}.$$

Exercice 29. Déterminer des réels a, b et c tels que :

→ page 20

$$-\frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,(n+2)} - \frac{1}{8\,(n-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 30. Déterminer des réels a, b et c tels que :

→ page 20

$$-\frac{1}{4\,n} - \frac{2}{n+4} - \frac{1}{n-2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 31. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de :

→ page 21

$$u_n = \left(n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{5\, e^{\frac{1}{n}}}{n} \right)^n.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 32. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 21

$$\frac{1}{\left(-\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1\right)^{\frac{3}{2}}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 33. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : → page 22

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\, n \arctan\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{1}{2}\, e^{\frac{2}{n}} + \frac{2}{3}\, \ln\left(\frac{3}{n}+1\right).$$

Exercice 34. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de : → page 22

$$\sqrt[3]{n^{18} + 4\, n^9} - \sqrt{n^{12} + n^8 + 22\, n^4},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 35. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 22

$$-\frac{4}{n} + \frac{11}{n+2} + \frac{5}{2\,(n-2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 36. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 23

$$f(x) = \sin\left(\frac{-x^2 - x - 3}{-x+3}\right) \times \frac{x^4 + x^3 + x^2 - x}{x - 102}.$$

Exercice 37. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de : → page 23

$$g(x) = \frac{-2\, x^5 \ln(x+1) + x^2 e^{(2\,x)} \ln(x+1)^2 + e^x \ln(x+1) + 2\, e^{(6\,x)}}{4\, x^2 e^{(-4\,x)} + x e^{(-3\,x)} \ln(x) + 13\, e^{(-2\,x)} \ln(x)^2}.$$

Exercice 38. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 23

$$f(x) = \arctan\left(\frac{9\, x^3 + 19\, x^2 + 6\, x + 1}{-2\, x + 353}\right) \times \frac{-x^3 + 6\, x^2 + x - 1}{x - 1}.$$

Exercice 39. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 24

$$-\frac{1}{2\,n} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2\,(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 40. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(5\,x) - \cosh(3\,x)}{\sinh(x)}$. → page 24

Exercice 41. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{6\,x} + \frac{1}{\tan(3\,\sin(2\,x))}\right)$. → page 24

Exercice 42. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 25

$$f(x) = \frac{\ln\left(\sinh\left(2\,x\right)\right)}{\ln\left(-\cos\left(4\,x\right)+1\right)} \times \frac{\ln\left(\sinh\left(3\,x\right)+1\right)}{\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 43. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 25

$$f(x) = \frac{\ln\left(\sinh\left(3\,x\right)\right)}{\ln\left(\sin\left(4\,x\right)\right)} \times \frac{\ln\left(\ln\left(3\,x+1\right)+1\right)}{\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 44. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(6\,x\right)-\sin\left(3\,x\right)}{\arctan\left(3\,x\right)}$. → page 25

Exercice 45. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de : → page 25

$$g(x) = \frac{-x^3 e^{(3\,x)} - x^3 \ln\left(x+1\right) + x e^{(2\,x)} \ln\left(x+1\right)^2 - 3\,\ln\left(x+1\right)^3}{-e^{(-x)} \ln\left(x\right)^5 + x \ln\left(x\right)^3 + 11\,x e^{(-5\,x)}}.$$

Exercice 46. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh\left(9\,x\right)-\cosh\left(2\,x\right)}{e^{(5\,x)}-1}$. → page 26

Exercice 47. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 26

$$f(x) = \frac{\ln\left(\ln\left(3\,x+1\right)\right)}{\ln\left(e^{(3\,x)}-1\right)} \times \frac{\ln\left(\sinh\left(x\right)+1\right)}{\ln\left(\cosh\left(2\,x\right)\right)},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 48. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 26

$$f(x) = \sin\left(\frac{7\,x^2}{x^3+x^2+3\,x-3}\right) \times \frac{3\,x^4+14\,x^3+x^2+x-1}{2\,x^2-9\,x+2}.$$

Exercice 49. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 27

$$f(x) = \arctan\left(\frac{-3\,x-3}{x^4+x^3-x^2+3\,x+1}\right) \times \frac{-3\,x^4+3\,x^3+3\,x^2-1}{x^4+x^3+x^2}.$$

Exercice 50. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de : → page 27

$$\sqrt{n^6-n^4+n^2-1} - \sqrt[3]{n^9-n^6-21\,n^3-1},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 51. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 27

$$f(x) = \frac{\ln\left(\ln\left(2\,x+1\right)\right)}{\ln\left(-\cos\left(3\,x\right)+1\right)} \times \frac{\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)}{\ln\left(\cosh\left(x\right)\right)},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 52. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 28

$$\ln\left(-\frac{4\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - 11\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 53. Calculer : $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{5}\,\sin\left(\frac{5}{2}\,x\right)\right)-1} + \frac{8}{x^2} \right)$. → page 28

Exercice 54. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 29

$$f(x) = \cos\left(\frac{-2\,x}{3\,x^3+x^2-x-1} \right) \times \frac{3\,x^2-x+3}{4\,x^4+x^2-2\,x-32}.$$

Exercice 55. Calculer : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(6\,x)-\sin(4\,x)}{e^{(6\,x)}-1}$. → page 29

Exercice 56. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de : → page 29

$$\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[3]{n^3+n^2+3},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 57. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 29

$$f(x) = \sin\left(\frac{-15\,x^4-x^3-x+1}{-7\,x^4-x^3+x^2} \right) \times \frac{-2\,x-1}{x+1}.$$

Exercice 58. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de : → page 30

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3+n^2-13\,n-1},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 59. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de : → page 30

$$\sqrt[3]{n^{18}+n^9-3} - \sqrt{n^{12}-n^8-n^4-7},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 60. Calculer : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(6\,x)-\cos(3\,x)}{\tan(6\,x)}$. → page 30

Exercice 61. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : → page 31

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = \frac{1}{2\,n} - \arctan\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{5}{4}\,e^{\frac{2}{n}} - \frac{5}{4}\cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 62. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 31

$$\frac{1}{3\,n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{16\,(n-2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 63. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 31

$$f(x) = \sin\left(\frac{14\,x^4-2\,x^3-x^2-x+2}{-x+1} \right) \times \frac{4\,x+1}{-4\,x^3-x^2-21\,x-14}.$$

Exercice 64. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 32

$$u_n = \left(-\frac{8\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \cosh\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{-3\,n^2}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 65. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de : → page 32

$$g(x) = \frac{x^3 e^x \ln(x+1)^2 - x e^x \ln(x+1)^4 - x \ln(x+1)^3 + 4\,x \ln(x+1)}{-32\,x^3 \ln(x)^2 + x^2 \ln(x)^2 + x^2 + 3\,e^{(-4\,x)}}.$$

Exercice 66. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 32

$$\ln\left(\frac{\arctan(x)}{x} + \sin(x)\right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 67. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de : → page 33

$$g(x) = \frac{-x^3 e^{(2\,x)} - x e^x + 12}{-e^{(-2\,x)} \ln(x)^4 - 7\,x^3 e^{(-3\,x)} - x^2 e^{(-2\,x)} + 124\,x e^{(-x)} \ln(x)}.$$

Exercice 68. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 33

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(2\,x))}{\ln\left(e^{(3\,x)} - 1\right)} \times \frac{\ln(\sinh(2\,x) + 1)}{\ln(\cosh(3\,x))},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 69. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 34

$$f(x) = \arctan\left(\frac{-2\,x+1}{-x+1}\right) \times \frac{-2\,x^2 - 22\,x - 1}{x^4 - 6\,x^3 + x + 1}.$$

Exercice 70. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 34

$$\frac{4}{3\,n} - \frac{2}{n+4} - \frac{13}{5\,(n-3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 71. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x) - \tan(8\,x)}{e^{(2\,x)} - 1}$. → page 34

Exercice 72. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{5\,x} - \frac{1}{\tan(5\,\sinh(x))}\right)$. → page 34

Exercice 73. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : → page 35

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = -\frac{1}{n} - \sinh\left(\frac{2}{n}\right) - 6\,n \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + 2\,n \arctan\left(\frac{3}{n}\right).$$

Exercice 74. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 35

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2\,x^3 + x^2 + x}{-4\,x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 1}\right) \times \frac{-2\,x^2 - 2\,x}{-x^2 - 5\,x - 1}.$$

Exercice 75. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{4}\arctan(x)\right) - 1} + \frac{32}{9\,x^2}\right)$. → page 36

Exercice 76. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : → page 36

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sinh\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2}\, n \sinh\left(\frac{2}{n}\right) - \cos\left(\frac{2}{n}\right).$$

Exercice 77. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 36

$$\left(-\frac{20\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - 3\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1\right)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 78. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 37

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln(\sin(3\,x))} \times \frac{\ln(\sin(3\,x)+1)}{\ln(\cosh(x))},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 79. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\tan(4\cosh(4\,x)-4)} - \frac{1}{32\,x^2}\right)$. → page 37

Exercice 80. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2\,x+1)-\ln(x+1)}{\cos(3\,x)-1}$. → page 37

Exercice 81. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 38

$$u_n = \left(n\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 82. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 38

$$-\frac{13}{n} + \frac{15}{n+2} + \frac{1}{n-2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 83. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 38

$$f(x) = \frac{\ln(\arctan(3\,x))}{\ln\left(e^{(4\,x)}-1\right)} \times \frac{\ln(\arctan(3\,x)+1)}{\ln(\cos(x))},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 84. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{e^{(-\sinh(x))}-1}\right)$. → page 39

Exercice 85. Donner un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, de : → page 39

$$g(x) = \frac{-x^6 - x^3e^x - 20\,e^{(3\,x)}\ln(x+1)^3 - x\ln(x+1)^2}{2\,e^{(-x)}\ln(x)^5 - 14\ln(x)^5 + x^2\ln(x) - 11\,e^{(-3\,x)}}.$$

Exercice 86. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, de : → page 39

$$f(x) = \sin\left(\frac{-x^4 - x^3 + 2}{x^3 + 61\,x + 1}\right) \times \frac{-x^3 - x + 2}{x + 2}.$$

Exercice 87. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^{(\cos(x)-1)}-1} + \frac{2}{x^2}\right)$. → page 40

Exercice 88. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 40

$$\ln\left(\cosh(x) + 2\,\sin(x)\right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 89. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{12}{5\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{1}{3}\,\tan\left(\frac{5}{4}\,x\right)\right)} - 1}\right)$. → page 41

Exercice 90. Déterminer un équivalent asymptotique simple, quand $x \to 0$, de : → page 41

$$f(x) = \frac{\ln\left(\sin(4\,x)\right)}{\ln\left(\ln(2\,x+1)\right)} \times \frac{\ln\left(\ln(x+1)+1\right)}{\ln\left(\cos(3\,x)\right)},$$

et en déduire la limite éventuelle quand $x \to 0^+$.

Exercice 91. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 41

$$\ln\left(7\,\sin(x) - \sinh(x) + 1\right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 92. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{15}{8\,x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{3}\,\sinh\left(\frac{4}{5}\,x\right)\right)}\right)$. → page 42

Exercice 93. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : → page 42

$$\left(n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - 2\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 94. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de : → page 43

$$\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1} - \sqrt{n^2 - 2},$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 95. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{16\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{3}\,\tan(4\,x)\right)} - 1}\right)$. → page 43

Exercice 96. Donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : → page 43

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = \frac{2}{n} - 8\,\arctan\left(\frac{2}{n}\right) + 7\,e^{\frac{2}{n}} - 7\,\cosh\left(\frac{2}{n}\right).$$

Exercice 97. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{5}{x} + \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{5}\,\sinh(x)\right)}\right)$. → page 43

Exercice 98. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 44

$$\frac{1}{57\,n} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-1} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 99. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\,\sinh(4\,x)\right) - 1} + \frac{1}{18\,x^2}\right)$. → page 44

Exercice 100. Déterminer des réels a, b et c tels que : → page 44

$$-\frac{1}{n} - \frac{12}{n+3} - \frac{7}{8\,(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Corrigé 1. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 1

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-2\,n\ln\left(\frac{2\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + e^{\frac{1}{n}}\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\cos(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

et :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\frac{2\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}
-2\,n\ln\left(\frac{2\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + e^{\frac{1}{n}}\right) &= -2\,n\left[\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{8}{n} - 6 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -6.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\,n\ln\left(\frac{2\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + e^{\frac{1}{n}}\right) = -6$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{(-6)}$ par continuité en -6 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{(-6)} = e^{(-6)}\left(\exp\left(\frac{8}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8\,e^{(-6)}}{n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 2. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 1

$$\frac{-x^2-1}{x^4 - x^3 - 3\,x^2 - x - 3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-x^2}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{-2\,x^3 + x^2 + 1}{-2\,x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2\,x^3}{-2\,x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{-x^2-1}{x^4 - x^3 - 3\,x^2 - x - 3}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$, et donc : $\cos\left(\frac{-x^2-1}{x^4 - x^3 - 3\,x^2 - x - 3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \times \left(x^2\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-x^2-1}{x^4 - x^3 - 3\,x^2 - x - 3} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-1}{-3} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}, \qquad \frac{-2\,x^3 + x^2 + 1}{-2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{-2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2\,x}.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos\left(\frac{-x^2-1}{x^4 - x^3 - 3\,x^2 - x - 3}\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$, et donc :

$$\cos\left(\frac{-x^2-1}{x^4 - x^3 - 3\,x^2 - x - 3}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \cos\left(\frac{1}{3}\right).$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\cos\left(\frac{1}{3}\right)}{2\,x}, \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2.$$

Corrigé 3. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(3x+1)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\sinh(x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\ln(3x+1)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(3x+1)$, et : $\ln(\sinh(x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(x)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, où l'on prend $u = 3x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 1

$$\frac{\ln(\ln(3x+1)+1)}{\ln(\sinh(x)+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(3x+1)}{\sinh(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 3.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\cosh(3x)-1)} = \frac{\ln(2x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((2x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(2)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2})+2\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)} \times 3 = \frac{3}{2},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{3}{2}$.

Corrigé 4. Composons les développements limités en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{x}$, $x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ et $x \mapsto e^x$ avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{n} \to 0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 2, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 2 dans ce qui suit. ← page 1
On a :

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \quad \text{et :} \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{n} - \frac{3}{4}n\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{11}{18}n\ln\left(\frac{3}{n}+1\right) - \frac{13}{12}e^{\frac{3}{n}} \\
&= \frac{6}{n} - \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{11}{6}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{13}{12}\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{9}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 5. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 1

$$x\ln(x+1)^3 \ll x^2e^x\ln(x+1)^2 \ll x^2e^{(2x)}\ln(x+1),$$

et :

$$x^4e^{(-x)}\ln(x) \ll x\ln(x)^4 \ll x^2\ln(x) \ll x^2\ln(x)^2 \ll x^3.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-3x^2e^x\ln(x+1)^2 + x^2e^{(2x)}\ln(x+1) - x\ln(x+1)^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2e^{(2x)}\ln(x+1).$$

De même : $-5x^4e^{(-x)}\ln(x) + x\ln(x)^4 + 2x^2\ln(x)^2 + x^3 + x^2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$.

De plus, on a $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ (en effet : $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$), ce qui simplifie le premier équivalent. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2 e^{(2\,x)}\ln(x)}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{(2\,x)}\ln(x)}{x}.$$

Corrigé 6. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. ← page 1
Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes :

$$x\ln(x+1)^4 \ll x^3\ln(x+1)^3 \ll x^2 e^{(2\,x)}\ln(x+1)^2 \ll e^{(3\,x)}\ln(x+1)^3,$$

et :

$$xe^{(-5\,x)} \ll xe^{(-2\,x)} \ll x\ln(x)^4 \ll x^4\ln(x)^2.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-x^3\ln(x+1)^3 - x^2e^{(2\,x)}\ln(x+1)^2 - 2\,x\ln(x+1)^4 - 12\,e^{(3\,x)}\ln(x+1)^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} -12\,e^{(3\,x)}\ln(x+1)^3.$$

De même : $-6\,x^4\ln(x)^2 + 6\,x\ln(x)^4 + xe^{(-2\,x)} - xe^{(-5\,x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -6\,x^4\ln(x)^2$.

De plus, on a $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ (en effet : $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$), ce qui simplifie le premier équivalent. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-12\,e^{(3\,x)}\ln(x)^3}{-6\,x^4\ln(x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2\,e^{(3\,x)}\ln(x)}{x^4}.$$

Corrigé 7. Composons les développements limités en 0 de $x \mapsto \frac{\sinh(x)}{x}$, $x \mapsto \sinh(x)$ et $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x}$ avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n} \to 0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 2, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 2 dans ce qui suit. ← page 1
On a :

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3), \quad \sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \quad \text{et :} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{8\,n} + \frac{1}{92}\,n\sinh\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{7}{184}\sinh\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{1}{46}\,n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\\
&= -\frac{1}{8\,n} + \frac{1}{46}\left(1 + \frac{2}{3\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{7}{184}\left(\frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{46}\left(1 - \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{138\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{138\,n^2},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. Au voisinage de 0, on a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 1

$$\frac{\sinh(8\,x) - \sinh(9\,x)}{\ln(x+1)} = \frac{\left(8\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(9\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{x + \underset{x\to 0}{o}(x)} = \frac{-x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{x + \underset{x\to 0}{o}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{x} = -1.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(8\,x) - \sinh(9\,x)}{\ln(x+1)} = -1$.

Corrigé 9. On a :

← page 1

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \quad \text{et :} \quad \sinh(x) = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned} 28\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1 &= 28\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{29}{n} + \frac{28}{n^2} + \frac{85}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} &\ln\left(\frac{28\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) \\ &= \left(\frac{29}{n} + \frac{28}{n^2} + \frac{85}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{29}{n} + \frac{28}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{29}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \left(\frac{29}{n} + \frac{28}{n^2} + \frac{85}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{841}{n^2} + \frac{1624}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{24389}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{29}{n} - \frac{785}{2\,n^2} + \frac{43991}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. On écrit :

← page 1

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{3}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{5}{2\,(n+3)} - \frac{2}{n-3} &= \frac{1}{n} - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 2\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{7}{2\,n} + \frac{3}{2\,n^2} - \frac{81}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 11. On écrit :

← page 2

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-4} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1-\frac{4}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{16}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{3}{n}$ et $x = \dfrac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{3}{n} - \frac{1}{n+3} - \frac{7}{5\,(n-4)} &= \frac{3}{n} - 1\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{7}{5}\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{3}{5\,n} - \frac{13}{5\,n^2} - \frac{157}{5\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 12. On a : ← page 2

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad xe^x = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\ln(x+1) + 2xe^x &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + 2\left(x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^{\frac{9}{2}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{9}{2}}} = 1 - \frac{9}{2}x + \frac{99}{8}x^2 - \frac{429}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(2xe^x + \ln(x+1) + 1\right)^{\frac{9}{2}}}\\ &= 1 - \frac{9}{2}\left(3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{99}{8}\left(3x + \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \frac{429}{16}\left(3x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= 1 - \frac{9}{2}\left(3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{99}{8}\left(9x^2 + 9x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{429}{16}\left(27x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= 1 - \frac{27}{2}x + \frac{837}{8}x^2 - \frac{9897}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 13. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$. On compose ce développement limité avec celui de $x \mapsto \cos(x)$, ce qui est licite puisque $-\frac{3}{5}\arctan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 2

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{5}\arctan(x)\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}x^3 + x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= 1 - \frac{9}{50}x^2 + \frac{627}{5000}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cos\left(\frac{3}{5}\arctan(x)\right) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{9}{50}x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{5}\arctan(x)\right) - 1} + \frac{50}{9x^2} = \frac{9x^2 + 50\left(-\frac{9}{50}x^2 + \frac{627}{5000}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)}{9x^2\left(\cos\left(\frac{3}{5}\arctan(x)\right) - 1\right)} = \frac{\frac{627}{100}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{9x^2\left(\cos\left(\frac{3}{5}\arctan(x)\right) - 1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{627}{5000}x^4}{-\frac{81}{50}x^4} = -\frac{209}{54}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{5}\arctan(x)\right) - 1} + \frac{50}{9x^2}\right) = -\frac{209}{54}$.

Corrigé 14. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to +\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 2

$$xe^{(3x)} \ll x^2e^{(3x)}\ln(x+1) \ll x^2e^{(4x)},$$

et :

$$e^{(-2x)}\ln(x) \ll xe^{(-x)}\ln(x) \ll x^2\ln(x) \ll x^5.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$x^2e^{(3\,x)}\ln(x+1)-2\,x^2e^{(4\,x)}-5\,xe^{(3\,x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}-2\,x^2e^{(4\,x)}.$$

De même : $-x^5+x^2\ln(x)-xe^{(-x)}\ln(x)+2\,e^{(-2\,x)}\ln(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-x^5$. On conclut :

$$g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-2\,x^2e^{(4\,x)}}{-x^5}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2\,e^{(4\,x)}}{x^3}.$$

Corrigé 15. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+10}-\sqrt[3]{n^3-1}&=\sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2+10}{n^2}\right)}-\sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)}\\&=n\times\sqrt{1+\frac{10}{n^2}}-n\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}\\&=n\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{10}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right.\\&\quad\left.-\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\\&=n\left[\frac{5}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{5}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{5}{n}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+10}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)=0$.

Corrigé 16. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 2

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n=\exp\left(-n\ln\left(-\frac{3\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\cos(x)=1+\underset{x\to0}{o}(x),$$

et :

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to0$), et on obtient :

$$n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-\frac{3\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}=1-\frac{7}{2\,n}+\frac{1}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-n\ln\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-\frac{3\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)&=-n\left[\left(-\frac{7}{2\,n}+\frac{1}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\frac{139}{24\,n}+\frac{7}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}-n\ln\left(-\frac{3\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)=\frac{7}{2}$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^{\frac{7}{2}}$ par continuité en $\frac{7}{2}$ de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n-e^{\frac{7}{2}}=e^{\frac{7}{2}}\left(\exp\left(\frac{139}{24\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{139\,e^{\frac{7}{2}}}{24\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 17. On a : ← page 2

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\ln\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{3\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 18. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(3\,x+1)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(3\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\ln(3\,x+1)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(3\,x+1)$, et : $\ln(\cosh(3\,x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(3\,x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u = 3\,x$, impliquent : ← page 2

$$\frac{\ln(\ln(3\,x+1)+1)}{\ln(\cosh(3\,x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(3\,x+1)}{\cosh(3\,x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\,x}{\frac{9}{2}x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{3\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(2\,x))}{\ln(\cosh(3\,x)-1)} = \frac{\ln(2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((2\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}x^2)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2}) + 2\,\ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)} \times \frac{2}{3\,x} = \frac{1}{3\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 19. On a : ← page 2

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}31\sin(x) + \sinh(x) + 1 &= 31\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 1 + 32\,x - 5\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{31\sin(x) + \sinh(x) + 1} \\
&= 1 - \left(32\,x - 5\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(32\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 - \left(32\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 - \left(32\,x - 5\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1024\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \left(32768\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 - 32\,x + 1024\,x^2 - 32763\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 20. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 2

$$\ln(x+1)^2 \ll x^2\ln(x+1) \ll x^2e^x\ln(x+1)^2 \ll x^3e^x,$$

et :

$$x^2e^{(-4\,x)} \ll x^3e^{(-2\,x)} \ll x \ll x\ln(x)^2.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-11\,x^2e^x\ln(x+1)^2 - x^3e^x - 2\,x^2\ln(x+1) - \ln(x+1)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^3e^x.$$

De même : $-x^3e^{(-2\,x)} + 5\,x^2e^{(-4\,x)} - x\ln(x)^2 - 4\,x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x)^2$. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-x^3e^x}{-x\ln(x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2e^x}{\ln(x)^2}.$$

Corrigé 21. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 3

$$x^2\ln(x+1)^2 \ll x^4e^{(2\,x)} \ll xe^{(3\,x)},$$

et :

$$x^3e^{(-3\,x)} \ll e^{(-x)}\ln(x)^4 \ll xe^{(-x)}\ln(x) \ll x^6.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-11\,x^4e^{(2\,x)} - x^2\ln(x+1)^2 - 14\,xe^{(3\,x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -14\,xe^{(3\,x)}.$$

De même : $x^6 + e^{(-x)}\ln(x)^4 + 2\,x^3e^{(-3\,x)} - xe^{(-x)}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^6$. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-14\,xe^{(3\,x)}}{x^6} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{14\,e^{(3\,x)}}{x^5}.$$

Corrigé 22. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cos(2\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sin(x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x)$, et : $\ln(\cos(2\,x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(2\,x) - 1$. Alors, nos ← page 3

équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u = 2x$ dans le second développement limité, impliquent :

$$\frac{\ln(\sin(x)+1)}{\ln(\cos(2x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin(x)}{\cos(2x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{-2x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(4x))}{\ln(\cosh(3x)-1)} = \frac{\ln(4x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((4x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2}) + 2\ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)} \times \left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{4x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Corrigé 23. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 3

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(4\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2),$$

et :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 4\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{4}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 4\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \sqrt{n}\left[\left(\frac{4}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{17}{2n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(4\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - 1 = \exp\left(\frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{17}{2n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 24. On a : ← page 3

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2), \quad \text{et :} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}2x\cos(x) - 3\ln(x+1) &= 2\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) - 3\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= -x + \frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto e^x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&e^{(2\,x\cos(x)-3\,\ln(x+1))}\\
&= 1 + \left(-x + \frac{3}{2}\,x^2 - 2\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-x + \frac{3}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-x + \underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1 + \left(-x + \frac{3}{2}\,x^2 - 2\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - 3\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{6}\left(-x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 1 - x + 2\,x^2 - \frac{11}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 25. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\dfrac{1}{n}$ et $x = \dfrac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4\,(n-3)} &= -\frac{2}{n} + 1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -\frac{3}{4\,n} - \frac{1}{4\,n^2} + \frac{13}{4\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 26. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[3]{n^3-3\,n^2-n+2} &= \sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)} - \sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3-3\,n^2-n+2}{n^3}\right)}\\
&= n\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}} - n\times\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\\
&= n\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n^3}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right.\\
&\qquad\left. - \left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\
&= n\left[\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[3]{n^3-3\,n^2-n+2}\right) = 1.$

Corrigé 27. Composons les développements limités en 0 de $x \mapsto \cosh(x)$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{n} \to 0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 2, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 2 dans ce qui suit. ← page 3
On a :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),\quad \sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\quad \text{et :}\quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{7\,n}-3\,\cosh\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{65}{63}\,n\sin\left(\frac{3}{n}\right)-\frac{2}{63}\,n\ln\left(\frac{3}{n}+1\right)\\
&=-\frac{1}{7\,n}-3\left(1+\frac{2}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{65}{21}\left(1-\frac{3}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{2}{21}\left(1-\frac{3}{2\,n}+\frac{3}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&=-\frac{153}{14\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{153}{14\,n^2},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 28. Rappelons-nous que si $\alpha<\beta$, alors $x^\alpha=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 3

$$\frac{-x^4+30\,x^3-x^2+2\,x+3}{x^4-x^3+584\,x^2+3\,x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-x^4}{x^4}\underset{x\to+\infty}{\sim}-1\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-1,\quad \frac{9\,x^4+x^2-3\,x}{3\,x^3+6\,x^2+3}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{9\,x^4}{3\,x^3}\underset{x\to+\infty}{\sim}3\,x.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{-x^4+30\,x^3-x^2+2\,x+3}{x^4-x^3+584\,x^2+3\,x}\right)=\arctan(-1)=-\frac{1}{4}\pi\neq0$, et donc : $\arctan\left(\frac{-x^4+30\,x^3-x^2+2\,x+3}{x^4-x^3+584\,x^2+3\,x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{4}\pi$. On a donc :

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{4}\pi\times(3\,x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{3}{4}\pi x.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-x^4+30\,x^3-x^2+2\,x+3}{x^4-x^3+584\,x^2+3\,x}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{3}{3\,x}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}+\infty,\quad \frac{9\,x^4+x^2-3\,x}{3\,x^3+6\,x^2+3}\underset{x\to0}{\sim}\frac{-3\,x}{3}\underset{x\to0}{\sim}-x.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\left(\frac{-x^4+30\,x^3-x^2+2\,x+3}{x^4-x^3+584\,x^2+3\,x}\right)=\frac{1}{2}\pi\neq0$, et donc : $\arctan\left(\frac{-x^4+30\,x^3-x^2+2\,x+3}{x^4-x^3+584\,x^2+3\,x}\right)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{2}\pi$.
On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\frac{1}{2}\pi x,\ \text{ et : } f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{3}{4}\pi x.$$

Corrigé 29. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{2}{n}$ et $x=\frac{4}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\,n}+\frac{1}{3\,(n+2)}-\frac{1}{8\,(n-4)}&=-\frac{1}{2\,n}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=-\frac{7}{24\,n}-\frac{7}{6\,n^2}-\frac{2}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 30. On écrit : ← page 3

$$\frac{1}{n+4}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{4}{n}$ et $x=\frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).

On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4\,n}-\frac{2}{n+4}-\frac{1}{n-2}&=-\frac{1}{4\,n}-2\left(\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=-\frac{13}{4\,n}+\frac{6}{n^2}-\frac{36}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 31. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 3

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n=\exp\left(n\ln\left(\frac{5\,e^{\frac{1}{n}}}{n}+n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$e^x=1+x+\underset{x\to0}{o}(x),$$

et :

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to0$), et on obtient :

$$n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{5\,e^{\frac{1}{n}}}{n}=1+\frac{5}{n}+\frac{14}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}n\ln\left(n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{5\,e^{\frac{1}{n}}}{n}\right)&=n\left[\left(\frac{5}{n}+\frac{14}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=-\frac{47}{6\,n}+5+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}5.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(\frac{5\,e^{\frac{1}{n}}}{n}+n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)=5$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^5$ par continuité en 5 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n-e^5=e^5\left(\exp\left(-\frac{47}{6\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{47\,e^5}{6\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u-1\underset{u\to0}{\sim}u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 32. On a : ← page 4

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\qquad\text{et : }\quad x\cos(x)=x-\frac{1}{2}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n}\to0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}-\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}&=-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=-\frac{2}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x\mapsto\dfrac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}=1-\frac{3}{2}\,x+\frac{15}{8}\,x^2-\frac{35}{16}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(-\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&=1-\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{15}{8}\left(-\frac{2}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2-\frac{35}{16}\left(-\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1-\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{6\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{15}{8}\left(\frac{4}{n^2}-\frac{2}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{35}{16}\left(-\frac{8}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1+\frac{3}{n}+\frac{27}{4\,n^2}+\frac{27}{2\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 33. Composons les développements limités en 0 de $x\mapsto\dfrac{\arctan(x)}{x}$, $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto\ln(x+1)$ avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a $\dfrac{1}{n}\to 0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 2, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 2 dans ce qui suit. ← page 4

On a :

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\quad e^x=1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\quad\text{et :}\quad\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\,n\arctan\left(\frac{3}{n}\right)-\frac{1}{2}\,e^{\frac{2}{n}}+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{3}{n}+1\right)\\
&=-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n}-\frac{9}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&=-\frac{11}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{11}{2\,n^2},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^{18}+4\,n^9}-\sqrt{n^{12}+n^8+22\,n^4}&=\sqrt[3]{n^{18}\cdot\left(\frac{n^{18}+4\,n^9}{n^{18}}\right)}-\sqrt{n^{12}\cdot\left(\frac{n^{12}+n^8+22\,n^4}{n^{12}}\right)}\\
&=n^6\times\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^9}}-n^6\times\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{22}{n^8}}\\
&=n^6\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n^9}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^9}\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{22}{n^8}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right]\\
&=n^6\left[-\frac{1}{2\,n^4}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]=-\frac{1}{2}\,n^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(n^2\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2}\,n^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{18}+4\,n^9}-\sqrt{n^{12}+n^8+22\,n^4}\right)=-\infty$.

Corrigé 35. On écrit : ← page 4

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{2}{n}$ et $x=\dfrac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).

On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{4}{n}+\frac{11}{n+2}+\frac{5}{2\,(n-2)} &= -\frac{4}{n}+11\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{19}{2\,n}-\frac{17}{n^2}+\frac{54}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 36. Rappelons-nous que si $\alpha<\beta$, alors $x^\alpha=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 4

$$\frac{x^4+x^3+x^2-x}{x-102}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^4}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim}x^3.$$

Attention à ne pas penser que $\sin\left(\frac{-x^2-x-3}{-x+3}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sin(x)$ sous prétexte que $\frac{-x^2-x-3}{-x+3}\underset{x\to+\infty}{\sim}x$. Nous savons que les équivalents se composent mal, l'exponentielle et le logarithme donnant des contre-exemples classiques. On ne peut pas simplifier cette quantité. On a donc :

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sin\left(\frac{x^2+x+3}{x-3}\right)\times\left(x^3\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^3\sin\left(\frac{x^2+x+3}{x-3}\right).$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-x^2-x-3}{-x+3}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{-3}{3}\underset{x\to0^+}{\sim}-1\underset{x\to0}{\longrightarrow}-1,\qquad\frac{x^4+x^3+x^2-x}{x-102}\underset{x\to0}{\sim}\frac{-x}{-102}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{102}\,x.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to0^+}\sin\left(\frac{-x^2-x-3}{-x+3}\right)=-\sin(1)\neq0$, et donc :

$$\sin\left(\frac{-x^2-x-3}{-x+3}\right)\underset{x\to0^+}{\sim}-\sin(1).$$

On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\frac{1}{102}\,x\sin(1)\,,\ \text{ et : }f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^3\sin\left(\frac{x^2+x+3}{x-3}\right).$$

Corrigé 37. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x)\ll v(x)$ » pour dire : $u(x)=\underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 4

$$x^5\ln(x+1)\ll e^x\ln(x+1)\ll x^2e^{(2\,x)}\ln(x+1)^2\ll e^{(6\,x)},$$

et :

$$x^2e^{(-4\,x)}\ll xe^{(-3\,x)}\ln(x)\ll e^{(-2\,x)}\ln(x)^2.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-2\,x^5\ln(x+1)+x^2e^{(2\,x)}\ln(x+1)^2+e^x\ln(x+1)+2\,e^{(6\,x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(6\,x)}.$$

De même : $4\,x^2e^{(-4\,x)}+xe^{(-3\,x)}\ln(x)+13\,e^{(-2\,x)}\ln(x)^2\underset{x\to+\infty}{\sim}13\,e^{(-2\,x)}\ln(x)^2$. On conclut :

$$g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2\,e^{(6\,x)}}{13\,e^{(-2\,x)}\ln(x)^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2\,e^{(8\,x)}}{13\,\ln(x)^2}.$$

Corrigé 38. Rappelons-nous que si $\alpha<\beta$, alors $x^\alpha=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 4

$$\frac{9\,x^3+19\,x^2+6\,x+1}{-2\,x+353}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{9\,x^3}{-2\,x}\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{9}{2}\,x^2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty,\qquad\frac{-x^3+6\,x^2+x-1}{x-1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-x^3}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim}-x^2.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{9\,x^3+19\,x^2+6\,x+1}{-2\,x+353}\right) = -\dfrac{1}{2}\pi \neq 0$, et donc : $\arctan\left(\dfrac{9\,x^3+19\,x^2+6\,x+1}{-2\,x+353}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\pi$. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\pi \times \left(-x^2\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\pi x^2.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{9\,x^3+19\,x^2+6\,x+1}{-2\,x+353} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{353} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{353} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{353}, \qquad \frac{-x^3+6\,x^2+x-1}{x-1} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-1}{-1} \underset{x\to0}{\sim} 1.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to0^+} \arctan\left(\dfrac{9\,x^3+19\,x^2+6\,x+1}{-2\,x+353}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{353}\right) \neq 0$, et donc :

$$\arctan\left(\frac{9\,x^3+19\,x^2+6\,x+1}{-2\,x+353}\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \arctan\left(\frac{1}{353}\right).$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \arctan\left(\frac{1}{353}\right), \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\pi x^2.$$

Corrigé 39. On écrit : ← page 4

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{2}{n}$ et $x=\dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\,n} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2\,(n-1)} &= -\frac{1}{2\,n} - 2\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{9}{2\,n^2} - \frac{15}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Corrigé 40. Au voisinage de 0, on a : $\cosh(x) = 1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$, et : $\sinh(x) = x+\underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 4

$$\frac{\cosh(5\,x)-\cosh(3\,x)}{\sinh(x)} = \frac{\left(\frac{25}{2}\,x^2+1+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right) - \left(\frac{9}{2}\,x^2+1+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)}{x+\underset{x\to0}{o}(x)} = \frac{8\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{x+\underset{x\to0}{o}(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{8\,x^2}{x} = 8\,x.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\cosh(5\,x)-\cosh(3\,x)}{\sinh(x)} = 0$.

Corrigé 41. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sin(x) = x-\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $2\,x$) avec celui de $x\mapsto\tan(x)$, ce qui est licite puisque $3\,\sin(2\,x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 4

$$\begin{aligned} \tan(3\,\sin(2\,x)) &= +\left(2\,x-\frac{4}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{3}\left(2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right) \\ &= 6\,x+68\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\tan(3\,\sin(2\,x)) \underset{x\to0^+}{\sim} 6\,x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$-\frac{1}{6\,x}+\frac{1}{\tan(3\,\sin(2\,x))} = \frac{6\,x-\left(6\,x+68\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)}{6\,x\tan(3\,\sin(2\,x))} = \frac{-68\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}{6\,x\tan(3\,\sin(2\,x))} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{-68\,x^3}{36\,x^2} = -\frac{17}{9}\,x.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{6\,x}+\dfrac{1}{\tan\left(3\,\sin\left(2\,x\right)\right)}\right)=0.$

Corrigé 42. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh\left(3\,x\right)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ et $\arctan\left(x\right)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to 1}{\sim}u-1$, on a : $\ln\left(\sinh\left(3\,x\right)+1\right)\underset{x\to 0}{\sim}\sinh\left(3\,x\right)$, et : $\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)\underset{x\to 0}{\sim}\arctan\left(x\right)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh\left(u\right)\underset{u\to 0}{\sim}u$ et $\arctan\left(u\right)\underset{u\to 0}{\sim}u$, où l'on prend $u=3\,x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 4

$$\frac{\ln\left(\sinh\left(3\,x\right)+1\right)}{\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\sinh\left(3\,x\right)}{\arctan\left(x\right)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{3\,x}{x}\underset{x\to 0}{\sim}3.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh\left(x\right)=x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)$, et : $\cos\left(x\right)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln\left(\sinh\left(2\,x\right)\right)}{\ln\left(-\cos\left(4\,x\right)+1\right)}=\frac{\ln(2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(8\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))}=\frac{\ln((2\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((8\,x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}=\frac{\ln(2)+\ln\left(x\right)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(8)+2\,\ln\left(x\right)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln\left(x\right)}{2\,\ln\left(x\right)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln\left(x\right)}{2\,\ln\left(x\right)}\times 3=\frac{3}{2},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\frac{3}{2}$.

Corrigé 43. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln\left(3\,x+1\right)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ et $\arctan\left(x\right)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to 1}{\sim}u-1$, on a : $\ln\left(\ln\left(3\,x+1\right)+1\right)\underset{x\to 0}{\sim}\ln\left(3\,x+1\right)$, et : $\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)\underset{x\to 0}{\sim}\arctan\left(x\right)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln\left(u+1\right)\underset{u\to 0}{\sim}u$ et $\arctan\left(u\right)\underset{u\to 0}{\sim}u$, où l'on prend $u=3\,x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 5

$$\frac{\ln\left(\ln\left(3\,x+1\right)+1\right)}{\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln\left(3\,x+1\right)}{\arctan\left(x\right)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{3\,x}{x}\underset{x\to 0}{\sim}3.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh\left(x\right)=x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)$, et : $\sin\left(x\right)=x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln\left(\sinh\left(3\,x\right)\right)}{\ln\left(\sin\left(4\,x\right)\right)}=\frac{\ln(3\,x+\underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(4\,x+\underset{x\to 0}{o}(x))}=\frac{\ln((3\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((4\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}=\frac{\ln(3)+\ln\left(x\right)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(4)+\ln\left(x\right)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln\left(x\right)}{\ln\left(x\right)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln\left(x\right)}{\ln\left(x\right)}\times 3=3,$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=3$.

Corrigé 44. Au voisinage de 0, on a : $\sin\left(x\right)=x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)$, et : $\arctan\left(x\right)=x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{\sin\left(6\,x\right)-\sin\left(3\,x\right)}{\arctan\left(3\,x\right)}=\frac{\left(6\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)-\left(3\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)}{3\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)}=\frac{3\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)}{3\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x\right)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{3\,x}{3\,x}=1.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\left(6\,x\right)-\sin\left(3\,x\right)}{\arctan\left(3\,x\right)}=1.$

Corrigé 45. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x)\ll v(x)$ » pour dire : $u(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(v(x)\right)$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 5

$$\ln\left(x+1\right)^3\ll x^3\ln\left(x+1\right)\ll xe^{(2\,x)}\ln\left(x+1\right)^2\ll x^3e^{(3\,x)},$$

et :

$$xe^{(-5\,x)} \ll e^{(-x)}\ln(x)^5 \ll x\ln(x)^3\,.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-x^3e^{(3\,x)} - x^3\ln(x+1) + xe^{(2\,x)}\ln(x+1)^2 - 3\,\ln(x+1)^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^3e^{(3\,x)}.$$

De même : $-e^{(-x)}\ln(x)^5 + x\ln(x)^3 + 11\,xe^{(-5\,x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x)^3$. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-x^3e^{(3\,x)}}{x\ln(x)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2e^{(3\,x)}}{\ln(x)^3}.$$

Corrigé 46. Au voisinage de 0, on a : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{\cosh(9\,x) - \cosh(2\,x)}{e^{(5\,x)} - 1} = \frac{\left(\frac{81}{2}\,x^2 + 1 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right) - \left(2\,x^2 + 1 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)}{5\,x + \underset{x\to0}{o}(x)} = \frac{\frac{77}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{5\,x + \underset{x\to0}{o}(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\frac{77}{2}\,x^2}{5\,x} = \frac{77}{10}\,x.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\cosh(9\,x) - \cosh(2\,x)}{e^{(5\,x)} - 1} = 0.$

Corrigé 47. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(x) + 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(2\,x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sinh(x) + 1) \underset{x\to0}{\sim} \sinh(x)$, et : $\ln(\cosh(2\,x)) \underset{x\to0}{\sim} \cosh(2\,x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u\to0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u = 2\,x$ dans le second développement limité, impliquent : ← page 5

$$\frac{\ln(\sinh(x) + 1)}{\ln(\cosh(2\,x))} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\sinh(x)}{\cosh(2\,x) - 1} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2\,x^2} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\ln(3\,x+1))}{\ln(e^{(3\,x)} - 1)} = \frac{\ln(3\,x + \underset{x\to0}{o}(x))}{\ln(3\,x + \underset{x\to0}{o}(x))} = \frac{\ln((3\,x)(1 + \underset{x\to0}{o}(1)))}{\ln((3\,x)(1 + \underset{x\to0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to0}{o}(1))}{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to0}{o}(1))} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3) + \ln(1 + \underset{x\to0}{o}(1)) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \frac{1}{2\,x} = \frac{1}{2\,x},$$

et en outre : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty.$

Corrigé 48. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 5

$$\frac{7\,x^2}{x^3 + x^2 + 3\,x - 3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7\,x^2}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{3\,x^4 + 14\,x^3 + x^2 + x - 1}{2\,x^2 - 9\,x + 2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3\,x^4}{2\,x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\,x^2.$$

Le fait que la première fraction rationnelle tende vers 0 autorise à écrire, en vertu de l'équivalent $\sin(u) \underset{u\to0}{\sim} u$:
$\sin\left(\dfrac{7\,x^2}{x^3 + x^2 + 3\,x - 3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7\,x^2}{x^3 + x^2 + 3\,x - 3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{x}$. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{x} \times \left(\frac{3}{2}\,x^2\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{21}{2}\,x.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{7\,x^2}{x^3 + x^2 + 3\,x - 3} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{7\,x^2}{-3} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{7}{3}\,x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{3\,x^4 + 14\,x^3 + x^2 + x - 1}{2\,x^2 - 9\,x + 2} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-1}{2} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

Le fait que la première fraction rationnelle tende vers 0 autorise à écrire, en vertu de l'équivalent $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:

$$\sin\left(\frac{7\,x^2}{x^3+x^2+3\,x-3}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{7\,x^2}{x^3+x^2+3\,x-3} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{7}{3}\,x^2.$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{7}{6}\,x^2, \text{ et : } f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{21}{2}\,x.$$

Corrigé 49. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 5

$$\frac{-3\,x-3}{x^4+x^3-x^2+3\,x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-3\,x}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{-3\,x^4+3\,x^3+3\,x^2-1}{x^4+x^3+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-3\,x^4}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} -3.$$

Le fait que la première fraction rationnelle tende vers 0 autorise à écrire, en vertu de l'équivalent $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:
$\arctan\left(\frac{-3\,x-3}{x^4+x^3-x^2+3\,x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-3\,x-3}{x^4+x^3-x^2+3\,x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{x^3}$. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{x^3}\times(-3) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{9}{x^3}.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-3\,x-3}{x^4+x^3-x^2+3\,x+1} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-3}{1} \underset{x\to 0^+}{\sim} -3 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -3, \quad \frac{-3\,x^4+3\,x^3+3\,x^2-1}{x^4+x^3+x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x^2}.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{-3\,x-3}{x^4+x^3-x^2+3\,x+1}\right) = -\arctan(3) \neq 0$, et donc :

$$\arctan\left(\frac{-3\,x-3}{x^4+x^3-x^2+3\,x+1}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\arctan(3).$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\arctan(3)}{x^2}, \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{9}{x^3}.$$

Corrigé 50. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^6-n^4+n^2-1} - \sqrt[3]{n^9-n^6-21\,n^3-1} &= \sqrt{n^6\cdot\left(\frac{n^6-n^4+n^2-1}{n^6}\right)} - \sqrt[3]{n^9\cdot\left(\frac{n^9-n^6-21\,n^3-1}{n^9}\right)} \\
&= n^3\times\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}} - n^3\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}-\frac{21}{n^6}-\frac{1}{n^9}} \\
&= n^3\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n^3}-\frac{21}{n^6}-\frac{1}{n^9}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] \\
&= n^3\left[-\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\,n+\underset{n\to+\infty}{o}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\,n.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^6-n^4+n^2-1} - \sqrt[3]{n^9-n^6-21\,n^3-1}\right) = -\infty$.

Corrigé 51. Commençons par la deuxième fraction. On a $\arctan(x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\arctan(x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x)$, et : $\ln(\cosh(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, impliquent : ← page 5

$$\frac{\ln(\arctan(x)+1)}{\ln(\cosh(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\arctan(x)}{\cosh(x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{1}{2}\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\ln(2x+1))}{\ln(-\cos(3x)+1)} = \frac{\ln(2x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((2x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2}) + 2\ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)} \times \frac{2}{x} = \frac{1}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 52. On a : ← page 5

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \quad \text{et :} \quad \arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-4\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - 11\arctan\left(\frac{1}{n}\right) &= -4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 11\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -\frac{15}{n} + \frac{17}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(-\frac{4\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - 11\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)\\
&= \left(-\frac{15}{n} + \frac{17}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{15}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{15}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= \left(-\frac{15}{n} + \frac{17}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{225}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{3375}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= -\frac{15}{n} - \frac{225}{2n^2} - \frac{3358}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $\frac{5}{2}x$) avec celui de $x \mapsto \cos(x)$, ce qui est licite puisque $\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 6

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{125}{48}x^3 + \frac{5}{2}x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{5}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\
&= 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{101}{384}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cos\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\right) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{8}x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\right) - 1} + \frac{8}{x^2} = \frac{x^2 + 8\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{101}{384}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)}{x^2\left(\cos\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\right) - 1\right)} = \frac{\frac{101}{48}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{x^2\left(\cos\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\right) - 1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{101}{384}x^4}{-\frac{1}{8}x^4} = -\frac{101}{6}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\right) - 1} + \frac{8}{x^2}\right) = -\frac{101}{6}.$

Corrigé 54. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 6

$$\frac{-2\,x}{3\,x^3+x^2-x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2\,x}{3\,x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{3\,x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{3\,x^2-x+3}{4\,x^4+x^2-2\,x-32} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3\,x^2}{4\,x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4\,x^2}.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{-2\,x}{3\,x^3+x^2-x-1}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$, et donc : $\cos\left(\frac{-2\,x}{3\,x^3+x^2-x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \times \left(\frac{3}{4\,x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4\,x^2}.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-2\,x}{3\,x^3+x^2-x-1} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{-2\,x}{-1} \underset{x\to0^+}{\sim} 2\,x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{3\,x^2-x+3}{4\,x^4+x^2-2\,x-32} \underset{x\to0}{\sim} \frac{3}{-32} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{3}{32}.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to0^+} \cos\left(\frac{-2\,x}{3\,x^3+x^2-x-1}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$, et donc :

$$\cos\left(\frac{-2\,x}{3\,x^3+x^2-x-1}\right) \underset{x\to0^+}{\sim} 1.$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{3}{32}, \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4\,x^2}.$$

Corrigé 55. Au voisinage de 0, on a : $\sin(x) = x + \underset{x\to0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 6

$$\frac{\sin(6\,x)-\sin(4\,x)}{e^{(6\,x)}-1} = \frac{\left(6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(4\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)} = \frac{2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}{6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{2\,x}{6\,x} = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin(6\,x)-\sin(4\,x)}{e^{(6\,x)}-1} = \frac{1}{3}$.

Corrigé 56. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[3]{n^3+n^2+3} &= \sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)} - \sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3+n^2+3}{n^3}\right)} \\
&= n \times \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}} - n \times \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}} \\
&= n\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. -\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\
&= n\left[-\frac{1}{3\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{1}{3}+\underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[3]{n^3+n^2+3}\right) = -\frac{1}{3}$.

Corrigé 57. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 6

$$\frac{-15\,x^4-x^3-x+1}{-7\,x^4-x^3+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-15\,x^4}{-7\,x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{15}{7} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{15}{7}, \qquad \frac{-2\,x-1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2\,x}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -2.$$

Par composition de limites : $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{-15\,x^4-x^3-x+1}{-7\,x^4-x^3+x^2}\right)=\sin\left(\dfrac{15}{7}\right)\neq 0$, et donc : $\sin\left(\dfrac{-15\,x^4-x^3-x+1}{-7\,x^4-x^3+x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sin\left(\dfrac{15}{7}\right)$. On a donc :

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sin\left(\frac{15}{7}\right)\times(-2)\underset{x\to+\infty}{\sim}-2\sin\left(\frac{15}{7}\right).$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-2\,x-1}{x+1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{-1}{1}\underset{x\to0}{\sim}-1.$$

Attention à ne pas penser que $\sin\left(\frac{-15\,x^4-x^3-x+1}{-7\,x^4-x^3+x^2}\right)\underset{x\to0^+}{\sim}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ sous prétexte que $\frac{-15\,x^4-x^3-x+1}{-7\,x^4-x^3+x^2}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x^2}$. Nous savons que les équivalents se composent mal, l'exponentielle et le logarithme donnant des contre-exemples classiques. On ne peut pas simplifier cette quantité.
On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\sin\left(\frac{15\,x^4+x^3+x-1}{7\,x^4+x^3-x^2}\right),\ \text{et}:\ f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-2\sin\left(\frac{15}{7}\right).$$

Corrigé 58. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2-13\,n-1}&=\sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)}-\sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3+n^2-13\,n-1}{n^3}\right)}\\&=n\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}-n\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{13}{n^2}-\frac{1}{n^3}}\\&=n\Bigg[\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&\quad-\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{13}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\Bigg]\\&=n\left[-\frac{1}{3\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{1}{3}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2-13\,n-1}\right)=-\dfrac{1}{3}$.

Corrigé 59. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^{18}+n^9-3}-\sqrt{n^{12}-n^8-n^4-7}&=\sqrt[3]{n^{18}\cdot\left(\frac{n^{18}+n^9-3}{n^{18}}\right)}-\sqrt{n^{12}\cdot\left(\frac{n^{12}-n^8-n^4-7}{n^{12}}\right)}\\&=n^6\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^9}-\frac{3}{n^{18}}}-n^6\times\sqrt{1-\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^8}-\frac{7}{n^{12}}}\\&=n^6\Bigg[\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^9}-\frac{3}{n^{18}}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^9}\right)\right)\\&\quad-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^8}-\frac{7}{n^{12}}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\Bigg]\\&=n^6\left[\frac{1}{2\,n^4}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]=\frac{1}{2}\,n^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(n^2\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\,n^2.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^9-3}-\sqrt{n^{12}-n^8-n^4-7}\right)=+\infty$.

Corrigé 60. Au voisinage de 0, on a : $\cos(x)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$, et : $\tan(x)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 6

$$\frac{\cos(6\,x)-\cos(3\,x)}{\tan(6\,x)}=\frac{\left(-18\,x^2+1+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)-\left(-\frac{9}{2}\,x^2+1+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)}{6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}=\frac{-\frac{27}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{-\frac{27}{2}\,x^2}{6\,x}=-\frac{9}{4}\,x.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(6x)-\cos(3x)}{\tan(6x)} = 0.$

Corrigé 61. Composons les développements limités en 0 de $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \cos(x)$ avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n} \to 0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 2, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 2 dans ce qui suit. ← page 6
On a :

$$\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \quad \text{et :} \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n} - \arctan\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{5}{4}e^{\frac{2}{n}} - \frac{5}{4}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2n} - \left(\frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{5}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{25}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{25}{8n^2},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 62. On écrit : ← page 6

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x = -\frac{1}{n}$ et $x = \frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n \to +\infty$).
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{16(n-2)} &= \frac{1}{3n} - 1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -\frac{29}{48n} + \frac{9}{8n^2} - \frac{3}{4n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé 63. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 6

$$\frac{4x+1}{-4x^3 - x^2 - 21x - 14} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4x}{-4x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}.$$

Attention à ne pas penser que $\sin\left(\frac{14x^4-2x^3-x^2-x+2}{-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin\left(-14x^3\right)$ sous prétexte que $\frac{14x^4-2x^3-x^2-x+2}{-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -14x^3$. Nous savons que les équivalents se composent mal, l'exponentielle et le logarithme donnant des contre-exemples classiques. On ne peut pas simplifier cette quantité. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin\left(-\frac{14x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}{x-1}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\sin\left(-\frac{14x^4-2x^3-x^2-x+2}{x-1}\right)}{x^2}.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{14x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}{-x+1} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{1} \underset{x\to 0^+}{\sim} 2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2, \qquad \frac{4x+1}{-4x^3 - x^2 - 21x - 14} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{-14} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{14}.$$

Par composition de limites : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{14x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}{-x+1}\right) = \sin(2) \neq 0$, et donc :

$$\sin\left(\frac{14x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}{-x+1}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sin(2).$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{14}\sin(2)\,,\ \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\sin\left(-\frac{14\,x^4-2\,x^3-x^2-x+2}{x-1}\right)}{x^2}.$$

Corrigé 64. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 6

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-3\,n^2\ln\left(-\frac{8\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\cos(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)\,,$$

et :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$-\frac{8\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{8}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-3\,n^2\ln\left(-\frac{8\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= -3\,n^2\left[\left(-\frac{8}{n}+\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= 24\,n+\frac{189}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}24\,n.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\,n^2\ln\left(-\frac{8\,\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) = +\infty$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par composition de limites.

Corrigé 65. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 7

$$x\ln(x+1) \ll x\ln(x+1)^3 \ll xe^x\ln(x+1)^4 \ll x^3e^x\ln(x+1)^2\,,$$

et :

$$e^{(-4\,x)} \ll x^2 \ll x^2\ln(x)^2 \ll x^3\ln(x)^2\,.$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$x^3e^x\ln(x+1)^2 - xe^x\ln(x+1)^4 - x\ln(x+1)^3 + 4\,x\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3e^x\ln(x+1)^2\,.$$

De même : $-32\,x^3\ln(x)^2 + x^2\ln(x)^2 + x^2 + 3\,e^{(-4\,x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -32\,x^3\ln(x)^2$.

De plus, on a $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ (en effet : $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$), ce qui simplifie le premier équivalent. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^3e^x\ln(x)^2}{-32\,x^3\ln(x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{32}\,e^x.$$

Corrigé 66. On a : ← page 7

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad \arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sin(x) + \frac{\arctan(x)}{x} &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\ln\left(\frac{\arctan(x)}{x} + \sin(x)\right)\\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= x - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 7

$$1 \ll xe^x \ll x^3 e^{(2\,x)},$$

et :

$$x^3 e^{(-3\,x)} \ll e^{(-2\,x)} \ln(x)^4 \ll x^2 e^{(-2\,x)} \ll xe^{(-x)} \ln(x).$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-x^3 e^{(2\,x)} - xe^x + 12 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^3 e^{(2\,x)}.$$

De même : $-e^{(-2\,x)} \ln(x)^4 - 7\,x^3 e^{(-3\,x)} - x^2 e^{(-2\,x)} + 124\,xe^{(-x)} \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 124\,xe^{(-x)} \ln(x)$. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-x^3 e^{(2\,x)}}{124\,xe^{(-x)} \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2 e^{(3\,x)}}{124\,\ln(x)}.$$

Corrigé 68. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(2\,x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(3\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sinh(2\,x) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(2\,x)$, et : $\ln(\cosh(3\,x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(3\,x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$, où l'on prend respectivement $u = 2\,x$ et $u = 3\,x$, impliquent : ← page 7

$$\frac{\ln(\sinh(2\,x) + 1)}{\ln(\cosh(3\,x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sinh(2\,x)}{\cosh(3\,x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,x}{\frac{9}{2}x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{9\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(2\,x))}{\ln\left(e^{(3\,x)} - 1\right)} = \frac{\ln(2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((2\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((3\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \frac{4}{9\,x} = \frac{4}{9\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 69. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 7

$$\frac{-2\,x+1}{-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2\,x}{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2, \quad \frac{-2\,x^2-22\,x-1}{x^4-6\,x^3+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2\,x^2}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^2}.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{-2\,x+1}{-x+1}\right) = \arctan(2) \neq 0$, et donc : $\arctan\left(\frac{-2\,x+1}{-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \arctan(2)$. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \arctan(2) \times \left(-\frac{2}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2\arctan(2)}{x^2}.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-2\,x+1}{-x+1} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{1} \underset{x\to0^+}{\sim} 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{-2\,x^2-22\,x-1}{x^4-6\,x^3+x+1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{1} \underset{x\to 0}{\sim} -1.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to0^+} \arctan\left(\frac{-2\,x+1}{-x+1}\right) = \arctan(1) = \frac{1}{4}\pi \neq 0$, et donc :

$$\arctan\left(\frac{-2\,x+1}{-x+1}\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{4}\pi.$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{1}{4}\pi, \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2\arctan(2)}{x^2}.$$

Corrigé 70. On écrit : ← page 7

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-3} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{3}{n}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{4}{n}$ et $x=\frac{3}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{4}{3\,n}-\frac{2}{n+4}-\frac{13}{5\,(n-3)} &= \frac{4}{3\,n}-2\left(\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{13}{5}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= -\frac{49}{15\,n}+\frac{1}{5\,n^2}-\frac{277}{5\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 71. Au voisinage de 0, on a : $\tan(x) = x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $e^x = 1+x+\underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 7

$$\frac{\tan(x)-\tan(8\,x)}{e^{(2\,x)}-1} = \frac{\left(x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(8\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)} = \frac{-7\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}{2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-7\,x}{2\,x} = -\frac{7}{2}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\tan(x)-\tan(8\,x)}{e^{(2\,x)}-1} = -\frac{7}{2}$.

Corrigé 72. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un déve- ← page 7

loppement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. On compose ce développement limité avec celui de $x \mapsto \tan(x)$, ce qui est licite puisque $-5\sinh(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient :

$$\begin{aligned} -\tan(5\sinh(x)) &= +\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= -5x - \frac{85}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $-\tan(5\sinh(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} -5x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{5x} - \frac{1}{\tan(5\sinh(x))} = \frac{5x + \left(-5x - \frac{85}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}{-5x\tan(5\sinh(x))} = \frac{-\frac{85}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{-5x\tan(5\sinh(x))} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{85}{2}x^3}{-25x^2} = \frac{17}{10}x.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{5x} - \frac{1}{\tan(5\sinh(x))}\right) = 0.$

Corrigé 73. Composons les développements limités en 0 de $x \mapsto \sinh(x)$, $x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$ avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{n} \to 0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 2, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 2 dans ce qui suit. ← page 7

On a :

$$\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2), \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \quad \text{et :} \quad \arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{n} - \sinh\left(\frac{2}{n}\right) - 6n\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + 2n\arctan\left(\frac{3}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n} - \left(\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 6\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 6\left(1 - \frac{3}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{20}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{20}{n^2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 74. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta)$. De cela, on déduit facilement : ← page 7

$$\frac{2x^3 + x^2 + x}{-4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x^3}{-4x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{-2x^2 - 2x}{-x^2 - 5x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2x^2}{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2.$$

Le fait que la première fraction rationnelle tende vers 0 autorise à écrire, en vertu de l'équivalent $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:
$\arctan\left(\dfrac{2x^3 + x^2 + x}{-4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x^3 + x^2 + x}{-4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2x}$. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x} \times (2) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}.$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{2x^3 + x^2 + x}{-4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 1} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{-1} \underset{x\to 0^+}{\sim} -x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{-2x^2 - 2x}{-x^2 - 5x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2x}{-1} \underset{x\to 0}{\sim} 2x.$$

Le fait que la première fraction rationnelle tende vers 0 autorise à écrire, en vertu de l'équivalent $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:

$$\arctan\left(\frac{2x^3 + x^2 + x}{-4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 1}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2x^3 + x^2 + x}{-4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 1} \underset{x\to 0^+}{\sim} -x.$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -2x^2, \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}.$$

Corrigé 75. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-x$) avec celui de $x \mapsto \cos(x)$, ce qui est licite puisque $-\frac{3}{4}\arctan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{4}\arctan(x)\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(-x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= 1 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{411}{2048}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cos\left(\frac{3}{4}\arctan(x)\right) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{9}{32}x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{4}\arctan(x)\right) - 1} + \frac{32}{9x^2} = \frac{9x^2 + 32\left(-\frac{9}{32}x^2 + \frac{411}{2048}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)}{9x^2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\arctan(x)\right) - 1\right)} = \frac{\frac{411}{64}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{9x^2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\arctan(x)\right) - 1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{411}{2048}x^4}{-\frac{81}{32}x^4} = -\frac{137}{54}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{4}\arctan(x)\right) - 1} + \frac{32}{9x^2}\right) = -\frac{137}{54}$.

Corrigé 76. Composons les développements limités en 0 de $x \mapsto \sinh(x)$, $x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{x}$ et $x \mapsto \cos(x)$ avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{n} \to 0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 2, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 2 dans ce qui suit. ← page 7
On a :

$$\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right), \quad \sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \quad \text{et :} \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sinh\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2}n\sinh\left(\frac{2}{n}\right) - \cos\left(\frac{2}{n}\right)\\ &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(1 + \frac{2}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{2}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{8}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{3n^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 77. On a : ← page 8

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{et :} \quad x\cos(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}-3\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) - 20\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} &= -3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 20\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= -\frac{23}{n} + \frac{3}{2n^2} + \frac{9}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{3}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$(x+1)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\left(-\frac{20\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}-3\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=1+\frac{1}{3}\left(-\frac{23}{n}+\frac{3}{2n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{23}{n}+\frac{3}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+\frac{5}{81}\left(-\frac{23}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$=1+\frac{1}{3}\left(-\frac{23}{n}+\frac{3}{2n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{529}{n^2}-\frac{69}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{5}{81}\left(-\frac{12167}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$=1-\frac{23}{3n}-\frac{1049}{18n^2}-\frac{59971}{81n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(3x)+1\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$ et $\cosh(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\sin(3x)+1)\underset{x\to0}{\sim}\sin(3x)$, et : $\ln(\cosh(x))\underset{x\to0}{\sim}\cosh(x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u)\underset{u\to0}{\sim}u$ et $\cosh(u)-1\underset{u\to0}{\sim}\frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u=3x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 8

$$\frac{\ln(\sin(3x)+1)}{\ln(\cosh(x))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\sin(3x)}{\cosh(x)-1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{3x}{\frac{1}{2}x^2}\underset{x\to0}{\sim}\frac{6}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\sin(x)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(4x))}{\ln(\sin(3x))}=\frac{\ln(4x+\underset{x\to0}{o}(x))}{\ln(3x+\underset{x\to0}{o}(x))}=\frac{\ln((4x)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}{\ln((3x)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}=\frac{\ln(4)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}{\ln(3)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\times\frac{6}{x}=\frac{6}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

Corrigé 79. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $4x$) avec celui de $x\mapsto\tan(x)$, ce qui est licite puisque $4\cosh(4x)-4\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, et on obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}\tan(4\cosh(4x)-4)&=+\left(8x^2+\frac{32}{3}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\right)+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\\&=32x^2+\frac{128}{3}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\tan(4\cosh(4x)-4)\underset{x\to0^+}{\sim}32x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\tan(4\cosh(4x)-4)}-\frac{1}{32x^2}=\frac{32x^2-\left(32x^2+\frac{128}{3}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\right)}{32x^2\tan(4\cosh(4x)-4)}=\frac{-\frac{128}{3}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)}{32x^2\tan(4\cosh(4x)-4)}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{-\frac{128}{3}x^4}{1024x^4}=-\frac{1}{24}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\tan(4\cosh(4x)-4)}-\dfrac{1}{32x^2}\right)=-\dfrac{1}{24}$.

Corrigé 80. Au voisinage de 0, on a : $\ln(x+1)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 8

$$\frac{\ln(2x+1)-\ln(x+1)}{\cos(3x)-1}=\frac{\left(2x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{-\frac{9}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}=\frac{x+\underset{x\to0}{o}(x)}{-\frac{9}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{-\frac{9}{2}x^2}=-\frac{2}{9x}.$$

Par conséquent : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2x+1)-\ln(x+1)}{\cos(3x)-1} = -\infty$.

Corrigé 81. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 8

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-n\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)+n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-n\ln\left(n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= -n\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{3n}-1+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-1.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} -n\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)+n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -1$, puis : $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{(-1)}$ par continuité en -1 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{(-1)} = e^{(-1)}\left(\exp\left(\frac{1}{3n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^{(-1)}}{3n}$$

(on utilise la formule : $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 82. On écrit : ← page 8

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\frac{2}{n}$ et $x=\frac{2}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{13}{n}+\frac{15}{n+2}+\frac{1}{n-2} &= -\frac{13}{n}+15\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{3}{n}-\frac{28}{n^2}+\frac{64}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 83. Commençons par la deuxième fraction. On a $\arctan(3x)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ et $\cos(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to 1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\arctan(3x)+1)\underset{x\to 0}{\sim}\arctan(3x)$, et : $\ln(\cos(x))\underset{x\to 0}{\sim}\cos(x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\arctan(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$ et $\cos(u)-1\underset{u\to 0}{\sim}-\frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u=3x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 8

$$\frac{\ln(\arctan(3x)+1)}{\ln(\cos(x))}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\arctan(3x)}{\cos(x)-1}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{3x}{-\frac{1}{2}x^2}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{6}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\arctan(3x))}{\ln(e^{(4x)}-1)} = \frac{\ln(3x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(4x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((3x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((4x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \left(-\frac{6}{x}\right) = -\frac{6}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Corrigé 84. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-x$) avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $-\sinh(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 8

$$\begin{aligned} e^{(-\sinh(x))} &= 1 + \left(-x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{(-\sinh(x))} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{e^{(-\sinh(x))}-1} = \frac{x + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)}{x\left(e^{(-\sinh(x))}-1\right)} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x\left(e^{(-\sinh(x))}-1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{e^{(-\sinh(x))}-1}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Corrigé 85. Pour simplifier la rédaction, nous utiliserons la notation « $u(x) \ll v(x)$ » pour dire : $u(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(v(x))$. Grâce aux croissances comparées, nous avons les relations de prépondérance suivantes : ← page 8

$$x\ln(x+1)^2 \ll x^6 \ll x^3e^x \ll e^{(3x)}\ln(x+1)^3,$$

et :

$$e^{(-3x)} \ll e^{(-x)}\ln(x)^5 \ll \ln(x)^5 \ll x^2\ln(x).$$

Nous laissons le lecteur vérifier chaque relation de prépondérance en montrant que le quotient des termes à comparer tend vers zéro. On retiendra l'idée informelle que l'exponentielle « l'emporte » : c'est donc la plus « grande » exponentielle qui détermine la fonction prépondérante. S'il apparaît la même exponentielle dans deux termes à comparer, on utilise les puissances de x pour trancher, puisque le logarithme est négligeable devant elles, etc. On en déduit :

$$-x^6 - x^3e^x - 20\,e^{(3x)}\ln(x+1)^3 - x\ln(x+1)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -20\,e^{(3x)}\ln(x+1)^3.$$

De même : $2\,e^{(-x)}\ln(x)^5 - 14\ln(x)^5 + x^2\ln(x) - 11\,e^{(-3x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(x)$.

De plus, on a $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ (en effet : $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$), ce qui simplifie le premier équivalent. On conclut :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-20\,e^{(3x)}\ln(x)^3}{x^2\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{20\,e^{(3x)}\ln(x)^2}{x^2}.$$

Corrigé 86. Rappelons-nous que si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$. De cela, on déduit facilement : ← page 8

$$\frac{-x^3 - x + 2}{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-x^3}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2.$$

Attention à ne pas penser que $\sin\left(\frac{-x^4-x^3+2}{x^3+61\,x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(-x)$ sous prétexte que $\frac{-x^4-x^3+2}{x^3+61\,x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$. Nous savons que les équivalents se composent mal, l'exponentielle et le logarithme donnant des contre-exemples classiques. On ne peut pas simplifier cette quantité. On a donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin\left(-\frac{x^4+x^3-2}{x^3+61\,x+1}\right) \times \left(-x^2\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2 \sin\left(-\frac{x^4+x^3-2}{x^3+61\,x+1}\right).$$

Ensuite, au voisinage de 0, on raisonne de même, et on trouve :

$$\frac{-x^4-x^3+2}{x^3+61\,x+1} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{2}{1} \underset{x\to0^+}{\sim} 2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 2, \qquad \frac{-x^3-x+2}{x+2} \underset{x\to0}{\sim} \frac{2}{2} \underset{x\to0}{\sim} 1.$$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to0^+} \sin\left(\frac{-x^4-x^3+2}{x^3+61\,x+1}\right) = \sin(2) \neq 0$, et donc :

$$\sin\left(\frac{-x^4-x^3+2}{x^3+61\,x+1}\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \sin(2).$$

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \sin(2), \text{ et : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2 \sin\left(-\frac{x^4+x^3-2}{x^3+61\,x+1}\right).$$

Corrigé 87. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)$. On compose ce développement limité avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 8

$$\begin{aligned} e^{(\cos(x)-1)} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{(\cos(x)-1)} - 1 \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{1}{2}\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$\frac{1}{e^{(\cos(x)-1)}-1} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\right)}{x^2\left(e^{(\cos(x)-1)}-1\right)} = \frac{\frac{1}{3}\,x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)}{x^2\left(e^{(\cos(x)-1)}-1\right)} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\frac{1}{6}\,x^4}{-\frac{1}{2}\,x^4} = -\frac{2}{3}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{e^{(\cos(x)-1)}-1} + \frac{2}{x^2}\right) = -\frac{2}{3}$.

Corrigé 88. On a : ← page 9

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right), \quad \text{ et : } \quad \cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2\sin(x) + \cosh(x) &= 2\left(x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 1 + 2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} &\ln(\cosh(x) + 2\,\sin(x)) \\ &= \left(2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2\,x + \underset{x\to0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right) \\ &= \left(2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(4\,x^2 + 2\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{3}\left(8\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right) \\ &= 2\,x - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{4}{3}\,x^3 + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-\frac{5}{4}x$) avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $-\frac{1}{3}\tan\left(\frac{5}{4}x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 9

$$\begin{aligned} e^{\left(-\frac{1}{3}\tan\left(\frac{5}{4}x\right)\right)} &= 1 + \left(-\frac{5}{4}x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 - \frac{5}{12}x + \frac{25}{288}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{\left(-\frac{1}{3}\tan\left(\frac{5}{4}x\right)\right)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{5}{12}x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{12}{5x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{1}{3}\tan\left(\frac{5}{4}x\right)\right)} - 1} = \frac{5x + 12\left(-\frac{5}{12}x + \frac{25}{288}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)}{5x\left(e^{\left(-\frac{1}{3}\tan\left(\frac{5}{4}x\right)\right)} - 1\right)} = \frac{\frac{25}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{5x\left(e^{\left(-\frac{1}{3}\tan\left(\frac{5}{4}x\right)\right)} - 1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{25}{288}x^2}{-\frac{25}{12}x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{12}{5x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{1}{3}\tan\left(\frac{5}{4}x\right)\right)} - 1}\right) = -\frac{1}{2}$.

Corrigé 90. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(x+1) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cos(3x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\ln(x+1)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x+1)$, et : $\ln(\cos(3x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(3x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u = 3x$ dans le second développement limité, impliquent : ← page 9

$$\frac{\ln(\ln(x+1)+1)}{\ln(\cos(3x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x+1)}{\cos(3x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{-\frac{9}{2}x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{9x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sin(4x))}{\ln(\ln(2x+1))} = \frac{\ln(4x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(2x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((4x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((2x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \left(-\frac{2}{9x}\right) = -\frac{2}{9x},$$

et en outre : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Corrigé 91. On a : ← page 9

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad \sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} -\sinh(x) + 7\sin(x) &= -\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + 7\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 6x - \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto \ln(x+1)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\ln(7\sin(x) - \sinh(x) + 1)\\
&= \left(6x - \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(6x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(6x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= \left(6x - \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(36x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{3}\left(216x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= 6x - 18x^2 + \frac{212}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 92. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $\frac{4}{5}x$) avec celui de $x \mapsto \sin(x)$, ce qui est licite puisque $-\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}
-\sin\left(\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right)\right) &= +\left(\frac{4}{5}x + \frac{32}{375}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{5}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= -\frac{8}{15}x - \frac{64}{2025}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $-\sin\left(\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{8}{15}x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$\frac{15}{8x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right)\right)} = \frac{8x + 15\left(-\frac{8}{15}x - \frac{64}{2025}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)}{-8x\sin\left(\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right)\right)} = \frac{-\frac{64}{135}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{-8x\sin\left(\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right)\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{64}{2025}x^3}{-\frac{64}{15}x^2} = \frac{1}{9}x.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{15}{8x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right)\right)}\right) = 0.$

Corrigé 93. On a : ← page 9

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \qquad \text{et :} \qquad \arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\begin{aligned}
-2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) &= -2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec le développement limité de $x \mapsto (x+1)^{\frac{5}{2}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$(x+1)^{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
&\left(n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}\\
&= 1 + \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{15}{8}\left(-\frac{2}{n} - \frac{1}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{5}{16}\left(-\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 + \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{4}{n^2} + \frac{4}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{5}{16}\left(-\frac{8}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1 - \frac{5}{n} + \frac{20}{3n^2} + \frac{5}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 94. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3+n^2-n-1}-\sqrt{n^2-2} &= \sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3}\right)}-\sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2-2}{n^2}\right)}\\
&= n\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}-n\times\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\\
&= n\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\
&= n\left[\frac{1}{3\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{3}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-n-1}-\sqrt{n^2-2}\right)=\dfrac{1}{3}$.

Corrigé 95. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\tan(x)=x+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $4\,x$) avec celui de $x\mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $-\frac{4}{3}\tan(4\,x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, et on obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}
e^{\left(-\frac{4}{3}\tan(4\,x)\right)} &= 1+\left(4\,x+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)+\frac{1}{2}\left(4\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\\
&= 1-\frac{16}{3}\,x+\frac{128}{9}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{\left(-\frac{4}{3}\tan(4\,x)\right)}-1\underset{x\to0^+}{\sim}-\frac{16}{3}\,x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{3}{16\,x}+\frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{3}\tan(4\,x)\right)}-1}=\frac{16\,x+3\left(-\frac{16}{3}\,x+\frac{128}{9}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)}{16\,x\left(e^{\left(-\frac{4}{3}\tan(4\,x)\right)}-1\right)}=\frac{\frac{128}{3}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{16\,x\left(e^{\left(-\frac{4}{3}\tan(4\,x)\right)}-1\right)}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{\frac{128}{9}\,x^2}{-\frac{256}{3}\,x^2}=-\frac{1}{2}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{3}{16\,x}+\dfrac{1}{e^{\left(-\frac{4}{3}\tan(4\,x)\right)}-1}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Corrigé 96. Composons les développements limités en 0 de $x\mapsto\arctan(x)$, $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto\cosh(x)$ avec $\dfrac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a $\dfrac{1}{n}\to0$). Notons que si l'on fait nos développements à un ordre strictement inférieur à 3, alors tous les termes se compensent et il ne reste plus que le terme d'erreur (faire *vraiment* le calcul pour s'en convaincre !). Nous le faisons donc à l'ordre 3 dans ce qui suit. ← page 9
On a :

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right),\quad e^x=1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\quad\text{et :}\quad\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n}-8\,\arctan\left(\frac{2}{n}\right)+7\,e^{\frac{2}{n}}-7\,\cosh\left(\frac{2}{n}\right)\\
&=\frac{2}{n}-8\left(\frac{2}{n}-\frac{8}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+7\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-7\left(1+\frac{2}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=\frac{92}{3\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{92}{3\,n^3},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 97. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)$. On ← page 9

compose ce développement limité avec celui de $x \mapsto \arctan(x)$, ce qui est licite puisque $\frac{1}{5}\sinh(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{5}\sinh(x)\right) &= +\left(x+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{3}\left(x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= \frac{1}{5}x+\frac{23}{750}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\arctan\left(\frac{1}{5}\sinh(x)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{5}x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$-\frac{5}{x}+\frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{5}\sinh(x)\right)} = \frac{x-5\left(\frac{1}{5}x+\frac{23}{750}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)}{x\arctan\left(\frac{1}{5}\sinh(x)\right)} = \frac{-\frac{23}{150}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{x\arctan\left(\frac{1}{5}\sinh(x)\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{23}{750}x^3}{\frac{1}{5}x^2} = -\frac{23}{30}x.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{5}{x}+\frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{5}\sinh(x)\right)}\right)=0.$

Corrigé 98. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\displaystyle\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{2}{n}$ et $x=\dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{57\,n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-1} &= \frac{1}{57\,n}-1\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= -\frac{113}{57\,n}+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Corrigé 99. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $4\,x$) avec celui de $x\mapsto\cos(x)$, ce qui est licite puisque $-\frac{3}{2}\sinh(4\,x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$, et on obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{2}\sinh(4\,x)\right) &= 1-\frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}x^3+4\,x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2+\frac{1}{24}\left(4\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= 1-18\,x^2-42\,x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cos\left(\frac{3}{2}\sinh(4\,x)\right)-1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -18\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\sinh(4\,x)\right)-1}+\frac{1}{18\,x^2}=\frac{18\,x^2+\left(-18\,x^2-42\,x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)}{18\,x^2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\sinh(4\,x)\right)-1\right)}=\frac{-42\,x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{18\,x^2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\sinh(4\,x)\right)-1\right)}\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{-42\,x^4}{-324\,x^4}=\frac{7}{54}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\sinh(4\,x)\right)-1}+\frac{1}{18\,x^2}\right)=\frac{7}{54}.$

Corrigé 100. On écrit : ← page 9

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même : $\displaystyle\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (on utilise deux fois le développement limité en 0 de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$, avec respectivement $x=-\dfrac{3}{n}$ et $x=\dfrac{1}{n}$: ces deux quantités tendent bien vers 0 quand $n\to+\infty$).

On en déduit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}-\frac{12}{n+3}-\frac{7}{8\,(n-1)} &= -\frac{1}{n}-12\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{7}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -\frac{111}{8\,n}+\frac{281}{8\,n^2}-\frac{871}{8\,n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$