Développement en série entière d'une fraction rationnelle

Développement en série entière en 0 d'une fraction rationnelle. Consulter au besoin le document *Méthodes* du chapitre, section 3.1.

Exercice 1. Développer en série entière en 0 l'application : → page 13

$$f : x \mapsto \frac{1}{10\,x^2 - x - 4}.$$

Exercice 2. Développer en série entière en 0 l'application : → page 13

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 - 34\,x - 1}.$$

Exercice 3. → page 14

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 - 2\,x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \arctan\left(2\,x - 1\right).$$

Exercice 4. Développer en série entière en 0 l'application : → page 15

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 6}.$$

Exercice 5. Développer en série entière en 0 l'application : → page 16

$$f : x \mapsto \frac{1}{3\,x^2 - 5}.$$

Exercice 6. Développer en série entière en 0 l'application : → page 16

$$f : x \mapsto \frac{1}{12\,x^2 + 15}.$$

Exercice 7. → page 16

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 2}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(2\,x - 1)\right).$$

Exercice 8. Développer en série entière en 0 l'application : → page 17

$$f : x \mapsto \frac{1}{4\,x^2 + 3\,x - 2}.$$

Exercice 9. → page 18

1. Développer en série entière en 0 l'application :
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$
2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :
$$F : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2\,x+1)\right).$$

Exercice 10. → page 19

1. Développer en série entière en 0 l'application :
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2\,x + 2}.$$
2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :
$$F : x \mapsto \arctan(x-1).$$

Exercice 11. Développer en série entière en 0 l'application : → page 20
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

Exercice 12. Développer en série entière en 0 l'application : → page 20
$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 + 1}.$$

Exercice 13. Développer en série entière en 0 l'application : → page 21
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 78\,x + 8}.$$

Exercice 14. Développer en série entière en 0 l'application : → page 21
$$f : x \mapsto \frac{1}{4\,x^2 + x - 2}.$$

Exercice 15. Développer en série entière en 0 l'application : → page 22
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Exercice 16. Développer en série entière en 0 l'application : → page 22
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 10\,x + 1}.$$

Exercice 17. Développer en série entière en 0 l'application : → page 23
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2\,x + 1}.$$

Exercice 18. → page 23

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4\,x + 8}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\,x + 1\right).$$

Exercice 19. → page 24

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{18\,x^2 - 7\,x + 2}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{95}\sqrt{95}\arctan\left(\frac{1}{95}\sqrt{95}(36\,x - 7)\right).$$

Exercice 20. Développer en série entière en 0 l'application : → page 25

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 - x - 5}.$$

Exercice 21. Développer en série entière en 0 l'application : → page 26

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 9}.$$

Exercice 22. Développer en série entière en 0 l'application : → page 27

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 + 2\,x - 1}.$$

Exercice 23. Développer en série entière en 0 l'application : → page 27

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 8}.$$

Exercice 24. Développer en série entière en 0 l'application : → page 27

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Exercice 25. → page 27

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 52}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{69}\sqrt{23}\arctan\left(\frac{1}{69}\sqrt{23}(2\,x + 1)\right).$$

Exercice 26. Développer en série entière en 0 l'application : → page 29

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Exercice 27. Développer en série entière en 0 l'application : → page 29

$$f : x \mapsto \frac{1}{4\,x^2 - x - 3}.$$

Exercice 28. → page 29

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2\,x - 1)\right).$$

Exercice 29. → page 30

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{8\,x^2 + 4\,x + 3}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{1}{10}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}(4\,x + 1)\right).$$

Exercice 30. Développer en série entière en 0 l'application : → page 32

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3}.$$

Exercice 31. → page 32

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{102\,x^2 + 3\,x + 8}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{3255}\sqrt{3255}\arctan\left(\frac{1}{1085}\sqrt{3255}(68\,x + 1)\right).$$

Exercice 32. Développer en série entière en 0 l'application : → page 33

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4\,x - 1}.$$

Exercice 33. Développer en série entière en 0 l'application : → page 33

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 1}.$$

Exercice 34. Développer en série entière en 0 l'application : → page 34

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$

Exercice 35. → page 35

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 + 6\,x + 15}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{1}{21}\sqrt{21}\arctan\left(\frac{1}{21}\sqrt{21}(2\,x + 3)\right).$$

Exercice 36. Développer en série entière en 0 l'application : → page 36

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$

Exercice 37. → page 36

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{4\,x^2 + 4\,x + 18}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{1}{34}\sqrt{17}\arctan\left(\frac{1}{17}\sqrt{17}(2\,x + 1)\right).$$

Exercice 38. Développer en série entière en 0 l'application : → page 38

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 18\,x + 5}.$$

Exercice 39. Développer en série entière en 0 l'application : → page 38

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

Exercice 40. Développer en série entière en 0 l'application : → page 39

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3}.$$

Exercice 41. Développer en série entière en 0 l'application : → page 39

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 17\,x + 1}.$$

Exercice 42. Développer en série entière en 0 l'application : → page 40

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+6}.$$

Exercice 43. → page 40

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2\,x+1)\right).$$

Exercice 44. Développer en série entière en 0 l'application : → page 41

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2}.$$

Exercice 45. Développer en série entière en 0 l'application : → page 41

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2-x-1}.$$

Exercice 46. Développer en série entière en 0 l'application : → page 42

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2-3\,x-3}.$$

Exercice 47. Développer en série entière en 0 l'application : → page 42

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}.$$

Exercice 48. Développer en série entière en 0 l'application : → page 42

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2}.$$

Exercice 49. Développer en série entière en 0 l'application : → page 43

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2-x-2}.$$

Exercice 50. Développer en série entière en 0 l'application : → page 44

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}.$$

Exercice 51. Développer en série entière en 0 l'application : → page 44

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4\,x + 1}.$$

Exercice 52. Développer en série entière en 0 l'application : → page 44

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2\,x - 1}.$$

Exercice 53. Développer en série entière en 0 l'application : → page 45

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2\,x - 3}.$$

Exercice 54. Développer en série entière en 0 l'application : → page 46

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 175\,x - 1}.$$

Exercice 55. Développer en série entière en 0 l'application : → page 46

$$f : x \mapsto \frac{1}{5\,x^2 - 17\,x + 7}.$$

Exercice 56. Développer en série entière en 0 l'application : → page 47

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 7}.$$

Exercice 57. Développer en série entière en 0 l'application : → page 47

$$f : x \mapsto \frac{1}{4\,x^2 + 3}.$$

Exercice 58. Développer en série entière en 0 l'application : → page 47

$$f : x \mapsto \frac{1}{13\,x^2 + x - 1}.$$

Exercice 59. → page 48

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3\,x^2 - x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{11}\sqrt{11}\arctan\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}(6\,x - 1)\right).$$

Exercice 60. → page 49

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{5\,x^2 - x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{19}\sqrt{19}\arctan\left(\frac{1}{19}\sqrt{19}(10\,x-1)\right).$$

Exercice 61. Développer en série entière en 0 l'application : → page 50

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2+36\,x-599}.$$

Exercice 62. Développer en série entière en 0 l'application : → page 51

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2-x-2}.$$

Exercice 63. Développer en série entière en 0 l'application : → page 51

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2-x-9}.$$

Exercice 64. Développer en série entière en 0 l'application : → page 52

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2\,x-16}.$$

Exercice 65. Développer en série entière en 0 l'application : → page 53

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2-4\,x+1}.$$

Exercice 66. Développer en série entière en 0 l'application : → page 53

$$f : x \mapsto \frac{1}{5\,x^2+2\,x-3}.$$

Exercice 67. Développer en série entière en 0 l'application : → page 54

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2+1}.$$

Exercice 68. Développer en série entière en 0 l'application : → page 54

$$f : x \mapsto \frac{1}{11\,x^2-1}.$$

Exercice 69. Développer en série entière en 0 l'application : → page 54

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2-4\,x-1}.$$

Exercice 70. → page 55

1. Développer en série entière en 0 l'application :
$$f : x \mapsto \frac{1}{4\,x^2 + 2\,x + 2}.$$
2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :
$$F : x \mapsto \frac{1}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(4\,x + 1)\right).$$

Exercice 71. Développer en série entière en 0 l'application : → page 56
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$

Exercice 72. → page 57

1. Développer en série entière en 0 l'application :
$$f : x \mapsto \frac{1}{4\,x^2 + x + 2}.$$
2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :
$$F : x \mapsto \frac{2}{31}\sqrt{31}\arctan\left(\frac{1}{31}\sqrt{31}(8\,x + 1)\right).$$

Exercice 73. → page 58

1. Développer en série entière en 0 l'application :
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2\,x + 11}.$$
2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :
$$F : x \mapsto \frac{1}{10}\sqrt{10}\arctan\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}(x + 1)\right).$$

Exercice 74. Développer en série entière en 0 l'application : → page 59
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 1}.$$

Exercice 75. Développer en série entière en 0 l'application : → page 60
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$

Exercice 76. → page 60

1. Développer en série entière en 0 l'application :
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 2}.$$
2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :
$$F : x \mapsto \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(2\,x - 1)\right).$$

Exercice 77. Développer en série entière en 0 l'application : → page 62

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2\,x - 6}.$$

Exercice 78. → page 62

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2\,x + 2}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \arctan\left(x - 1\right).$$

Exercice 79. Développer en série entière en 0 l'application : → page 63

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 5\,x - 2}.$$

Exercice 80. Développer en série entière en 0 l'application : → page 64

$$f : x \mapsto \frac{1}{3\,x^2 + 19\,x + 2}.$$

Exercice 81. Développer en série entière en 0 l'application : → page 64

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 4}.$$

Exercice 82. Développer en série entière en 0 l'application : → page 65

$$f : x \mapsto \frac{1}{3\,x^2 + 2\,x - 5}.$$

Exercice 83. Développer en série entière en 0 l'application : → page 66

$$f : x \mapsto \frac{1}{8\,x^2 + 8\,x - 1}.$$

Exercice 84. Développer en série entière en 0 l'application : → page 66

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 1}.$$

Exercice 85. → page 67

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 + x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(4\,x + 1)\right).$$

Exercice 86. → page 68

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 2}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(2\,x + 1)\right).$$

Exercice 87. Développer en série entière en 0 l'application : → page 69

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3\,x - 1}.$$

Exercice 88. Développer en série entière en 0 l'application : → page 70

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2\,x - 1}.$$

Exercice 89. Développer en série entière en 0 l'application : → page 71

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2\,x + 1}.$$

Exercice 90. Développer en série entière en 0 l'application : → page 71

$$f : x \mapsto \frac{1}{6\,x^2 - 5\,x - 4}.$$

Exercice 91. → page 71

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{5\,x^2 - x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{19}\sqrt{19}\arctan\left(\frac{1}{19}\sqrt{19}(10\,x - 1)\right).$$

Exercice 92. Développer en série entière en 0 l'application : → page 73

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 5\,x - 2}.$$

Exercice 93. Développer en série entière en 0 l'application : → page 73

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 + 6\,x - 2}.$$

Exercice 94. Développer en série entière en 0 l'application : → page 74

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 1}.$$

Exercice 95. Développer en série entière en 0 l'application : → page 75

$$f : x \mapsto \frac{1}{14\,x^2 + 3\,x - 1}.$$

Exercice 96. Développer en série entière en 0 l'application : → page 75

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 + 25\,x - 1}.$$

Exercice 97. → page 76

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2\,x - 1)\right).$$

Exercice 98. Développer en série entière en 0 l'application : → page 77

$$f : x \mapsto \frac{1}{7\,x^2 - x - 3}.$$

Exercice 99. → page 78

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3\,x^2 + x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{11}\sqrt{11}\arctan\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}(6\,x + 1)\right).$$

Exercice 100. → page 79

1. Développer en série entière en 0 l'application :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\,x^2 - x + 1}.$$

2. En déduire le développement en série entière en 0 de l'application :

$$F : x \mapsto \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(4\,x - 1)\right).$$

Corrigé 1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{10\,x^2 - x - 4}$. Pour cela, notons que $10\,X^2 - X - 4 = 10\left(X^2 - \frac{1}{10}\,X - \frac{2}{5}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{10}\,X - \frac{2}{5}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{10}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{161}{100}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{10}\,X - \frac{2}{5}$ sont :

← page 1

$$x_1 = \frac{\frac{1}{10} + \sqrt{\frac{161}{100}}}{2} = \frac{1}{20}\sqrt{161} + \frac{1}{20}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{10} - \sqrt{\frac{161}{100}}}{2} = -\frac{1}{20}\sqrt{161} + \frac{1}{20}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{10}\,x - \frac{2}{5}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{10}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{10}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{20}\sqrt{161} + \frac{1}{20}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{20}\sqrt{161} - \frac{1}{20}$. Or $\frac{1}{20}\sqrt{161} + \frac{1}{20} > \frac{1}{20}\sqrt{161} - \frac{1}{20}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{20}\sqrt{161} - \frac{1}{20}$. Posons désormais $R = \frac{1}{20}\sqrt{161} - \frac{1}{20}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{10}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{10}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{161}\sqrt{161}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{20}{\sqrt{161}+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{20}{\sqrt{161}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 2. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 - 34\,x - 1}$. Pour cela, notons que $2\,X^2 - 34\,X - 1 = 2\left(X^2 - 17\,X - \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - 17\,X - \frac{1}{2}$ est $\Delta = (-17)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 291$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 17\,X - \frac{1}{2}$ sont :

← page 1

$$x_1 = \frac{17 + \sqrt{291}}{2}, \quad x_2 = \frac{17 - \sqrt{291}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 17\,x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{291} + \frac{17}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{291} - \frac{17}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{291} + \frac{17}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{291} - \frac{17}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{291} - \frac{17}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{291} - \frac{17}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{582}\sqrt{291}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{291}+17}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{291}-17}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 3. ← page 1

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 - 2\,x + 1}$. Pour cela, notons que $2\,X^2 - 2\,X + 1 = 2\left(X^2 - X + \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - X + \frac{1}{2}$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} = -1$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - X + \frac{1}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = \frac{1}{2}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{2}i\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.
Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{1+(2x-1)^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{1}{4}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\,\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{4}\pi.$$

Corrigé 4. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x-6}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X - 6$ est $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-6) = 25$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - X - 6$ sont : ← page 1

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 3$ et $|x| < |x_2| = 2$. Or $3 > 2$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 2$. Posons désormais $R = 2$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 5. Pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[$, on a $\left|\frac{3}{5}\,x^2\right| < 1$, et donc : ← page 1

$$\forall x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{3}{5}\,x^2} = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\,x^2\right)^n = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 6. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right[$, on a $\left|-\frac{4}{5}\,x^2\right| < 1$, et donc : ← page 1

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{15}\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{5}\,x^2\right)} = \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\,x^2\right)^n = \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 7. ← page 1

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X + 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 = -7$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - X + 2$ sont :

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x + 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = 2$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{2}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{7}i\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} =$

$x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin((n+1)\theta)\, x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{7}\sqrt{7}\frac{\frac{2}{7}\sqrt{7}}{1+\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(2x-1)\right)^2} = \frac{1}{x^2-x+2} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{7}\sqrt{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin((n+1)\theta)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right).$$

Corrigé 8. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+3x-2}$. Pour cela, notons que ← page 1 $4X^2+3X-2 = 4\left(X^2+\frac{3}{4}X-\frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac{3}{4}X-\frac{1}{2}$ est $\Delta = \frac{3}{4}^2 - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{41}{16}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2+\frac{3}{4}X-\frac{1}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{41}{16}}}{2} = \frac{1}{8}\sqrt{41}-\frac{3}{8}, \quad x_2 = \frac{-\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{41}{16}}}{2} = -\frac{1}{8}\sqrt{41}-\frac{3}{8}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{8}\sqrt{41}-\frac{3}{8}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{8}\sqrt{41}+\frac{3}{8}$. Or $\frac{1}{8}\sqrt{41}-\frac{3}{8} < \frac{1}{8}\sqrt{41}+\frac{3}{8}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{8}\sqrt{41}-\frac{3}{8}$. Posons désormais $R = \frac{1}{8}\sqrt{41}-\frac{3}{8}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in]-R,R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{41}\sqrt{41}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{8}{\sqrt{41}+3}\right)^{n+1} - \left(\frac{8}{\sqrt{41}-3}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 9. ← page 1

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Pour cela, notons que le discriminant de X^2+X+1 est $\Delta = 1^2 - 4\times 1 = -3$. Il est strictement négatif, donc les racines de X^2+X+1 sont :
$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$
La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :
$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$
Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :
$$\forall x\in\mathbb{C}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$
Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 1$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = 1$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = 1$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = 1$. Alors :
$$\forall x\in]-R,R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$
Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :
$$\forall x\in]-R,R[\,, \quad f(x) = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$
d'où le résultat.
Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :
$$\forall x\in]-R,R[\,, \quad f(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$
Nous vous laissons vérifier que $\theta = -\frac{2}{3}\pi$ est un argument de x_2, ce qui rend encore plus explicite ce développement.

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2x+1)\right)^2} = \frac{1}{x^2+x+1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi(n+1)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi.$$

Corrigé 10. ← page 2

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+2}$. Pour cela, notons que le discriminant de X^2-2X+2 est $\Delta = (-2)^2 - 4\times 2 = -4$. Il est strictement négatif, donc les racines de X^2-2X+2 sont :

$$x_1 = \frac{2+i\sqrt{4}}{2} = 1+i, \quad x_2 = \frac{2-i\sqrt{4}}{2} = 1-i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = 2$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{2}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R=\sqrt{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{2}i\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{(i+1)^{n+1}} + \frac{1}{(-i+1)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.
Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) =$

$-2i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{x^2-2\,x+2} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{1}{4}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\,\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{4}\pi.$$

Corrigé 11. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-1}$. Pour cela, notons que le discriminant de X^2+X-1 est $\Delta = 1^2 - 4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, donc les racines de X^2+X-1 sont : ← page 2

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 12. Pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$, on a $\left|-2\,x^2\right| < 1$, et donc : ← page 2

$$\forall x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{1-(-2\,x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-2\,x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n\, x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 13. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+78\,x+8}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2+78\,X+8$ est $\Delta = 78^2 - 4\times 8 = 6052$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2+78\,X+8$ sont : ← page 2

$$x_1 = \frac{-78+\sqrt{6052}}{2} = \sqrt{1513}-39, \quad x_2 = \frac{-78-\sqrt{6052}}{2} = -\sqrt{1513}-39.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+78\,x+8} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x|<|x_1|=-\sqrt{1513}+39$ et $|x|<|x_2|=\sqrt{1513}+39$. Or $-\sqrt{1513}+39<\sqrt{1513}+39$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x|<-\sqrt{1513}+39$. Posons désormais $R=-\sqrt{1513}+39$. Alors :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3026}\sqrt{1513}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{1513}+39}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{1513}-39}^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 14. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x\mapsto \dfrac{1}{4\,x^2+x-2}$. Pour cela, notons que $4\,X^2+X-2 = 4\left(X^2+\frac{1}{4}\,X-\frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac14\,X-\frac12$ est $\Delta = \frac{1}{4}^2 - 4\times\left(-\frac12\right) = \frac{33}{16}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2+\frac14\,X-\frac12$ sont : ← page 2

$$x_1 = \frac{-\frac14+\sqrt{\frac{33}{16}}}{2} = \frac18\sqrt{33}-\frac18, \quad x_2 = \frac{-\frac14-\sqrt{\frac{33}{16}}}{2} = -\frac18\sqrt{33}-\frac18.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac14\,x-\frac12} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{8}\sqrt{33} + \frac{1}{8}$. Or $\frac{1}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8} < \frac{1}{8}\sqrt{33} + \frac{1}{8}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8}$. Posons désormais $R = \frac{1}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{33}\sqrt{33}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{8}{\sqrt{33}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{8}{\sqrt{33}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 15. Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a $\left|-x^2\right| < 1$, et donc : ← page 2

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 16. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 10\,x + 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - 10\,X + 1$ est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 = 96$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 10\,X + 1$ sont : ← page 2

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{96}}{2} = 2\sqrt{6} + 5, \quad x_2 = \frac{10 - \sqrt{96}}{2} = -2\sqrt{6} + 5.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 10\,x + 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 2\sqrt{6} + 5$ et $|x| < |x_2| = -2\sqrt{6} + 5$. Or $2\sqrt{6} + 5 > -2\sqrt{6} + 5$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < -2\sqrt{6} + 5$. Posons désormais $R = -2\sqrt{6} + 5$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{24}\sqrt{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(2\sqrt{6}+5\right)^{-n-1} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}-5}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 17. En reconnaissant une identité remarquable, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Par conséquent f est la dérivée de $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$. Or on sait facilement développer en série entière cette dernière fraction rationnelle : ← page 2

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{1-(-x)} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n.$$

En dérivant terme à terme cette relation (ce qui est possible puisque nous sommes en présence d'une somme de série entière de rayon de convergence 1), on obtient :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-1)^n x^{n-1},$$

d'où le résultat.

Corrigé 18. ← page 2

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+8}$. Pour cela, notons que le discriminant de X^2+4X+8 est $\Delta = 4^2 - 4\times 8 = -16$. Il est strictement négatif, donc les racines de X^2+4X+8 sont :

$$x_1 = \frac{-4+i\sqrt{16}}{2} = -2+2i, \quad x_2 = \frac{-4-i\sqrt{16}}{2} = -2-2i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+4x+8} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 2\sqrt{2}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = 8$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = 2\sqrt{2}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = 2\sqrt{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{4} i \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{(2i-2)^{n+1}} + \frac{1}{(-2i-2)^{n+1}} \right) x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} \sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} \sin\left((n+1)\theta\right) x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2} = \frac{1}{x^2 + 4x + 8} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{1}{8}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} \sin\left((n+1)\theta\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{8}\pi.$$

Corrigé 19. ← page 3

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{18x^2 - 7x + 2}$. Pour cela, notons que $18X^2 - 7X + 2 = 18\left(X^2 - \frac{7}{18}X + \frac{1}{9}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{7}{18}X + \frac{1}{9}$ est $\Delta = \left(-\frac{7}{18}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{9} = -\frac{95}{324}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - \frac{7}{18}X + \frac{1}{9}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{7}{18} + i\sqrt{\frac{95}{324}}}{2} = \frac{7}{36} + \frac{1}{36}\sqrt{95}i, \quad x_2 = \frac{\frac{7}{18} - i\sqrt{\frac{95}{324}}}{2} = \frac{7}{36} - \frac{1}{36}\sqrt{95}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{7}{18}x + \frac{1}{9}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{18}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{18}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \frac{1}{3}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = \frac{1}{9}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \frac{1}{3}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \frac{1}{3}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{18}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{18}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{95}i\sqrt{95}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{36}i\sqrt{95} + \frac{7}{36}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{36}i\sqrt{95} + \frac{7}{36}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.
Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \frac{1}{3}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(3^{n+1}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i3^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{95}\sqrt{95}\sum_{n=0}^{+\infty}3^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{95}\sqrt{95}\frac{\frac{36}{95}\sqrt{95}}{1 + \left(\frac{1}{95}\sqrt{95}(36\,x - 7)\right)^2} = \frac{1}{18\,x^2 - 7\,x + 2} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{2}{95}\sqrt{95}\arctan\left(\frac{7}{95}\sqrt{95}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{95}\sqrt{95}3^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{95}\sqrt{95}\arctan\left(\frac{7}{95}\sqrt{95}\right).$$

Corrigé 20. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 - x - 5}$. Pour cela, notons que ← page 3 $2\,X^2 - X - 5 = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{5}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{5}{2}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{41}{4}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{5}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{41} + \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{41}{4}}}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{41} + \frac{1}{4}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{4}\sqrt{41} + \frac{1}{4}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{4}\sqrt{41} - \frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{4}\sqrt{41} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4}\sqrt{41} - \frac{1}{4}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{4}\sqrt{41} - \frac{1}{4}$. Posons désormais $R = \frac{1}{4}\sqrt{41} - \frac{1}{4}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{41}\sqrt{41}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{4}{\sqrt{41}+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{4}{\sqrt{41}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 21. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 9}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + X - 9$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-9) = 37$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + X - 9$ sont : ← page 3

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{37}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + x - 9} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{37} - \frac{1}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{37} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{37} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{37} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{37}\sqrt{37}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{37}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{37}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 22. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 + 2\,x - 1}$. Pour cela, notons que $2\,X^2 + 2\,X - 1 = 2\left(X^2 + X - \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + X - \frac{1}{2}$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + X - \frac{1}{2}$ sont : ← page 3

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 23. Pour tout $x \in \left]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right[$, on a $\left|-\frac{1}{8}x^2\right| < 1$, et donc : ← page 3

$$\forall x \in \left]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{8}x^2\right)} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{8}x^2\right)^n = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 24. Pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$, on a $|x^2| < 1$, et donc : ← page 3

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{1 - x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^2\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 25. ← page 3

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+52}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + X + 52$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 52 = -207$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 + X + 52$ sont :
$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{207}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{23}i, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{207}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{23}i.$$
La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :
$$\frac{1}{x^2+x+52} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$
Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$
Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 2\sqrt{13}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = 52$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = 2\sqrt{13}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = 2\sqrt{13}$. Alors :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$
Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{69}i\sqrt{23}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}i\sqrt{23} - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}i\sqrt{23} - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$
d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = 2\sqrt{13}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{13}}\right)^{n+1} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{13}}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{69}\sqrt{23}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{13}}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{69}\sqrt{23}\frac{\frac{2}{69}\sqrt{23}}{1 + \left(\frac{1}{69}\sqrt{23}(2x+1)\right)^2} = \frac{1}{x^2+x+52} = f(x).$$
Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{2}{69}\sqrt{23}\arctan\left(\frac{1}{69}\sqrt{23}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{69}\sqrt{23}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{13}}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{69}\sqrt{23}\arctan\left(\frac{1}{69}\sqrt{23}\right).$$

Corrigé 26. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $|x^2| < 1$, et donc : ← page 4

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad f(x) = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 27. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{4\,x^2 - x - 3}$. Pour cela, notons que $4\,X^2 - X - 3 = 4\left(X^2 - \frac{1}{4}\,X - \frac{3}{4}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{4}\,X - \frac{3}{4}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{49}{16}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{4}\,X - \frac{3}{4}$ sont : ← page 4

$$x_1 = \frac{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{49}{16}}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{49}{16}}}{2} = -\frac{3}{4}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{4}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 1$ et $|x| < |x_2| = \frac{3}{4}$. Or $1 > \frac{3}{4}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{3}{4}$. Posons désormais $R = \frac{3}{4}$. Alors :

$$\forall x \in]-R,R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in]-R,R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 28. ← page 4

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - X + 1$ sont :

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 1$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = 1$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = 1$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.
Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

Nous vous laissons vérifier que $\theta = -\frac{1}{3}\pi$ est un argument de x_2, ce qui rend encore plus explicite ce développement.

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2x-1)\right)^2} = \frac{1}{x^2-x+1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\pi(n+1)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi.$$

Corrigé 29. ← page 4

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{8x^2+4x+3}$. Pour cela, notons que $8X^2+4X+3 = 8\left(X^2+\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des

commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}$ est $\Delta=\frac{1}{2}^2-4\times\frac{3}{8}=-\frac{5}{4}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2+\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}$ sont :

$$x_1=\frac{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{5}{4}}}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}i,\quad x_2=\frac{-\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{5}{4}}}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{C}\backslash\{x_1,x_2\},\quad f(x)=\frac{1}{8}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)=\frac{1}{8}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que : $|x_1|=|x_2|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2=x_1\overline{x_1}=x_1x_2=\frac{3}{8}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x|<|x_1|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$). Posons désormais $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Alors :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad f(x)=\frac{1}{8}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\frac{1}{8}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad f(x)=-\frac{1}{20}i\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}i\sqrt{5}-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}+\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}i\sqrt{5}-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}=x_2^{-(n+1)}-\overline{x_2}^{-(n+1)}=2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}=2i\mathrm{Im}\left(\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{n+1}e^{-(n+1)\theta}\right)=-2i\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad f(x)=-\frac{1}{10}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F'(x)=\frac{1}{10}\sqrt{5}\frac{\frac{4}{5}\sqrt{5}}{1+\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}(4x+1)\right)^2}=\frac{1}{8x^2+4x+3}=f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0)=\frac{1}{10}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{1}{10}\sqrt{5}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{10}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right).$$

Corrigé 30. Pour tout $x \in \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[$, on a $\left|\frac{1}{3}x^2\right| < 1$, et donc : ← page 4

$$\forall x \in \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}x^2\right)^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 31. ← page 4

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{102\,x^2+3\,x+8}$. Pour cela, notons que $102\,X^2+3\,X+8 = 102\left(X^2+\frac{1}{34}X+\frac{4}{51}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac{1}{34}X+\frac{4}{51}$ est $\Delta = \frac{1}{34}^2 - 4\times\frac{4}{51} = -\frac{1085}{3468}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2+\frac{1}{34}X+\frac{4}{51}$ sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{34}+i\sqrt{\frac{1085}{3468}}}{2} = -\frac{1}{68}+\frac{1}{68}\sqrt{\frac{1085}{3}}i, \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{34}-i\sqrt{\frac{1085}{3468}}}{2} = -\frac{1}{68}-\frac{1}{68}\sqrt{\frac{1085}{3}}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac{1}{34}x+\frac{4}{51}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{C}\backslash\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{102}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{102}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 2\sqrt{\frac{1}{51}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = \frac{4}{51}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = 2\sqrt{\frac{1}{51}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$). Posons désormais $R = 2\sqrt{\frac{1}{51}}$. Alors :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{102}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{102}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{1085}i\sqrt{\frac{1085}{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{68}i\sqrt{\frac{1085}{3}}-\frac{1}{68}\right)^{n+1}}+\frac{1}{\left(-\frac{1}{68}i\sqrt{\frac{1085}{3}}-\frac{1}{68}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = 2\sqrt{\frac{1}{51}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{51}\right)^{n+1}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{2}\sqrt{51}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{1085}\sqrt{\frac{1085}{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{51}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{3255}\sqrt{3255}\frac{\frac{68}{1085}\sqrt{3255}}{1+\left(\frac{1}{1085}\sqrt{3255}(68\,x+1)\right)^2} = \frac{1}{102\,x^2+3\,x+8} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{2}{3255}\sqrt{3255}\arctan\left(\frac{1}{1085}\sqrt{3255}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{1085}\sqrt{\frac{1085}{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{51}\right)^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{2}{3255}\sqrt{3255}\arctan\left(\frac{1}{1085}\sqrt{3255}\right.$$

Corrigé 32. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4\,x-1}$. Pour cela, notons que ← page 4 le discriminant de $X^2-4\,X-1$ est $\Delta = (-4)^2 - 4\times(-1) = 20$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2-4\,X-1$ sont :

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}+2, \quad x_2 = \frac{4-\sqrt{20}}{2} = -\sqrt{5}+2.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-4\,x-1} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x|<|x_1|=\sqrt{5}+2$ et $|x|<|x_2|=\sqrt{5}-2$. Or $\sqrt{5}+2>\sqrt{5}-2$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x|<\sqrt{5}-2$. Posons désormais $R=\sqrt{5}-2$. Alors :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{10}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\sqrt{5}+2\right)^{-n-1}+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 33. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x-1}$. Pour cela, notons que ← page 4 le discriminant de X^2-X-1 est $\Delta = (-1)^2-4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, donc les racines de X^2-X-1 sont :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - X - 2$ sont : ← page 5

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 2$ et $|x| < |x_2| = 1$. Or $2 > 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 35. ← page 5

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2+6\,x+15}$. Pour cela, notons que $2\,X^2+6\,X+15 = 2\left(X^2+3\,X+\frac{15}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+3\,X+\frac{15}{2}$ est $\Delta = 3^2 - 4\times\frac{15}{2} = -21$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2+3\,X+\frac{15}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{-3+i\sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3-i\sqrt{21}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+3\,x+\frac{15}{2}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{15}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = \frac{15}{2}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{15}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{15}{2}}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{42}i\sqrt{21}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{21}-\frac{3}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{21}-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{15}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{21}\sqrt{21}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{21}\sqrt{21}\frac{\frac{2}{21}\sqrt{21}}{1+\left(\frac{1}{21}\sqrt{21}(2\,x+3)\right)^2} = \frac{1}{2\,x^2+6\,x+15} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{1}{21}\sqrt{21}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{21}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{21}\sqrt{21}\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{21}\sqrt{21}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{21}\right).$$

Corrigé 36. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$. Pour cela, notons que le discriminant de X^2+X-2 est $\Delta = 1^2 - 4\times(-2) = 9$. Il est strictement positif, donc les racines de X^2+X-2 sont : ← page 5

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 1$ et $|x| < |x_2| = 2$. Or $1 < 2$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 37. ← page 5

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,(2\,x^2+2\,x+9)}$. Pour cela, notons que $4\,X^2 + 4\,X + 18 = 4\left(X^2 + X + \frac{9}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des

commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+X+\frac{9}{2}$ est $\Delta = 1^2 - 4\times\frac{9}{2} = -17$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2+X+\frac{9}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-i\sqrt{17}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+x+\frac{9}{2}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{C}\backslash\{x_1,x_2\},\quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = \frac{9}{2}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x|<|x_1| = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$). Posons désormais $R=3\sqrt{\frac{1}{2}}$. Alors :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad f(x) = -\frac{1}{68}i\sqrt{17}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{17}-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}+\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{17}-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.
Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)}-\overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = 3\sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^{n+1}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad f(x) = -\frac{1}{34}\sqrt{17}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F'(x) = \frac{1}{34}\sqrt{17}\frac{\frac{2}{17}\sqrt{17}}{1+\left(\frac{1}{17}\sqrt{17}(2x+1)\right)^2} = \frac{1}{2(2x^2+2x+9)} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0)=\frac{1}{34}\sqrt{17}\arctan\left(\frac{1}{17}\sqrt{17}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{1}{34}\sqrt{17}\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin((n+1)\theta)\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{34}\sqrt{17}\arctan\left(\frac{1}{17}\sqrt{17}\right).$$

Corrigé 38. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+18\,x+5}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2+18\,X+5$ est $\Delta = 18^2 - 4\times 5 = 304$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2+18\,X+5$ sont : ← page 5

$$x_1 = \frac{-18+\sqrt{304}}{2} = 2\sqrt{19}-9, \quad x_2 = \frac{-18-\sqrt{304}}{2} = -2\sqrt{19}-9.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+18\,x+5} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = -2\sqrt{19}+9$ et $|x| < |x_2| = 2\sqrt{19}+9$. Or $-2\sqrt{19}+9 < 2\sqrt{19}+9$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < -2\sqrt{19}+9$. Posons désormais $R = -2\sqrt{19}+9$. Alors :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{76}\sqrt{19}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{2\sqrt{19}+9}\right)^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{19}-9}^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 39. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-1}$. Pour cela, notons que le discriminant de X^2+X-1 est $\Delta = 1^2 - 4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, donc les racines de X^2+X-1 sont : ← page 5

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour

avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 40. Pour tout $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$, on a $\left|-\frac{1}{3}x^2\right| < 1$, et donc : ← page 5

$$\forall x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}x^2\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 41. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 17x + 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - 17X + 1$ est $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 1 = 285$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 17X + 1$ sont : ← page 5

$$x_1 = \frac{17 + \sqrt{285}}{2}, \quad x_2 = \frac{17 - \sqrt{285}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 17x + 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{285} + \frac{17}{2}$ et $|x| < |x_2| = -\frac{1}{2}\sqrt{285} + \frac{17}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{285} + \frac{17}{2} > -\frac{1}{2}\sqrt{285} + \frac{17}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < -\frac{1}{2}\sqrt{285} + \frac{17}{2}$. Posons désormais $R = -\frac{1}{2}\sqrt{285} + \frac{17}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{285}\sqrt{285}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{285}+17}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{285}-17}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 42. Pour tout $x \in \left]-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right[$, on a $\left|-\frac{1}{6}\, x^2\right| < 1$, et donc : ← page 6

$$\forall x \in \left]-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{6}\, x^2\right)} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{6}\, x^2\right)^n = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 43. ← page 6

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + X + 1$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 + X + 1$ sont :
$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$
La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :
$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$
Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$
Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 1$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1 \overline{x_1} = x_1 x_2 = 1$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = 1$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = 1$. Alors :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right) x^n.$$
Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{3} i \sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2} i \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} i \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right) x^n,$$
d'où le résultat.
Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i \sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left((n+1)\theta\right) x^n.$$
Nous vous laissons vérifier que $\theta = -\frac{2}{3}\, \pi$ est un argument de x_2, ce qui rend encore plus explicite ce développement.

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2x+1)\right)^2} = \frac{1}{x^2+x+1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi(n+1)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi.$$

Corrigé 44. Pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, on a $\left|-\frac{1}{2}x^2\right| < 1$, et donc : ← page 6

$$\forall x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 45. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \frac{1}{2x^2-x-1}$. Pour cela, notons que $2X^2 - X - 1 = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ sont : ← page 6

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 1$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}$. Or $1 > \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-2)^{n+1} - 1\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 46. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 - 3\,x - 3}$. Pour cela, notons que $2\,X^2 - 3\,X - 3 = 2\left(X^2 - \frac{3}{2}\,X - \frac{3}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{3}{2}\,X - \frac{3}{2}$ est $\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{33}{4}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{3}{2}\,X - \frac{3}{2}$ sont : ← page 6

$$x_1 = \frac{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{33}{4}}}{2} = \frac{1}{4}\,\sqrt{33} + \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{33}{4}}}{2} = -\frac{1}{4}\,\sqrt{33} + \frac{3}{4}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{3}{2}\,x - \frac{3}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{4}\,\sqrt{33} + \frac{3}{4}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{4}\,\sqrt{33} - \frac{3}{4}$. Or $\frac{1}{4}\,\sqrt{33} + \frac{3}{4} > \frac{1}{4}\,\sqrt{33} - \frac{3}{4}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{4}\,\sqrt{33} - \frac{3}{4}$. Posons désormais $R = \frac{1}{4}\,\sqrt{33} - \frac{3}{4}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{33}\,\sqrt{33}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{4}{\sqrt{33} + 3}\right)^{n+1} + \left(-\frac{4}{\sqrt{33} - 3}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 47. Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a $\left|-x^2\right| < 1$, et donc : ← page 6

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 48. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + X - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + X - 2$ sont : ← page 6

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} \right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 1$ et $|x| < |x_2| = 2$. Or $1 < 2$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_1} \right)^n + \frac{1}{x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_2} \right)^n \right) = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} \right) x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 49. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - X - 2$ sont : ← page 6

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} \right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 2$ et $|x| < |x_2| = 1$. Or $2 > 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_1} \right)^n + \frac{1}{x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_2} \right)^n \right) = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} \right) x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + (-1)^{n+1} \right) x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 50. Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a $\left|-x^2\right| < 1$, et donc : ← page 6

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 51. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - 4X + 1$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 = 12$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 4X + 1$ sont : ← page 6

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} + 2, \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = -\sqrt{3} + 2.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \sqrt{3} + 2$ et $|x| < |x_2| = -\sqrt{3} + 2$. Or $\sqrt{3} + 2 > -\sqrt{3} + 2$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < -\sqrt{3} + 2$. Posons désormais $R = -\sqrt{3} + 2$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right) x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\sqrt{3} + 2\right)^{-n-1} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3} - 2}\right)^{n+1}\right) x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 52. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x - 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + 2X - 1$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) = 8$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + 2X - 1$ sont : ← page 7

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1, \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2} - 1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \sqrt{2} - 1$ et $|x| < |x_2| = \sqrt{2} + 1$. Or $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \sqrt{2} - 1$. Posons désormais $R = \sqrt{2} - 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2\,x - 3}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - 2\,X - 3$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) = 16$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 2\,X - 3$ sont : ← page 7

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 2\,x - 3} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 3$ et $|x| < |x_2| = 1$. Or $3 > 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + (-1)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 54. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 175\,x - 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + 175\,X - 1$ est $\Delta = 175^2 - 4 \times (-1) = 30629$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + 175\,X - 1$ sont : ← page 7

$$x_1 = \frac{-175 + \sqrt{30629}}{2}, \quad x_2 = \frac{-175 - \sqrt{30629}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + 175\,x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{30629} - \frac{175}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{30629} + \frac{175}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{30629} - \frac{175}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{30629} + \frac{175}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{30629} - \frac{175}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{30629} - \frac{175}{2}$. Alors :

$$\forall x \in\,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in\,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{30629}\sqrt{30629}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{30629} + 175}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{30629} - 175}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 55. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{5\,x^2 - 17\,x + 7}$. Pour cela, notons que $5\,X^2 - 17\,X + 7 = 5\left(X^2 - \frac{17}{5}\,X + \frac{7}{5}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{17}{5}\,X + \frac{7}{5}$ est $\Delta = \left(-\frac{17}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{7}{5} = \frac{149}{25}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{17}{5}\,X + \frac{7}{5}$ sont : ← page 7

$$x_1 = \frac{\frac{17}{5} + \sqrt{\frac{149}{25}}}{2} = \frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10}, \quad x_2 = \frac{\frac{17}{5} - \sqrt{\frac{149}{25}}}{2} = -\frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{17}{5}\,x + \frac{7}{5}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10}$ et $|x| < |x_2| = -\frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10}$. Or $\frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10} > -\frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < -\frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10}$. Posons désormais $R = -\frac{1}{10}\sqrt{149} + \frac{17}{10}$. Alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \frac{1}{149}\sqrt{149}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{10}{\sqrt{149}+17}\right)^{n+1} + \left(-\frac{10}{\sqrt{149}-17}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 56. Pour tout $x \in \left]-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right[$, on a $\left|-\frac{1}{7}x^2\right| < 1$, et donc : ← page 7

$$\forall x \in \left]-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{7}\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{7}x^2\right)} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{7}x^2\right)^n = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 57. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right[$, on a $\left|-\frac{4}{3}x^2\right| < 1$, et donc : ← page 7

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{3}x^2\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{3}x^2\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 58. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{13x^2 + x - 1}$. Pour cela, notons que $13X^2 + X - 1 = 13\left(X^2 + \frac{1}{13}X - \frac{1}{13}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + \frac{1}{13}X - \frac{1}{13}$ est $\Delta = \frac{1}{13}^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{13}\right) = \frac{53}{169}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + \frac{1}{13}X - \frac{1}{13}$ sont : ← page 7

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{13} + \sqrt{\frac{53}{169}}}{2} = \frac{1}{26}\sqrt{53} - \frac{1}{26}, \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{13} - \sqrt{\frac{53}{169}}}{2} = -\frac{1}{26}\sqrt{53} - \frac{1}{26}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + \frac{1}{13}x - \frac{1}{13}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{13}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{13}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour

avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{26}\sqrt{53} - \frac{1}{26}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{26}\sqrt{53} + \frac{1}{26}$. Or $\frac{1}{26}\sqrt{53} - \frac{1}{26} < \frac{1}{26}\sqrt{53} + \frac{1}{26}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{26}\sqrt{53} - \frac{1}{26}$. Posons désormais $R = \frac{1}{26}\sqrt{53} - \frac{1}{26}$. Alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \frac{1}{13}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{13}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \frac{1}{53}\sqrt{53}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{26}{\sqrt{53}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{26}{\sqrt{53}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 59. ← page 7

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 - x + 1}$. Pour cela, notons que $3X^2 - X + 1 = 3\left(X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{3} = -\frac{11}{9}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{3} + i\sqrt{\frac{11}{9}}}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{11}i, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{3} - i\sqrt{\frac{11}{9}}}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{11}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = \frac{1}{3}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = -\frac{1}{11}i\sqrt{11}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{6}i\sqrt{11} + \frac{1}{6}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{6}i\sqrt{11} + \frac{1}{6}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} =$

$x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = -\frac{2}{11}\sqrt{11}\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{11}\sqrt{11}\frac{\frac{6}{11}\sqrt{11}}{1+\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}(6\,x-1)\right)^2} = \frac{1}{3\,x^2 - x + 1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{2}{11}\sqrt{11}\arctan\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{11}\sqrt{11}3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{11}\sqrt{11}\arctan\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}\right).$$

Corrigé 60. ← page 7

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{5\,x^2 - x + 1}$. Pour cela, notons que $5\,X^2 - X + 1 = 5\left(X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{1}{5}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{1}{5}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{5} = -\frac{19}{25}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{1}{5}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{5} + i\sqrt{\frac{19}{25}}}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{19}i, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{5} - i\sqrt{\frac{19}{25}}}{2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{19}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{1}{5}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = \frac{1}{5}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{5}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{5}}$. Alors :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{19} i\sqrt{19} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{10} i\sqrt{19} + \frac{1}{10}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{10} i\sqrt{19} + \frac{1}{10}\right)^{n+1}} \right) x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(5^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i 5^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{19}\sqrt{19} \sum_{n=0}^{+\infty} 5^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin\left((n+1)\theta\right) x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{19}\sqrt{19} \frac{\frac{10}{19}\sqrt{19}}{1 + \left(\frac{1}{19}\sqrt{19}(10\,x - 1)\right)^2} = \frac{1}{5\,x^2 - x + 1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{2}{19}\sqrt{19}\arctan\left(\frac{1}{19}\sqrt{19}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{19}\sqrt{19} 5^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin\left((n+1)\theta\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{19}\sqrt{19}\arctan\left(\frac{1}{19}\sqrt{19}\right).$$

Corrigé 61. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 + 36\,x - 599}$. Pour cela, notons ← page 8 que $2\,X^2 + 36\,X - 599 = 2\left(X^2 + 18\,X - \frac{599}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + 18\,X - \frac{599}{2}$ est $\Delta = 18^2 - 4 \times \left(-\frac{599}{2}\right) = 1522$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + 18\,X - \frac{599}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{-18 + \sqrt{1522}}{2}, \quad x_2 = \frac{-18 - \sqrt{1522}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + 18\,x - \frac{599}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour

avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{1522} - 9$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{1522} + 9$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{1522} - 9 < \frac{1}{2}\sqrt{1522} + 9$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{1522} - 9$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{1522} - 9$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3044}\sqrt{1522}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{1522} + 18}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{1522} - 18}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 62. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 - x - 2}$. Pour cela, notons que ← page 8 $2\,X^2 - X - 2 = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}\,X - 1\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{2}\,X - 1$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times (-1) = \frac{17}{4}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{2}\,X - 1$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4}$. Posons désormais $R = \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{17}\sqrt{17}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{4}{\sqrt{17} + 1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{4}{\sqrt{17} - 1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 63. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 - x - 9}$. Pour cela, notons que ← page 8 $2\,X^2 - X - 9 = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}\,X - \frac{9}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{9}{2}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{73}{4}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{9}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{73}{4}}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{73} + \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{73}{4}}}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{73} + \frac{1}{4}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{4}\sqrt{73} + \frac{1}{4}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{4}\sqrt{73} - \frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{4}\sqrt{73} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4}\sqrt{73} - \frac{1}{4}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{4}\sqrt{73} - \frac{1}{4}$. Posons désormais $R = \frac{1}{4}\sqrt{73} - \frac{1}{4}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{73}\sqrt{73}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{4}{\sqrt{73} + 1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{4}{\sqrt{73} - 1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 64. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x - 16}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + 2X - 16$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-16) = 68$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + 2X - 16$ sont : ← page 8

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{68}}{2} = \sqrt{17} - 1, \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{68}}{2} = -\sqrt{17} - 1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 16} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour

avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \sqrt{17} - 1$ et $|x| < |x_2| = \sqrt{17} + 1$. Or $\sqrt{17} - 1 < \sqrt{17} + 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \sqrt{17} - 1$. Posons désormais $R = \sqrt{17} - 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{34}\sqrt{17}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{17}+1}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{17}-1}^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 65. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 - 4\,x + 1}$. Pour cela, notons que ← page 8 $2\,X^2 - 4\,X + 1 = 2\left(X^2 - 2\,X + \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - 2\,X + \frac{1}{2}$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} = 2$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 2\,X + \frac{1}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 2\,x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$ et $|x| < |x_2| = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 > -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$. Posons désormais $R = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{2}+2}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}-2}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 66. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{5\,x^2 + 2\,x - 3}$. Pour cela, notons que ← page 8 $5\,X^2 + 2\,X - 3 = 5\left(X^2 + \frac{2}{5}\,X - \frac{3}{5}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac{2}{5}\,X-\frac{3}{5}$ est $\Delta=\frac{2}{5}^2-4\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{64}{25}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2+\frac{2}{5}\,X-\frac{3}{5}$ sont :

$$x_1=\frac{-\frac{2}{5}+\sqrt{\frac{64}{25}}}{2}=\frac{3}{5},\quad x_2=\frac{-\frac{2}{5}-\sqrt{\frac{64}{25}}}{2}=-1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac{2}{5}\,x-\frac{3}{5}}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x)=\frac{1}{5}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)=\frac{1}{5}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x|<|x_1|=\frac{3}{5}$ et $|x|<|x_2|=1$. Or $\frac{3}{5}<1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x|<\frac{3}{5}$. Posons désormais $R=\frac{3}{5}$. Alors :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad f(x)=\frac{1}{5}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\frac{1}{5}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad f(x)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}+(-1)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. Pour tout $x\in\left]-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$, on a $|-2\,x^2|<1$, et donc : ← page 8

$$\forall x\in\left]-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right[,\quad f(x)=\frac{1}{1-(-2\,x^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-2\,x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n\,x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 68. Pour tout $x\in\left]-\sqrt{\frac{1}{11}},\sqrt{\frac{1}{11}}\right[$, on a $|11\,x^2|<1$, et donc : ← page 8

$$\forall x\in\left]-\sqrt{\frac{1}{11}},\sqrt{\frac{1}{11}}\right[,\quad f(x)=-\frac{1}{1-11\,x^2}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(11\,x^2\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}11^n x^{2n},$$

d'où le résultat.

Corrigé 69. Nous allons décomposer en éléments simples $f:x\mapsto\dfrac{1}{x^2-4\,x-1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2-4\,X-1$ est $\Delta=(-4)^2-4\times(-1)=20$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2-4\,X-1$ sont : ← page 8

$$x_1=\frac{4+\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}+2,\quad x_2=\frac{4-\sqrt{20}}{2}=-\sqrt{5}+2.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-4\,x-1}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x)=\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)=\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x|<|x_1|=\sqrt{5}+2$ et $|x|<|x_2|=\sqrt{5}-2$. Or $\sqrt{5}+2>\sqrt{5}-2$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x|<\sqrt{5}-2$. Posons désormais $R=\sqrt{5}-2$. Alors :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad f(x)=\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad f(x)=\frac{1}{10}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\sqrt{5}+2\right)^{-n-1}+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. ← page 8

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f:x\mapsto\dfrac{1}{2\,(2\,x^2+x+1)}$. Pour cela, notons que $4\,X^2+2\,X+2=4\left(X^2+\frac{1}{2}\,X+\frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac{1}{2}\,X+\frac{1}{2}$ est $\Delta=\frac{1}{2}^2-4\times\frac{1}{2}=-\frac{7}{4}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2+\frac{1}{2}\,X+\frac{1}{2}$ sont :

$$x_1=\frac{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{7}{4}}}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7}i,\quad x_2=\frac{-\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{7}{4}}}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{C}\backslash\{x_1,x_2\},\quad f(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)=\frac{1}{4}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que : $|x_1|=|x_2|=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2=x_1\overline{x_1}=x_1x_2=\frac{1}{2}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{14}i\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}i\sqrt{7} - \frac{1}{4}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}i\sqrt{7} - \frac{1}{4}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{7}\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{7}\sqrt{7}\frac{\frac{4}{7}\sqrt{7}}{1 + \left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(4x+1)\right)^2} = \frac{1}{2\left(2x^2 + x + 1\right)} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{1}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{7}\sqrt{7}2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right).$$

Corrigé 71. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + X - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + X - 2$ sont : ← page 9

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 1$ et $|x| < |x_2| = 2$. Or $1 < 2$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \,]-R, R[\,,\quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \,]-R, R[\,,\quad f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 72. ← page 9

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{4\,x^2 + x + 2}$. Pour cela, notons que $4\,X^2 + X + 2 = 4\left(X^2 + \frac{1}{4}\,X + \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + \frac{1}{4}\,X + \frac{1}{2}$ est $\Delta = \frac{1}{4}^2 - 4 \times \frac{1}{2} = -\frac{31}{16}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 + \frac{1}{4}\,X + \frac{1}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4} + i\sqrt{\frac{31}{16}}}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{31}i,\quad x_2 = \frac{-\frac{1}{4} - i\sqrt{\frac{31}{16}}}{2} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{31}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1, x_2\},\quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = \frac{1}{2}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Alors :

$$\forall x \in \,]-R, R[\,,\quad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \,]-R, R[\,,\quad f(x) = -\frac{1}{31}i\sqrt{31}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{8}i\sqrt{31} - \frac{1}{8}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{8}i\sqrt{31} - \frac{1}{8}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{31}\sqrt{31}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{31}\sqrt{31}\frac{\frac{8}{31}\sqrt{31}}{1+\left(\frac{1}{31}\sqrt{31}(8x+1)\right)^2} = \frac{1}{4x^2+x+2} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{2}{31}\sqrt{31}\arctan\left(\frac{1}{31}\sqrt{31}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{31}\sqrt{31}2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{31}\sqrt{31}\arctan\left(\frac{1}{31}\sqrt{31}\right).$$

Corrigé 73. ← page 9

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+11}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2+2X+11$ est $\Delta = 2^2 - 4\times 11 = -40$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2+2X+11$ sont :

$$x_1 = \frac{-2+i\sqrt{40}}{2} = -1+\sqrt{10}i, \quad x_2 = \frac{-2-i\sqrt{40}}{2} = -1-\sqrt{10}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+2x+11} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{x_1,x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{11}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = 11$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{11}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{11}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[,\quad f(x) = -\frac{1}{20} i\sqrt{10} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\left(i\sqrt{10}-1\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-i\sqrt{10}-1\right)^{n+1}} \right) x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{11}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[,\quad f(x) = -\frac{1}{10}\sqrt{10}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin\left((n+1)\theta\right) x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F'(x) = \frac{1}{10}\sqrt{10}\frac{\frac{1}{10}\sqrt{10}}{1+\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}(x+1)\right)^2} = \frac{1}{x^2+2\,x+11} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{1}{10}\sqrt{10}\arctan\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R,R\right[,\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{10}\sqrt{10}\left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \sin\left((n+1)\theta\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{10}\sqrt{10}\arctan\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}\right).$$

Corrigé 74. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x-1}$. Pour cela, notons que le discriminant de X^2-X-1 est $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1) = 5$. Il est strictement positif, donc les racines de X^2-X-1 sont : ← page 9

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-x-1} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ et

$|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in\,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in\,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 75. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - X - 2$ sont : ← page 9

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 2$ et $|x| < |x_2| = 1$. Or $2 > 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in\,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in\,]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 76. ← page 9

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X + 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 = -7$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - X + 2$ sont :

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-x+2} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = 2$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{2}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{7}i\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{7}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{7}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\, x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{7}\sqrt{7}\frac{\frac{2}{7}\sqrt{7}}{1+\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(2x-1)\right)^2} = \frac{1}{x^2-x+2} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{7}\sqrt{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right).$$

Corrigé 77. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2\,x - 6}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - 2\,X - 6$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-6) = 28$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 2\,X - 6$ sont : ← page 10

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{28}}{2} = \sqrt{7} + 1, \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{28}}{2} = -\sqrt{7} + 1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 2\,x - 6} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \sqrt{7} + 1$ et $|x| < |x_2| = \sqrt{7} - 1$. Or $\sqrt{7} + 1 > \sqrt{7} - 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \sqrt{7} - 1$. Posons désormais $R = \sqrt{7} - 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{14}\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\sqrt{7} + 1\right)^{-n-1} + \left(-\frac{1}{\sqrt{7} - 1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. ← page 10

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2\,x + 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - 2\,X + 2$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - 2\,X + 2$ sont :

$$x_1 = \frac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i, \quad x_2 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 2\,x + 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = 2$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{2}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{2}i\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{(i+1)^{n+1}} + \frac{1}{(-i+1)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{x^2 - 2\,x + 2} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{1}{4}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{4}\pi.$$

Corrigé 79. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 5\,x - 2}$. Pour cela, notons que ← page 10
le discriminant de $X^2 - 5\,X - 2$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) = 33$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 5\,X - 2$ sont :

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 5\,x - 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{33}+\frac{5}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{33}-\frac{5}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{33}+\frac{5}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{33}-\frac{5}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{33}-\frac{5}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{33}-\frac{5}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{33}\sqrt{33}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{33}+5}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{33}-5}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 80. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{3\,x^2 + 19\,x + 2}$. Pour cela, notons ← page 10 que $3\,X^2 + 19\,X + 2 = 3\left(X^2 + \frac{19}{3}\,X + \frac{2}{3}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + \frac{19}{3}\,X + \frac{2}{3}$ est $\Delta = \frac{19}{3}^2 - 4 \times \frac{2}{3} = \frac{337}{9}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + \frac{19}{3}\,X + \frac{2}{3}$ sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{19}{3} + \sqrt{\frac{337}{9}}}{2} = \frac{1}{6}\sqrt{337} - \frac{19}{6}, \quad x_2 = \frac{-\frac{19}{3} - \sqrt{\frac{337}{9}}}{2} = -\frac{1}{6}\sqrt{337} - \frac{19}{6}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + \frac{19}{3}\,x + \frac{2}{3}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = -\frac{1}{6}\sqrt{337}+\frac{19}{6}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{6}\sqrt{337}+\frac{19}{6}$. Or $-\frac{1}{6}\sqrt{337}+\frac{19}{6} < \frac{1}{6}\sqrt{337}+\frac{19}{6}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < -\frac{1}{6}\sqrt{337}+\frac{19}{6}$. Posons désormais $R = -\frac{1}{6}\sqrt{337}+\frac{19}{6}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{337}\sqrt{337}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{6}{\sqrt{337}+19}\right)^{n+1} - \left(\frac{6}{\sqrt{337}-19}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 81. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 4}$. Pour cela, notons que ← page 10

le discriminant de X^2+X-4 est $\Delta = 1^2 - 4\times(-4) = 17$. Il est strictement positif, donc les racines de X^2+X-4 sont :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+x-4} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x|<|x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{1}{2}$ et $|x|<|x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x|<\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\left]-R,R\right[,\quad f(x) = \frac{1}{17}\sqrt{17}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{17}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{17}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 82. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x\mapsto \dfrac{1}{3\,x^2+2\,x-5}$. Pour cela, notons que ← page 10
$3\,X^2+2\,X-5 = 3\left(X^2+\frac{2}{3}\,X-\frac{5}{3}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac{2}{3}\,X-\frac{5}{3}$ est $\Delta = \frac{2}{3}^2 - 4\times\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{64}{9}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2+\frac{2}{3}\,X-\frac{5}{3}$ sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{64}{9}}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{64}{9}}}{2} = -\frac{5}{3}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac{2}{3}\,x-\frac{5}{3}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = 1$ et $|x| < |x_2| = \frac{5}{3}$. Or $1 < \frac{5}{3}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < 1$. Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 1\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 83. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{8\,x^2 + 8\,x - 1}$. Pour cela, notons que ← page 10 $8\,X^2 + 8\,X - 1 = 8\left(X^2 + X - \frac{1}{8}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + X - \frac{1}{8}$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{2}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + X - \frac{1}{8}$ sont :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + x - \frac{1}{8}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{8}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{8}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{24}\sqrt{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{4}{\sqrt{6} + 2}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{\sqrt{6} - 2}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 84. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 1}$. Pour cela, notons que ← page 10 le discriminant de $X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - X - 1$ sont :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-x-1}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x)=\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)=\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x|<|x_1|=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ et $|x|<|x_2|=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x|<\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$. Posons désormais $R=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad f(x)=\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad f(x)=\frac{1}{5}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}+\left(-\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 85. ← page 10

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f:x\mapsto\dfrac{1}{2\,x^2+x+1}$. Pour cela, notons que $2\,X^2+X+1=2\left(X^2+\frac{1}{2}\,X+\frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2+\frac{1}{2}\,X+\frac{1}{2}$ est $\Delta=\frac{1}{2}^2-4\times\frac{1}{2}=-\frac{7}{4}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2+\frac{1}{2}\,X+\frac{1}{2}$ sont :

$$x_1=\frac{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{7}{4}}}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7}i,\quad x_2=\frac{-\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{7}{4}}}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x-x_1$, et prendre $x\to x_1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b=\frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x\in\mathbb{C}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$. À cet effet, notons que : $|x_1|=|x_2|=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2=x_1\overline{x_1}=x_1x_2=\frac{1}{2}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{7}i\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}i\sqrt{7} - \frac{1}{4}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}i\sqrt{7} - \frac{1}{4}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{7}\sqrt{7}\frac{\frac{4}{7}\sqrt{7}}{1 + \left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(4x+1)\right)^2} = \frac{1}{2x^2 + x + 1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{7}\sqrt{7}2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right).$$

Corrigé 86. ← page 11

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + X + 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 + X + 2$ sont :

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + x + 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule: $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que: $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = 2$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre: $|x| < |x_1| = \sqrt{2}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{2}$. Alors:

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire:

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{7}i\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que: $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle: $x_2 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors: $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels):

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{7}\sqrt{7}\frac{\frac{2}{7}\sqrt{7}}{1 + \left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(2x+1)\right)^2} = \frac{1}{x^2 + x + 2} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit:

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{7}\sqrt{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right).$$

Corrigé 87. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3x - 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + 3X - 1$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) = 13$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + 3X - 1$ sont: ← page 11

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait:

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{13}\sqrt{13}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{13}+3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{13}-3}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 88. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2\,x - 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 + 2\,X - 1$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) = 8$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + 2\,X - 1$ sont : ← page 11

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1, \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2} - 1.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + 2\,x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \sqrt{2} - 1$ et $|x| < |x_2| = \sqrt{2} + 1$. Or $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \sqrt{2} - 1$. Posons désormais $R = \sqrt{2} - 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. En reconnaissant une identité remarquable, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Par conséquent f est la dérivée de $x \mapsto -\dfrac{1}{x+1}$. Or on sait facilement développer en série entière cette dernière fraction rationnelle : ← page 11

$$\forall x \in]-1,1[, \quad -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{1-(-x)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n.$$

En dérivant terme à terme cette relation (ce qui est possible puisque nous sommes en présence d'une somme de série entière de rayon de convergence 1), on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-1)^n\, x^{n-1},$$

d'où le résultat.

Corrigé 90. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{6\,x^2 - 5\,x - 4}$. Pour cela, notons que $6\,X^2 - 5\,X - 4 = 6\left(X^2 - \frac{5}{6}\,X - \frac{2}{3}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{5}{6}\,X - \frac{2}{3}$ est $\Delta = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{121}{36}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{5}{6}\,X - \frac{2}{3}$ sont : ← page 11

$$x_1 = \frac{\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{121}{36}}}{2} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{121}{36}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{5}{6}\,x - \frac{2}{3}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{6}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{4}{3}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}$. Or $\frac{4}{3} > \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{6}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \frac{1}{11}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + (-2)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 91. ← page 11

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{5\,x^2 - x + 1}$. Pour cela, notons que $5\,X^2 - X + 1 = 5\left(X^2 - \frac{1}{5}\,X + \frac{1}{5}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{5}\,X + \frac{1}{5}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{5} = -\frac{19}{25}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{5}\,X + \frac{1}{5}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{5} + i\sqrt{\frac{19}{25}}}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{19}i, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{5} - i\sqrt{\frac{19}{25}}}{2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{19}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{5}\,x + \frac{1}{5}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{1}{5}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = \frac{1}{5}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{5}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{5}}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{5}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{19}i\sqrt{19}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{10}i\sqrt{19} + \frac{1}{10}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{10}i\sqrt{19} + \frac{1}{10}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(5^{\frac{1}{2}\,n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i5^{\frac{1}{2}\,n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{19}\sqrt{19}\sum_{n=0}^{+\infty}5^{\frac{1}{2}\,n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{19}\sqrt{19}\frac{\frac{10}{19}\sqrt{19}}{1 + \left(\frac{1}{19}\sqrt{19}(10\,x - 1)\right)^2} = \frac{1}{5\,x^2 - x + 1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{2}{19}\sqrt{19}\arctan\left(\frac{1}{19}\sqrt{19}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{19}\sqrt{19}5^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{19}\sqrt{19}\arctan\left(\frac{1}{19}\sqrt{19}\right).$$

Corrigé 92. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 5x - 2}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - 5X - 2$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) = 33$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - 5X - 2$ sont : ← page 11

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 5x - 2} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{5}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{33} - \frac{5}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{5}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{33} - \frac{5}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{33} - \frac{5}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{33} - \frac{5}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{33}\sqrt{33}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{33} + 5}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{33} - 5}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\left(x^2 + 3x - 1\right)}$. Pour cela, notons que $2X^2 + 6X - 2 = 2\left(X^2 + 3X - 1\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + 3X - 1$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) = 13$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + 3X - 1$ sont : ← page 11

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{26}\sqrt{13}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{13}+3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{13}-3}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 94. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - X - 1$ sont : ← page 11

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - x - 1} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Posons désormais $R = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 95. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{14\,x^2 + 3\,x - 1}$. Pour cela, notons que $14\,X^2 + 3\,X - 1 = 14\left(X^2 + \frac{3}{14}\,X - \frac{1}{14}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + \frac{3}{14}\,X - \frac{1}{14}$ est $\Delta = \frac{3}{14}^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{65}{196}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + \frac{3}{14}\,X - \frac{1}{14}$ sont : ← page 12

$$x_1 = \frac{-\frac{3}{14} + \sqrt{\frac{65}{196}}}{2} = \frac{1}{28}\sqrt{65} - \frac{3}{28}, \quad x_2 = \frac{-\frac{3}{14} - \sqrt{\frac{65}{196}}}{2} = -\frac{1}{28}\sqrt{65} - \frac{3}{28}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + \frac{3}{14}\,x - \frac{1}{14}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{14}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{14}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{28}\sqrt{65} - \frac{3}{28}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{28}\sqrt{65} + \frac{3}{28}$. Or $\frac{1}{28}\sqrt{65} - \frac{3}{28} < \frac{1}{28}\sqrt{65} + \frac{3}{28}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{28}\sqrt{65} - \frac{3}{28}$. Posons désormais $R = \frac{1}{28}\sqrt{65} - \frac{3}{28}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{14}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{14}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{65}\sqrt{65}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{28}{\sqrt{65} + 3}\right)^{n+1} - \left(\frac{28}{\sqrt{65} - 3}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 96. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2 + 25\,x - 1}$. Pour cela, notons que $2\,X^2 + 25\,X - 1 = 2\left(X^2 + \frac{25}{2}\,X - \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + \frac{25}{2}\,X - \frac{1}{2}$ est $\Delta = \frac{25}{2}^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{633}{4}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 + \frac{25}{2}\,X - \frac{1}{2}$ sont : ← page 12

$$x_1 = \frac{-\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{633}{4}}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{633} - \frac{25}{4}, \quad x_2 = \frac{-\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{633}{4}}}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{633} - \frac{25}{4}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + \frac{25}{2}\,x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{4}\sqrt{633} - \frac{25}{4}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{4}\sqrt{633} + \frac{25}{4}$. Or $\frac{1}{4}\sqrt{633} - \frac{25}{4} < \frac{1}{4}\sqrt{633} + \frac{25}{4}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{4}\sqrt{633} - \frac{25}{4}$. Posons désormais $R = \frac{1}{4}\sqrt{633} - \frac{25}{4}$. Alors :

$$\forall x \in \,]-R,R[\,,\quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \,]-R,R[\,,\quad f(x) = \frac{1}{633}\sqrt{633}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{4}{\sqrt{633}+25}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{\sqrt{633}-25}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 97. ← page 12

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$. Pour cela, notons que le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - X + 1$ sont :

$$x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\quad x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1-x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{x_1,x_2\},\quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = 1$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1x_2 = 1$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = 1$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = 1$. Alors :

$$\forall x \in \,]-R,R[\,,\quad f(x) = \frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \,]-R,R[\,,\quad f(x) = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} =$

$x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

Nous vous laissons vérifier que $\theta = -\frac{1}{3}\pi$ est un argument de x_2, ce qui rend encore plus explicite ce développement.

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}(2x-1)\right)^2} = \frac{1}{x^2 - x + 1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\pi(n+1)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi.$$

Corrigé 98. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{7x^2 - x - 3}$. Pour cela, notons que ← page 12 $7X^2 - X - 3 = 7\left(X^2 - \frac{1}{7}X - \frac{3}{7}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{7}X - \frac{3}{7}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{85}{49}$. Il est strictement positif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{7}X - \frac{3}{7}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{7} + \sqrt{\frac{85}{49}}}{2} = \frac{1}{14}\sqrt{85} + \frac{1}{14}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{7} - \sqrt{\frac{85}{49}}}{2} = -\frac{1}{14}\sqrt{85} + \frac{1}{14}.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{7}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) = \frac{1}{7}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que pour avoir à la fois $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre x tel que $|x| < |x_1| = \frac{1}{14}\sqrt{85} + \frac{1}{14}$ et $|x| < |x_2| = \frac{1}{14}\sqrt{85} - \frac{1}{14}$. Or $\frac{1}{14}\sqrt{85} + \frac{1}{14} > \frac{1}{14}\sqrt{85} - \frac{1}{14}$, donc ces deux inégalités sont vérifiées simultanément pour tout x tel que : $|x| < \frac{1}{14}\sqrt{85} - \frac{1}{14}$. Posons désormais $R = \frac{1}{14}\sqrt{85} - \frac{1}{14}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{7}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{7}\frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{85}\sqrt{85}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\left(\frac{14}{\sqrt{85}+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{14}{\sqrt{85}-1}\right)^{n+1}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Corrigé 99. ← page 12

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{3\,x^2+x+1}$. Pour cela, notons que $3\,X^2 + X + 1 = 3\left(X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$ est $\Delta = \frac{1}{3}^2 - 4 \times \frac{1}{3} = -\frac{11}{9}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$ sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{3} + i\sqrt{\frac{11}{9}}}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{11}i, \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{3} - i\sqrt{\frac{11}{9}}}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{11}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2-x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = \frac{1}{3}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{11}i\sqrt{11}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{6}i\sqrt{11} - \frac{1}{6}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{6}i\sqrt{11} - \frac{1}{6}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{11}\sqrt{11}\sum_{n=0}^{+\infty}3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin((n+1)\theta)\,x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{11}\sqrt{11}\frac{\frac{6}{11}\sqrt{11}}{1+\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}(6\,x+1)\right)^2} = \frac{1}{3\,x^2+x+1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = \frac{2}{11}\sqrt{11}\arctan\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{11}\sqrt{11}3^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{11}\sqrt{11}\arctan\left(\frac{1}{11}\sqrt{11}\right).$$

Corrigé 100. ← page 12

1. Nous allons décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\,x^2-x+1}$. Pour cela, notons que $2\,X^2 - X + 1 = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$ (cette factorisation préalable est surtout faite pour des commodités de programmation), et le discriminant de $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} = -\frac{7}{4}$. Il est strictement négatif, donc les racines de $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ sont :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{7}{4}}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{7}i, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{7}{4}}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{7}i.$$

La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure de l'existence de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ différent de x_1 et x_2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

Multiplier par $x - x_1$, et prendre $x \to x_1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{x_1 - x_2}$. De même : $b = \frac{1}{x_2 - x_1}$ (pour des commodités de programmation, je simplifierai plus tard). Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{x_1, x_2\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Nous avons mis les deux fractions rationnelles sous la forme $\frac{1}{1-u}$ afin de les développer en série géométrique. Pour cela, nous devons choisir x de sorte que $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$. À cet effet, notons que : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (les élèves malins auront évité des calculs inutiles *via* la formule : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, en remarquant que : $|x_1|^2 = x_1\overline{x_1} = x_1 x_2 = \frac{1}{2}$, où cette dernière égalité est vraie grâce aux relations coefficients-racines). Pour avoir $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, il faut et il suffit donc de prendre : $|x| < |x_1| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (et dans ce cas on a aussi $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$). Posons désormais $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Alors :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions explicites pour en déduire :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{7}i\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}i\sqrt{7}+\frac{1}{4}\right)^{n+1}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}i\sqrt{7}+\frac{1}{4}\right)^{n+1}}\right)x^n,$$

d'où le résultat.

Remarque. On peut encore simplifier cette expression, en remarquant que : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} =$

$x_2^{-(n+1)} - \overline{x_2}^{-(n+1)} = 2i\mathrm{Im}\left(x_2^{-(n+1)}\right)$. Par conséquent, si l'on met x_2 sous forme exponentielle : $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$, avec θ un argument de x_2, alors : $\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)\theta}\right) = -2i2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)$. Donc le développement en série entière ci-dessus se réécrit sous la forme plus satisfaisante (car compacte, et avec des coefficients réels) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n.$$

2. Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que f est la dérivée de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{2}{7}\sqrt{7}\frac{\frac{4}{7}\sqrt{7}}{1+\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}(4\,x-1)\right)^2} = \frac{1}{2\,x^2 - x + 1} = f(x).$$

Or f est développable en série entière d'après la question précédente, donc F aussi, et son développement en série entière s'obtient en intégrant celui de f (sans oublier la constante d'intégration, qui sera $F(0) = -\frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right)$ ci-dessous puisqu'on va intégrer la somme de série entière de 0 à x). On en déduit :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{7}\sqrt{7}2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\sin\left((n+1)\theta\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{7}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right).$$