Utilisation de la constante d'Euler

Comment la constante d'Euler permet de calculer certaines sommes dépendant de la série harmonique (de manière plus ou moins directe).

Remarque sur le corrigé. Tous ces exercices utilisent le fait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

converge, vers une limite notée γ (c'est la constante d'Euler-Mascheroni). Il est bien sûr avisé de savoir comment démontrer cela, sinon ces exercices n'ont pas un grand intérêt.

Exercice 1. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. → page 8

Exercice 2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{24}{(2\,k+1)(k+4)k}$. → page 8

Exercice 3. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. → page 9

Exercice 4. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^{28}}\frac{1}{k} - 28\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. → page 9

Exercice 5. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2\,n}\frac{1}{k}$. → page 9

Exercice 6. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^3}^{n^4}\frac{1}{k}$. → page 10

Exercice 7. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=4\,n}^{5\,n}\frac{1}{k}$. → page 10

Exercice 8. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}$. → page 10

Exercice 9. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{1}{k}$. → page 11

Exercice 10. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^{14}}\frac{1}{k}$. → page 11

Exercice 11. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{44\,k+5}{(2\,k+5)(k+2)k}$. → page 11

Exercice 12. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 12

Exercice 13. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 13

Exercice 14. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{26}} \frac{1}{k} - 26\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 13

Exercice 15. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2\,n}^{4\,n} \frac{1}{k}$. → page 13

Exercice 16. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{27}} \frac{1}{k} - 27\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 14

Exercice 17. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{(2\,k+3)(k+1)k}$. → page 14

Exercice 18. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^8} \frac{1}{k}$. → page 15

Exercice 19. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k}$. → page 15

Exercice 20. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{12\,n} \frac{1}{k}$. → page 16

Exercice 21. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^4} \frac{1}{k}$. → page 16

Exercice 22. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k}$. → page 16

Exercice 23. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{(2\,k+1)(k+2)}$. → page 16

Exercice 24. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{6\,n} \frac{1}{k}$. → page 17

Exercice 25. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k}$. → page 18

Exercice 26. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{232}} \frac{1}{k}$. → page 18

Exercice 27. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+3}{(2\,k+3)(k+5)k}$. → page 18

Exercice 28. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{(2\,k+1)(k+8)}$. → page 19

Exercice 29. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{(2\,k+1)(k+3)k}$. → page 20

Exercice 30. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{5\,n} \frac{1}{k}$. → page 21

Exercice 31. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3\,n}^{20\,n} \frac{1}{k}$. → page 22

Exercice 32. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+2)k}$. → page 22

Exercice 33. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{37}} \frac{1}{k} - 37\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 23

Exercice 34. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$. → page 23

Exercice 35. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,k+2}{(2\,k+1)(k+10)k}$. → page 23

Exercice 36. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{2001}} \frac{1}{k}$. → page 24

Exercice 37. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 25

Exercice 38. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 25

Exercice 39. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{(2\,k+1)(k+2)}$. → page 25

Exercice 40. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 26

Exercice 41. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)(k+2)}$. → page 27

Exercice 42. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)}$. → page 27

Exercice 43. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k}$. → page 28

Exercice 44. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^9} \frac{1}{k} - 9\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 29

Exercice 45. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^4} \frac{1}{k}$. → page 29

Exercice 46. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{25}} \frac{1}{k} - 25\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 29

Exercice 47. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3\,n}^{4\,n} \frac{1}{k}$. → page 30

Exercice 48. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5\,k+1}{(2\,k+1)(k+1)k}$. → page 30

Exercice 49. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{54}} \frac{1}{k} - 54\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 31

Exercice 50. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{(2\,k+1)(k+4)k}$. → page 31

Exercice 51. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{3\,n} \frac{1}{k}$. → page 32

Exercice 52. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{10\,k+1}{(2\,k+1)(k+1)k}$. → page 32

Exercice 53. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k}$. → page 33

Exercice 54. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k}$. → page 33

Exercice 55. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^5} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 34

Exercice 56. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^4} \frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 34

Exercice 57. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{(2\,k+5)(k+4)k}$. → page 34

Exercice 58. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{6\,n} \frac{1}{k}$. → page 35

Exercice 59. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{30}} \frac{1}{k} - 30\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 36

Exercice 60. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{5}} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 36

Exercice 61. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{19}} \frac{1}{k} - 19\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 36

Exercice 62. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)(k+17)k}$. → page 37

Exercice 63. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^5} \frac{1}{k}$. → page 37

Exercice 64. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{5}} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. → page 38

Exercice 65. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)(k+3)k}$. → page 38

Exercice 66. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)}$. → page 39

Exercice 67. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+3)k}$. → page 40

Exercice 68. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)k}$. → page 41

Exercice 69. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{21}} \frac{1}{k}$. → page 42

Exercice 70. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{(2\,k+1)(k+14)k}$. → page 42

Exercice 71. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)k}$. → page 43

Exercice 72. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^3} \frac{1}{k}$. → page 44

Exercice 73. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{3\,n} \frac{1}{k}$. → page 44

Exercice 74. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3\,n}^{22\,n} \frac{1}{k}$. → page 44

Exercice 75. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+4)k}$. → page 45

Exercice 76. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2\,n}^{3\,n} \frac{1}{k}$. → page 45

Exercice 77. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$. → page 46

Exercice 78. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{7}{(2\,k+1)(k+1)}$. → page 46

Exercice 79. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$. → page 47

Exercice 80. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2\,n}^{5\,n} \frac{1}{k}$. → page 47

Exercice 81. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{7}{(2\,k+3)(k+1)}$. → page 48

Exercice 82. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$. → page 49

Exercice 83. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{51\,n} \frac{1}{k}$. → page 49

Exercice 84. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+6}{(2\,k+7)(k+1)k}$. → page 49

Exercice 85. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^4} \frac{1}{k} - 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$. → page 50

Exercice 86. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$. → page 51

Exercice 87. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{11\,n}\frac{1}{k}$. → page 51

Exercice 88. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2\,n}^{7\,n}\frac{1}{k}$. → page 51

Exercice 89. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. → page 52

Exercice 90. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{88\,n}\frac{1}{k}$. → page 52

Exercice 91. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{345}}\frac{1}{k}$. → page 52

Exercice 92. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^{551}}\frac{1}{k}$. → page 52

Exercice 93. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{92}}\frac{1}{k}$. → page 53

Exercice 94. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3}{(2\,k+1)(k+1)k}$. → page 53

Exercice 95. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{13}}\frac{1}{k}$. → page 54

Exercice 96. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k+1}{(2\,k+1)(k+141)k}$. → page 54

Exercice 97. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^{15}}\frac{1}{k}-15\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. → page 55

Exercice 98. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4\,k+1}{(2\,k+3)(k+1)k}$. → page 56

Exercice 99. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^{17}}\frac{1}{k}-17\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. → page 57

Exercice 100. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^3}^{n^5}\frac{1}{k}$. → page 57

Corrigé 1. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=u_{n^2}+\ln\left(n^2\right)-2\left(u_n+\ln(n)\right)\\&=u_{n^2}-2u_n+2\ln(n)-2\ln(n)\\&=u_{n^2}-2u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-2\gamma=-\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 2. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 1

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{24}{(2\,k+1)(k+4)k}=\frac{6}{k}+\frac{6}{7\,(k+4)}-\frac{96}{7\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{24}{(2\,k+1)(k+4)k}=6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{6}{7}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4}-\frac{96}{7}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}&=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\k\text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\&=u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4}&=\sum_{k=5}^{n+4}\frac{1}{k}\\&=\sum_{k=1}^{n+4}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}\\&=u_{n+4}+\ln\left(n+4\right)-\frac{25}{12},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{24}{(2\,k+1)(k+4)k}&=6\left(u_n+\ln\left(n\right)\right)+\frac{6}{7}\left(u_{n+4}+\ln\left(n+4\right)-\frac{25}{12}\right)+\\&\quad-\frac{96}{7}\left(u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1\right)\\&=6u_n+\frac{6}{7}u_{n+4}-\frac{96}{7}u_{2\,n+1}+\frac{48}{7}u_n+\frac{167}{14}+\ln\left(\frac{(n+4)^{\frac{6}{7}}n^{\frac{90}{7}}}{(2\,n+1)^{\frac{96}{7}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{24}{(2\,k+1)(k+4)k} &= 6\gamma+\frac{6}{7}\gamma-\frac{96}{7}\gamma+\frac{48}{7}\gamma+\frac{167}{14}+\ln\left(\frac{1}{16384}\cdot 2^{\frac{2}{7}}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{16384}\cdot 2^{\frac{2}{7}}\right)+\frac{167}{14},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 3. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= u_{n^4}+\ln\left(n^4\right)-4\left(u_n+\ln(n)\right)\\ &= u_{n^4}-4u_n+4\ln(n)-4\ln(n)\\ &= u_{n^4}-4u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-4\gamma=-3\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 4. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{28}}\frac{1}{k}-28\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= u_{n^{28}}+\ln\left(n^{28}\right)-28\left(u_n+\ln(n)\right)\\ &= u_{n^{28}}-28u_n+28\ln(n)-28\ln(n)\\ &= u_{n^{28}}-28u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^{28}}\frac{1}{k}-28\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-28\gamma=-27\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 5. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= u_{2\,n}+\ln\left(2\,n\right)-u_n-\ln\left(n\right)\\ &= u_{2\,n}-u_n+\ln\left(2\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(2\right)=\ln\left(2\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 6. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^3}^{n^4}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n^3}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^4}+\ln\left(n^4\right)-u_{n^3}-\ln\left(n^3\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^4}-u_{n^3}}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{4\ln(n)-3\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^3}^{n^4}\frac{1}{k}=1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 7. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\sum_{k=4\,n}^{5\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{5\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{4\,n}\frac{1}{k}\\ &= u_{5\,n}+\ln(5\,n)-u_{4\,n}-\ln(4\,n)\\ &= u_{5\,n}-u_{4\,n}+\ln\left(\frac{5}{4}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=4\,n}^{5\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(\frac{5}{4}\right)=\ln\left(\frac{5}{4}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^2}+\ln\left(n^2\right)-u_n-\ln(n)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^2}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{2\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}=1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 9. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^3}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^3}+\ln\left(n^3\right)-u_{n^2}-\ln\left(n^2\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^3}-u_{n^2}}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{3\ln(n)-2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{1}{k}=1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^{14}}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^{14}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^{14}}+\ln\left(n^{14}\right)-u_{n^2}-\ln\left(n^2\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^{14}}-u_{n^2}}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{14\ln(n)-2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=12}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^{14}}\frac{1}{k}=12,$$

d'où le résultat.

Corrigé 11. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 1

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{44\,k+5}{(2\,k+5)(k+2)k}=\frac{1}{2\,k}+\frac{83}{2\,(k+2)}-\frac{84}{2\,k+5}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{44\,k+5}{(2\,k+5)(k+2)k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{83}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-84\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+5}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+5} &= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \frac{23}{15} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \frac{23}{15} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+2} \frac{1}{2\ell} - \frac{23}{15} \\
&= u_{2\,n+5} + \ln(2\,n+5) - \frac{1}{2}\left(u_{n+2} + \ln(n+2)\right) - \frac{23}{15},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} &= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} \\
&= u_{n+2} + \ln\left(n+2\right) - \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{44\,k+5}{(2\,k+5)(k+2)k} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \ln\left(n\right)\right) + \frac{83}{2}\left(u_{n+2} + \ln\left(n+2\right) - \frac{3}{2}\right) + \\
&\quad - 84\left(u_{2\,n+5} + \ln(2\,n+5) - \frac{1}{2}\left(u_{n+2} + \ln(n+2)\right) - \frac{23}{15}\right) \\
&= \frac{1}{2}u_n + \frac{83}{2}u_{n+2} - 84u_{2\,n+5} + 42u_{n+2} + \frac{1331}{20} + \ln\left(\frac{(n+2)^{\frac{167}{2}}\sqrt{n}}{(2\,n+5)^{84}}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{44\,k+5}{(2\,k+5)(k+2)k} &= \frac{1}{2}\gamma + \frac{83}{2}\gamma - 84\gamma + 42\gamma + \frac{1331}{20} + \ln\left(\frac{1}{19342813113834066795298816}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{19342813113834066795298816}\right) + \frac{1331}{20},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 12. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^3} + \ln\left(n^3\right) - 3\left(u_n + \ln(n)\right) \\
&= u_{n^3} - 3u_n + 3\ln(n) - 3\ln(n) \\
&= u_{n^3} - 3u_n.
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^3}\frac{1}{k}-3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-3\gamma=-2\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 13. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=u_{n^2}+\ln\left(n^2\right)-2\left(u_n+\ln(n)\right)\\&=u_{n^2}-2u_n+2\ln(n)-2\ln(n)\\&=u_{n^2}-2u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-2\gamma=-\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 14. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{26}}\frac{1}{k}-26\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=u_{n^{26}}+\ln\left(n^{26}\right)-26\left(u_n+\ln(n)\right)\\&=u_{n^{26}}-26u_n+26\ln(n)-26\ln(n)\\&=u_{n^{26}}-26u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^{26}}\frac{1}{k}-26\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-26\gamma=-25\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 15. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=2\,n}^{4\,n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{4\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2\,n}\frac{1}{k}\\&=u_{4\,n}+\ln\left(4\,n\right)-u_{2\,n}-\ln\left(2\,n\right)\\&=u_{4\,n}-u_{2\,n}+\ln\left(2\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2\,n}^{4\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(2\right)=\ln\left(2\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 16. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{27}} \frac{1}{k} - 27 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{27}} + \ln\left(n^{27}\right) - 27\,(u_n + \ln(n)) \\ &= u_{n^{27}} - 27 u_n + 27 \ln(n) - 27 \ln(n) \\ &= u_{n^{27}} - 27 u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{27}} \frac{1}{k} - 27 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) = \gamma - 27\gamma = -26\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 17. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 2

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{5}{(2\,k+3)(k+1)k} = \frac{5}{3\,k} - \frac{5}{k+1} + \frac{20}{3\,(2\,k+3)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{(2\,k+3)(k+1)k} = \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 5 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{20}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{2\ell} - \frac{4}{3} \\ &= u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\,(u_{n+1} + \ln(n+1)) - \frac{4}{3},\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \\ &= u_{n+1} + \ln(n+1) - 1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{(2\,k+3)(k+1)k} &= \frac{5}{3}\left(u_n + \ln(n)\right) - 5\left(u_{n+1} + \ln(n+1) - 1\right) + \\ &+ \frac{20}{3}\left(u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}u_n - 5u_{n+1} + \frac{20}{3}u_{2\,n+3} - \frac{10}{3}u_{n+1} - \frac{35}{9} + \ln\left(\frac{(2\,n+3)^{\frac{20}{3}} n^{\frac{5}{3}}}{(n+1)^{\frac{25}{3}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{(2\,k+3)(k+1)k} &= \frac{5}{3}\gamma - 5\gamma + \frac{20}{3}\gamma - \frac{10}{3}\gamma - \frac{35}{9} + \ln\left(64 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \ln\left(64 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{35}{9},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 18. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^8} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^8} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{u_{n^8} + \ln\left(n^8\right) - u_{n^2} - \ln\left(n^2\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^8} - u_{n^2}}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{8\ln(n) - 2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=6}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^8} \frac{1}{k} = 6,$$

d'où le résultat.

Corrigé 19. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{u_{n^3} + \ln\left(n^3\right) - u_{n^2} - \ln\left(n^2\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^3} - u_{n^2}}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{3\ln(n) - 2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k} = 1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 20. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{12\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{12\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= u_{12\,n}+\ln(12\,n)-u_n-\ln(n)\\ &= u_{12\,n}-u_n+\ln(12)\,.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{12\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln(12)=\ln(12)\,,$$

d'où le résultat.

Corrigé 21. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^4}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^4}+\ln(n^4)-u_n-\ln(n)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^4}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{4\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=3}\,.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^4}\frac{1}{k}=3,$$

d'où le résultat.

Corrigé 22. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= u_{2\,n}+\ln(2\,n)-u_n-\ln(n)\\ &= u_{2\,n}-u_n+\ln(2)\,.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln(2)=\ln(2)\,,$$

d'où le résultat.

Corrigé 23. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 2

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{5}{(2\,k+1)(k+2)} = -\frac{5}{3\,(k+2)} + \frac{10}{3\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{(2\,k+1)(k+2)} = -\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} + \frac{10}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell} - 1\\ &= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} &= \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\\ &= u_{n+2} + \ln\,(n+2) - \frac{3}{2},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{(2\,k+1)(k+2)} &= -\frac{5}{3}\left(u_{n+2} + \ln\,(n+2) - \frac{3}{2}\right) + \frac{10}{3}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1\right)\\ &= -\frac{5}{3}u_{n+2} + \frac{10}{3}u_{2\,n+1} - \frac{5}{3}u_n - \frac{5}{6} + \ln\left(\frac{(2\,n+1)^{\frac{10}{3}}}{(n+2)^{\frac{5}{3}}n^{\frac{5}{3}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{(2\,k+1)(k+2)} &= -\frac{5}{3}\gamma + \frac{10}{3}\gamma - \frac{5}{3}\gamma - \frac{5}{6} + \ln\left(8\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= \ln\left(8\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{5}{6},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 24. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{6\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{6\,n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= u_{6\,n} + \ln\,(6\,n) - u_n - \ln\,(n)\\ &= u_{6\,n} - u_n + \ln\,(6)\,.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{6\,n} \frac{1}{k} = \gamma - \gamma + \ln(6) = \ln(6)\,,$$

d'où le résultat.

Corrigé 25. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)} \left(\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{u_{n^3} + \ln(n^3) - u_{n^2} - \ln(n^2)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^3} - u_{n^2}}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{3\ln(n) - 2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k} = 1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 26. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{232}} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)} \left(\sum_{k=1}^{n^{232}} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{u_{n^{232}} + \ln(n^{232}) - u_n - \ln(n)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^{232}} - u_n}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{232\ln(n) - \ln(n)}{\ln(n)}}_{=231}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{232}} \frac{1}{k} = 231,$$

d'où le résultat.

Corrigé 27. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 3

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{k+3}{(2\,k+3)(k+5)k} = \frac{1}{5\,k} - \frac{2}{35\,(k+5)} - \frac{2}{7\,(2\,k+3)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{(2\,k+3)(k+5)k} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{35} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+5} - \frac{2}{7} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{2\ell} - \frac{4}{3} \\
&= u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+5} &= \sum_{k=6}^{n+5} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+5} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} \\
&= u_{n+5} + \ln(n+5) - \frac{137}{60},
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{(2\,k+3)(k+5)k} &= \frac{1}{5}\left(u_n + \ln(n)\right) - \frac{2}{35}\left(u_{n+5} + \ln(n+5) - \frac{137}{60}\right) + \\
&\quad - \frac{2}{7}\left(u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{1}{5}u_n - \frac{2}{35}u_{n+5} - \frac{2}{7}u_{2\,n+3} + \frac{1}{7}u_{n+1} + \frac{179}{350} + \ln\left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{7}} n^{\frac{1}{5}}}{(2\,n+3)^{\frac{2}{7}}(n+5)^{\frac{2}{35}}}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{(2\,k+3)(k+5)k} &= \frac{1}{5}\gamma - \frac{2}{35}\gamma - \frac{2}{7}\gamma + \frac{1}{7}\gamma + \frac{179}{350} + \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{7}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{7}}\right) + \frac{179}{350},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 28. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 3

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{9}{(2\,k+1)(k+8)} = -\frac{3}{5\,(k+8)} + \frac{6}{5\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{(2\,k+1)(k+8)} = -\frac{3}{5}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+8} + \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2\ell} - 1 \\ &= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+8} &= \sum_{k=9}^{n+8} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+8} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} \\ &= u_{n+8} + \ln(n+8) - \frac{761}{280},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{(2\,k+1)(k+8)} &= -\frac{3}{5}\left(u_{n+8} + \ln(n+8) - \frac{761}{280}\right) + \frac{6}{5}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1\right) \\ &= -\frac{3}{5}u_{n+8} + \frac{6}{5}u_{2\,n+1} - \frac{3}{5}u_n + \frac{603}{1400} + \ln\left(\frac{(2\,n+1)^{\frac{6}{5}}}{(n+8)^{\frac{3}{5}}n^{\frac{3}{5}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{(2\,k+1)(k+8)} &= -\frac{3}{5}\gamma + \frac{6}{5}\gamma - \frac{3}{5}\gamma + \frac{603}{1400} + \ln\left(2\cdot 2^{\frac{1}{5}}\right) \\ &= \ln\left(2\cdot 2^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{603}{1400},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 29. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 3

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad \frac{k+2}{(2\,k+1)(k+3)k} = \frac{2}{3\,k} - \frac{1}{15\,(k+3)} - \frac{6}{5\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{(2\,k+1)(k+3)k} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{15}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} - \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2\ell} - 1\\ &= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} &= \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+3} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}\\ &= u_{n+3} + \ln\,(n+3) - \frac{11}{6},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{(2\,k+1)(k+3)k} &= \frac{2}{3}\,(u_n + \ln\,(n)) - \frac{1}{15}\left(u_{n+3} + \ln\,(n+3) - \frac{11}{6}\right) +\\ &\quad - \frac{6}{5}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1\right)\\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{15}u_{n+3} - \frac{6}{5}u_{2\,n+1} + \frac{3}{5}u_n + \frac{119}{90} + \ln\left(\frac{n^{\frac{19}{15}}}{(2\,n+1)^{\frac{6}{5}}(n+3)^{\frac{1}{15}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{(2\,k+1)(k+3)k} &= \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{15}\gamma - \frac{6}{5}\gamma + \frac{3}{5}\gamma + \frac{119}{90} + \ln\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{\frac{4}{5}}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{\frac{4}{5}}\right) + \frac{119}{90},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 30. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{5\,n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{5\,n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\\ &= u_{5\,n} + \ln\,(5\,n) - u_n - \ln\,(n)\\ &= u_{5\,n} - u_n + \ln\,(5)\,.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{5\,n} \frac{1}{k} = \gamma - \gamma + \ln\,(5) = \ln\,(5)\,,$$

d'où le résultat.

Corrigé 31. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=3\,n}^{20\,n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{20\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{3\,n}\frac{1}{k}\\&=u_{20\,n}+\ln(20\,n)-u_{3\,n}-\ln(3\,n)\\&=u_{20\,n}-u_{3\,n}+\ln\left(\frac{20}{3}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=3\,n}^{20\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(\frac{20}{3}\right)=\ln\left(\frac{20}{3}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 32. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 3

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+2)k}=\frac{1}{2\,k}-\frac{1}{6\,(k+2)}-\frac{2}{3\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(2\,k+1)(k+2)k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}&=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\k\text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\&=u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}&=\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\&=\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\\&=u_{n+2}+\ln(n+2)-\frac{3}{2},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(2\,k+1)(k+2)k}&=\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-\frac{1}{6}\left(u_{n+2}+\ln(n+2)-\frac{3}{2}\right)+\\&\quad-\frac{2}{3}\left(u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1\right)\\&=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{6}u_{n+2}-\frac{2}{3}u_{2\,n+1}+\frac{1}{3}u_n+\frac{11}{12}+\ln\left(\frac{n^{\frac{5}{6}}}{(2\,n+1)^{\frac{2}{3}}(n+2)^{\frac{1}{6}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+2)k} &= \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{6}\gamma - \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{3}\gamma + \frac{11}{12} + \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{11}{12},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 33. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{37}} \frac{1}{k} - 37\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{37}} + \ln\left(n^{37}\right) - 37\,(u_n + \ln(n)) \\ &= u_{n^{37}} - 37u_n + 37\ln(n) - 37\ln(n) \\ &= u_{n^{37}} - 37u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{37}} \frac{1}{k} - 37\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 37\gamma = -36\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)} \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{u_{n^2} + \ln\left(n^2\right) - u_n - \ln\left(n\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^2} - u_n}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{2\ln(n) - \ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} = 1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 35. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 3

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad \frac{2\,(k+1)}{(2\,k+1)(k+10)k} = \frac{1}{5\,k} - \frac{9}{95\,(k+10)} - \frac{4}{19\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2\,(k+1)}{(2\,k+1)(k+10)k} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{9}{95}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+10} - \frac{4}{19}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\ &= u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\,(u_n+\ln(n))-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+10} &= \sum_{k=11}^{n+10}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+10}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}\\ &= u_{n+10}+\ln\left(n+10\right)-\frac{7381}{2520},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\,(k+1)}{(2\,k+1)(k+10)k} &= \frac{1}{5}\left(u_n+\ln\left(n\right)\right)-\frac{9}{95}\left(u_{n+10}+\ln\left(n+10\right)-\frac{7381}{2520}\right)+\\ &\quad -\frac{4}{19}\left(u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\,(u_n+\ln(n))-1\right)\\ &= \frac{1}{5}u_n-\frac{9}{95}u_{n+10}-\frac{4}{19}u_{2\,n+1}+\frac{2}{19}u_n+\frac{12981}{26600}+\ln\left(\frac{n^{\frac{29}{95}}}{(2\,n+1)^{\frac{4}{19}}(n+10)^{\frac{9}{95}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\,k+2}{(2\,k+1)(k+10)k} &= \frac{1}{5}\gamma-\frac{9}{95}\gamma-\frac{4}{19}\gamma+\frac{2}{19}\gamma+\frac{12981}{26600}+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{15}{19}}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{15}{19}}\right)+\frac{12981}{26600},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 36. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{2001}}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^{2001}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^{2001}}+\ln\left(n^{2001}\right)-u_n-\ln\left(n\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^{2001}}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{2001\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=2000}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{2001}} \frac{1}{k} = 2000,$$

d'où le résultat.

Corrigé 37. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^2} + \ln\left(n^2\right) - 2\left(u_n + \ln(n)\right)\\ &= u_{n^2} - 2u_n + 2\ln(n) - 2\ln(n)\\ &= u_{n^2} - 2u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 2\gamma = -\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 38. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^2} + \ln\left(n^2\right) - 2\left(u_n + \ln(n)\right)\\ &= u_{n^2} - 2u_n + 2\ln(n) - 2\ln(n)\\ &= u_{n^2} - 2u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 2\gamma = -\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 39. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 3

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{6}{(2\,k+1)(k+2)} = -\frac{2}{k+2} + \frac{4}{2\,k+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{(2\,k+1)(k+2)} = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2\ell} - 1\\ &= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} &= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k}\\ &= u_{n+2} + \ln\left(n+2\right) - \frac{3}{2},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{(2\,k+1)(k+2)} &= -2\left(u_{n+2} + \ln\left(n+2\right) - \frac{3}{2}\right) + 4\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1\right)\\ &= -2u_{n+2} + 4u_{2\,n+1} - 2u_n - 1 + \ln\left(\frac{\left(2\,n+1\right)^4}{\left(n+2\right)^2 n^2}\right).\end{aligned}$$

Or $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{(2\,k+1)(k+2)} &= -2\gamma + 4\gamma - 2\gamma - 1 + \ln\left(16\right)\\ &= 4\,\ln\left(2\right) - 1,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 40. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^3} + \ln\left(n^3\right) - 3\left(u_n + \ln(n)\right)\\ &= u_{n^3} - 3u_n + 3\ln(n) - 3\ln(n)\\ &= u_{n^3} - 3u_n.\end{aligned}$$

Or $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 3\gamma = -2\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 41. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 3

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{1}{(2\,k+1)(k+2)} = -\frac{1}{3\,(k+2)} + \frac{2}{3\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)(k+2)} = -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2\ell} - 1 \\
&= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1,
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} &= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} \\
&= u_{n+2} + \ln\,(n+2) - \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)(k+2)} &= -\frac{1}{3}\left(u_{n+2} + \ln\,(n+2) - \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1\right) \\
&= -\frac{1}{3} u_{n+2} + \frac{2}{3} u_{2\,n+1} - \frac{1}{3} u_n - \frac{1}{6} + \ln\left(\frac{(2\,n+1)^{\frac{2}{3}}}{(n+2)^{\frac{1}{3}}\, n^{\frac{1}{3}}}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)(k+2)} &= -\frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{6} + \ln\left(2^{\frac{2}{3}}\right) \\
&= \ln\left(2^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 42. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 4

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{2}{2\,k+3}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{2\ell} - \frac{4}{3} \\
&= u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \\
&= u_{n+1} + \ln(n+1) - 1,
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)} &= \left(u_{n+1} + \ln(n+1) - 1\right) - 2\left(u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3}\right) \\
&= u_{n+1} - 2u_{2\,n+3} + u_{n+1} + \frac{5}{3} + \ln\left(\frac{(n+1)^2}{(2\,n+3)^2}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)} &= \gamma - 2\gamma + \gamma + \frac{5}{3} + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{3},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 43. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2\,n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= u_{2\,n} + \ln(2\,n) - u_n - \ln(n) \\
&= u_{2\,n} - u_n + \ln(2).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2),$$

d'où le résultat.

Corrigé 44. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^9} \frac{1}{k} - 9\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^9} + \ln\left(n^9\right) - 9\left(u_n + \ln(n)\right) \\ &= u_{n^9} - 9u_n + 9\ln(n) - 9\ln(n) \\ &= u_{n^9} - 9u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^9} \frac{1}{k} - 9\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 9\gamma = -8\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 45. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^4} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^4} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{u_{n^4} + \ln\left(n^4\right) - u_{n^2} - \ln\left(n^2\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^4} - u_{n^2}}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{4\ln(n) - 2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=2}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^4} \frac{1}{k} = 2,$$

d'où le résultat.

Corrigé 46. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{25}} \frac{1}{k} - 25\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{25}} + \ln\left(n^{25}\right) - 25\left(u_n + \ln(n)\right) \\ &= u_{n^{25}} - 25u_n + 25\ln(n) - 25\ln(n) \\ &= u_{n^{25}} - 25u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{25}} \frac{1}{k} - 25\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 25\gamma = -24\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 47. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=3n}^{4n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}\\ &= u_{4n}+\ln(4n)-u_{3n}-\ln(3n)\\ &= u_{4n}-u_{3n}+\ln\left(\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=3n}^{4n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(\frac{4}{3}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 48. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 4

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{5k+1}{(2k+1)(k+1)k}=\frac{1}{k}-\frac{4}{k+1}+\frac{6}{2k+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{5k+1}{(2k+1)(k+1)k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\ &= u_{2n+1}+\ln(2n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}\\ &= u_{n+1}+\ln(n+1)-1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{5k+1}{(2k+1)(k+1)k} &= (u_n+\ln(n))-4\left(u_{n+1}+\ln(n+1)-1\right)+\\ &\quad+6\left(u_{2n+1}+\ln(2n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1\right)\\ &= u_n-4u_{n+1}+6u_{2n+1}-3u_n-2+\ln\left(\frac{(2n+1)^6}{(n+1)^4n^2}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5\,k+1}{(2\,k+1)(k+1)k} &= \gamma - 4\gamma + 6\gamma - 3\gamma - 2 + \ln(64)\\ &= 6\,\ln(2) - 2,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 49. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{54}} \frac{1}{k} - 54\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{54}} + \ln\left(n^{54}\right) - 54\,(u_n + \ln(n))\\ &= u_{n^{54}} - 54u_n + 54\ln(n) - 54\ln(n)\\ &= u_{n^{54}} - 54u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{54}} \frac{1}{k} - 54\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 54\gamma = -53\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 50. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 4

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{6}{(2\,k+1)(k+4)k} = \frac{3}{2\,k} + \frac{3}{14\,(k+4)} - \frac{24}{7\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{(2\,k+1)(k+4)k} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{3}{14}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4} - \frac{24}{7}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2\ell} - 1\\ &= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4} &= \sum_{k=5}^{n+4} \frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+4} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}\\ &= u_{n+4} + \ln(n+4) - \frac{25}{12},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{(2\,k+1)(k+4)k} &= \frac{3}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)+\frac{3}{14}\left(u_{n+4}+\ln(n+4)-\frac{25}{12}\right)+\\ &\quad -\frac{24}{7}\left(u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1\right)\\ &= \frac{3}{2}u_n+\frac{3}{14}u_{n+4}-\frac{24}{7}u_{2\,n+1}+\frac{12}{7}u_n+\frac{167}{56}+\ln\left(\frac{(n+4)^{\frac{3}{14}}n^{\frac{45}{14}}}{(2\,n+1)^{\frac{24}{7}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{(2\,k+1)(k+4)k} &= \frac{3}{2}\gamma+\frac{3}{14}\gamma-\frac{24}{7}\gamma+\frac{12}{7}\gamma+\frac{167}{56}+\ln\left(\frac{1}{16}\cdot 2^{\frac{4}{7}}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{16}\cdot 2^{\frac{4}{7}}\right)+\frac{167}{56},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 51. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{3\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{3\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= u_{3\,n}+\ln(3\,n)-u_n-\ln(n)\\ &= u_{3\,n}-u_n+\ln(3)\,.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{3\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln(3)=\ln(3)\,,$$

d'où le résultat.

Corrigé 52. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 4

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{10\,k+1}{(2\,k+1)(k+1)k}=\frac{1}{k}-\frac{9}{k+1}+\frac{16}{2\,k+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{10\,k+1}{(2\,k+1)(k+1)k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-9\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+16\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\ &= u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \\ &= u_{n+1} + \ln(n+1) - 1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{10\,k+1}{(2\,k+1)(k+1)k} &= (u_n + \ln(n)) - 9\,(u_{n+1} + \ln(n+1) - 1) + \\ &\quad + 16\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1\right) \\ &= u_n - 9u_{n+1} + 16u_{2\,n+1} - 8u_n - 7 + \ln\left(\frac{(2\,n+1)^{16}}{(n+1)^9 n^7}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{10\,k+1}{(2\,k+1)(k+1)k} &= \gamma - 9\gamma + 16\gamma - 8\gamma - 7 + \ln(65536) \\ &= 16\,\ln(2) - 7,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2\,n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= u_{2\,n} + \ln(2\,n) - u_n - \ln(n) \\ &= u_{2\,n} - u_n + \ln(2).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k} = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2),$$

d'où le résultat.

Corrigé 54. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)} \left(\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{u_{n^3} + \ln(n^3) - u_{n^2} - \ln(n^2)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^3} - u_{n^2}}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{3\ln(n) - 2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k} = 1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 55. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^5} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^5} + \ln\left(n^5\right) - 5\left(u_n + \ln(n)\right)\\ &= u_{n^5} - 5u_n + 5\ln(n) - 5\ln(n)\\ &= u_{n^5} - 5u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^5} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 5\gamma = -4\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 56. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^4} \frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^4} + \ln\left(n^4\right) - 4\left(u_n + \ln(n)\right)\\ &= u_{n^4} - 4u_n + 4\ln(n) - 4\ln(n)\\ &= u_{n^4} - 4u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^4} \frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 4\gamma = -3\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 57. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad \frac{k+2}{(2\,k+5)(k+4)k} = \frac{1}{10\,k} - \frac{1}{6\,(k+4)} + \frac{2}{15\,(2\,k+5)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{(2\,k+5)(k+4)k} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4} + \frac{2}{15}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+5}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+5} &= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \frac{23}{15} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \frac{23}{15} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+5} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+2} \frac{1}{2\ell} - \frac{23}{15} \\
&= u_{2\,n+5} + \ln(2\,n+5) - \frac{1}{2}\left(u_{n+2} + \ln(n+2)\right) - \frac{23}{15},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4} &= \sum_{k=5}^{n+4} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+4} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} \\
&= u_{n+4} + \ln(n+4) - \frac{25}{12},
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{(2\,k+5)(k+4)k} &= \frac{1}{10}\left(u_n + \ln(n)\right) - \frac{1}{6}\left(u_{n+4} + \ln(n+4) - \frac{25}{12}\right) + \\
&\quad + \frac{2}{15}\left(u_{2\,n+5} + \ln(2\,n+5) - \frac{1}{2}\left(u_{n+2} + \ln(n+2)\right) - \frac{23}{15}\right) \\
&= \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{6}u_{n+4} + \frac{2}{15}u_{2\,n+5} - \frac{1}{15}u_{n+2} + \frac{257}{1800} + \ln\left(\frac{(2\,n+5)^{\frac{2}{15}}\, n^{\frac{1}{10}}}{(n+4)^{\frac{1}{6}}(n+2)^{\frac{1}{15}}}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{(2\,k+5)(k+4)k} &= \frac{1}{10}\gamma - \frac{1}{6}\gamma + \frac{2}{15}\gamma - \frac{1}{15}\gamma + \frac{257}{1800} + \ln\left(2^{\frac{2}{15}}\right) \\
&= \ln\left(2^{\frac{2}{15}}\right) + \frac{257}{1800},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 58. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{6\,n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{6\,n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= u_{6\,n} + \ln(6\,n) - u_n - \ln(n) \\
&= u_{6\,n} - u_n + \ln(6).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{6\,n} \frac{1}{k} = \gamma - \gamma + \ln(6) = \ln(6)\,,$$

d'où le résultat.

Corrigé 59. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{30}} \frac{1}{k} - 30\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{30}} + \ln\left(n^{30}\right) - 30\,(u_n + \ln(n)) \\ &= u_{n^{30}} - 30u_n + 30\ln(n) - 30\ln(n) \\ &= u_{n^{30}} - 30u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{30}} \frac{1}{k} - 30\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 30\gamma = -29\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 60. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{5}} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{5}} + \ln\left(n^{5}\right) - 5\,(u_n + \ln(n)) \\ &= u_{n^{5}} - 5u_n + 5\ln(n) - 5\ln(n) \\ &= u_{n^{5}} - 5u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{5}} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 5\gamma = -4\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 61. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{19}} \frac{1}{k} - 19\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{19}} + \ln\left(n^{19}\right) - 19\,(u_n + \ln(n)) \\ &= u_{n^{19}} - 19u_n + 19\ln(n) - 19\ln(n) \\ &= u_{n^{19}} - 19u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{19}} \frac{1}{k} - 19\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 19\gamma = -18\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 62. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{1}{(2\,k+1)(k+17)k} = \frac{1}{17\,k} + \frac{1}{561\,(k+17)} - \frac{4}{33\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)(k+17)k} = \frac{1}{17}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{561}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+17} - \frac{4}{33}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell} - 1\\ &= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+17} &= \sum_{k=18}^{n+17}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+17}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{17}\frac{1}{k}\\ &= u_{n+17} + \ln\left(n+17\right) - \frac{42142223}{12252240},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k+1)(k+17)k} &= \frac{1}{17}\left(u_n + \ln\left(n\right)\right) + \frac{1}{561}\left(u_{n+17} + \ln\left(n+17\right) - \frac{42142223}{12252240}\right) +\\ &\quad - \frac{4}{33}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1\right)\\ &= \frac{1}{17}u_n + \frac{1}{561}u_{n+17} - \frac{4}{33}u_{2\,n+1} + \frac{2}{33}u_n + \frac{791010097}{6873506640} + \ln\left(\frac{(n+17)^{\frac{1}{561}}n^{\frac{67}{561}}}{(2\,n+1)^{\frac{4}{33}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k+1)(k+17)k} &= \frac{1}{17}\gamma + \frac{1}{561}\gamma - \frac{4}{33}\gamma + \frac{2}{33}\gamma + \frac{791010097}{6873506640} + \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{29}{33}}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{29}{33}}\right) + \frac{791010097}{6873506640},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 63. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^5}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^5}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^5}+\ln\left(n^5\right)-u_n-\ln\left(n\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^5}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{5\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=4}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^5}\frac{1}{k}=4,$$

d'où le résultat.

Corrigé 64. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^5}\frac{1}{k}-5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= u_{n^5}+\ln\left(n^5\right)-5\left(u_n+\ln(n)\right)\\ &= u_{n^5}-5u_n+5\ln(n)-5\ln(n)\\ &= u_{n^5}-5u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^5}\frac{1}{k}-5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-5\gamma=-4\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 65. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{1}{(2\,k+1)(k+3)k}=\frac{1}{3\,k}+\frac{1}{15\,(k+3)}-\frac{4}{5\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k+1)(k+3)k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\ &= u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}&=\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}\\&=\sum_{k=1}^{n+3}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\\&=u_{n+3}+\ln(n+3)-\frac{11}{6},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k+1)(k+3)k}&=\frac{1}{3}(u_n+\ln(n))+\frac{1}{15}\left(u_{n+3}+\ln(n+3)-\frac{11}{6}\right)+\\&\quad-\frac{4}{5}\left(u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}(u_n+\ln(n))-1\right)\\&=\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{15}u_{n+3}-\frac{4}{5}u_{2\,n+1}+\frac{2}{5}u_n+\frac{61}{90}+\ln\left(\frac{(n+3)^{\frac{1}{15}}n^{\frac{11}{15}}}{(2\,n+1)^{\frac{4}{5}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k+1)(k+3)k}&=\frac{1}{3}\gamma+\frac{1}{15}\gamma-\frac{4}{5}\gamma+\frac{2}{5}\gamma+\frac{61}{90}+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{5}}\right)\\&=\ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{5}}\right)+\frac{61}{90},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 66. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)}=\frac{1}{k+1}-\frac{2}{2\,k+3}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k+3)(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+3}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+3}&=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{2k+1}\\&=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ impair}}}^{2\,n+3}\frac{1}{k}-\frac{4}{3}\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+3}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\k\text{ pair}}}^{2\,n+3}\frac{1}{k}-\frac{4}{3}\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+3}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{1}{2\ell}-\frac{4}{3}\\&=u_{2\,n+3}+\ln(2\,n+3)-\frac{1}{2}(u_{n+1}+\ln(n+1))-\frac{4}{3},\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}\\ &= u_{n+1} + \ln(n+1) - 1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)} &= (u_{n+1} + \ln(n+1) - 1) - 2\left(u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}(u_{n+1} + \ln(n+1)) - \frac{4}{3}\right)\\ &= u_{n+1} - 2u_{2\,n+3} + u_{n+1} + \frac{5}{3} + \ln\left(\frac{(n+1)^2}{(2\,n+3)^2}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)(k+1)} &= \gamma - 2\gamma + \gamma + \frac{5}{3} + \ln\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{3},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{1}{(2\,k+3)k} = \frac{1}{3\,k} - \frac{2}{3\,(2\,k+3)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2k+1}\\ &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3}\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3}\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{2\ell} - \frac{4}{3}\\ &= u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}(u_{n+1} + \ln(n+1)) - \frac{4}{3},\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)k} &= \frac{1}{3}\left(u_n + \ln(n)\right) - \frac{2}{3}\left(u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}u_{2\,n+3} + \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{8}{9} + \ln\left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}}{(2\,n+3)^{\frac{2}{3}}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+3)k} &= \frac{1}{3}\gamma - \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{3}\gamma + \frac{8}{9} + \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{8}{9},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 68. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{1}{(2\,k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{2}{2\,k+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2\ell} - 1 \\ &= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)k} &= \left(u_n + \ln(n)\right) - 2\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1\right) \\ &= u_n - 2u_{2\,n+1} + u_n + 2 + \ln\left(\frac{n^2}{(2\,n+1)^2}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)k} &= \gamma - 2\gamma + \gamma + 2 + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + 2,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 69. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{21}}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^{21}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{u_{n^{21}}+\ln\left(n^{21}\right)-u_n-\ln(n)}{\ln(n)}\\
&= \frac{u_{n^{21}}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{21\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=20}.
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{21}}\frac{1}{k}=20,$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{3}{(2\,k+1)(k+14)k}=\frac{3}{14\,k}+\frac{1}{126\,(k+14)}-\frac{4}{9\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(2\,k+1)(k+14)k}=\frac{3}{14}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{126}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+14}-\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\
&= u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+14} &= \sum_{k=15}^{n+14}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+14}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{k}\\
&= u_{n+14}+\ln(n+14)-\frac{1171733}{360360},
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2\,k+1)(k+14)k} = \frac{3}{14}\left(u_n + \ln(n)\right) + \frac{1}{126}\left(u_{n+14} + \ln(n+14) - \frac{1171733}{360360}\right) + $$
$$- \frac{4}{9}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1\right)$$
$$= \frac{3}{14}u_n + \frac{1}{126}u_{n+14} - \frac{4}{9}u_{2\,n+1} + \frac{2}{9}u_n + \frac{19008427}{45405360} + \ln\left(\frac{(n+14)^{\frac{1}{126}} n^{\frac{55}{126}}}{(2\,n+1)^{\frac{4}{9}}}\right).$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2\,k+1)(k+14)k} = \frac{3}{14}\gamma + \frac{1}{126}\gamma - \frac{4}{9}\gamma + \frac{2}{9}\gamma + \frac{19008427}{45405360} + \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{9}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{9}}\right) + \frac{19008427}{45405360},$$

d'où le résultat.

Corrigé 71. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 5

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{1}{(2\,k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{2}{2\,k+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1$$
$$= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1$$
$$= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell} - 1$$
$$= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1,$$

ce dont on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k+1)k} = \left(u_n + \ln(n)\right) - 2\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\left(u_n + \ln(n)\right) - 1\right)$$
$$= u_n - 2u_{2\,n+1} + u_n + 2 + \ln\left(\frac{n^2}{(2\,n+1)^2}\right).$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k+1)k} = \gamma - 2\gamma + \gamma + 2 + \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + 2,$$

d'où le résultat.

Corrigé 72. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^3}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^3}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^3}+\ln\left(n^3\right)-u_n-\ln(n)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^3}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{3\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=2}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^3}\frac{1}{k}=2,$$

d'où le résultat.

Corrigé 73. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{3\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{3\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= u_{3\,n}+\ln(3\,n)-u_n-\ln(n)\\ &= u_{3\,n}-u_n+\ln(3).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{3\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln(3)=\ln(3),$$

d'où le résultat.

Corrigé 74. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{k=3\,n}^{22\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{22\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{3\,n}\frac{1}{k}\\ &= u_{22\,n}+\ln(22\,n)-u_{3\,n}-\ln(3\,n)\\ &= u_{22\,n}-u_{3\,n}+\ln\left(\frac{22}{3}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=3\,n}^{22\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(\frac{22}{3}\right)=\ln\left(\frac{22}{3}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 75. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 6

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+4)k} = \frac{1}{4\,k} - \frac{3}{28\,(k+4)} - \frac{2}{7\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+4)k} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{3}{28}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4} - \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell} - 1 \\
&= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1,
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4} &= \sum_{k=5}^{n+4}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+4}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k} \\
&= u_{n+4} + \ln(n+4) - \frac{25}{12},
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(2\,k+1)(k+4)k} &= \frac{1}{4}\,(u_n + \ln(n)) - \frac{3}{28}\left(u_{n+4} + \ln(n+4) - \frac{25}{12}\right) + \\
&\quad - \frac{2}{7}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{28}u_{n+4} - \frac{2}{7}u_{2\,n+1} + \frac{1}{7}u_n + \frac{57}{112} + \ln\left(\frac{n^{\frac{11}{28}}}{(2\,n+1)^{\frac{2}{7}}(n+4)^{\frac{3}{28}}}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(2\,k+1)(k+4)k} &= \frac{1}{4}\gamma - \frac{3}{28}\gamma - \frac{2}{7}\gamma + \frac{1}{7}\gamma + \frac{57}{112} + \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{7}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{7}}\right) + \frac{57}{112},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 76. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{k=2\,n}^{3\,n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{3\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2\,n}\frac{1}{k}\\&=u_{3\,n}+\ln(3\,n)-u_{2\,n}-\ln(2\,n)\\&=u_{3\,n}-u_{2\,n}+\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2\,n}^{3\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 77. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}&=\frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{u_{n^2}+\ln(n^2)-u_n-\ln(n)}{\ln(n)}\\&=\frac{u_{n^2}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{2\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}=1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 6

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{7}{(2\,k+1)(k+1)}=-\frac{7}{k+1}+\frac{14}{2\,k+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{(2\,k+1)(k+1)}=-7\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+14\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}&=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\k\text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\&=\sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\&=u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}\\ &= u_{n+1}+\ln(n+1)-1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{(2\,k+1)(k+1)} &= -7\left(u_{n+1}+\ln(n+1)-1\right)+14\left(u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1\right)\\ &= -7u_{n+1}+14u_{2\,n+1}-7u_n-7+\ln\left(\frac{(2\,n+1)^{14}}{(n+1)^7n^7}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{(2\,k+1)(k+1)} &= -7\gamma+14\gamma-7\gamma-7+\ln(16384)\\ &= 14\,\ln(2)-7,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 79. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^2}+\ln(n^2)-u_n-\ln(n)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^2}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{2\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}=1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 80. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{k=2\,n}^{5\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{5\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2\,n}\frac{1}{k}\\ &= u_{5\,n}+\ln(5\,n)-u_{2\,n}-\ln(2\,n)\\ &= u_{5\,n}-u_{2\,n}+\ln\left(\frac{5}{2}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2\,n}^{5\,n} \frac{1}{k} = \gamma - \gamma + \ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 81. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 6

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{7}{(2\,k+3)(k+1)} = \frac{7}{k+1} - \frac{14}{2\,k+3}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{7}{(2\,k+3)(k+1)} = 7\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 14\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+3} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \frac{4}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{2\ell} - \frac{4}{3} \\
&= u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \\
&= u_{n+1} + \ln(n+1) - 1,
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{7}{(2\,k+3)(k+1)} &= 7\left(u_{n+1} + \ln(n+1) - 1\right) - 14\left(u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3}\right) \\
&= 7u_{n+1} - 14u_{2\,n+3} + 7u_{n+1} + \frac{35}{3} + \ln\left(\frac{(n+1)^{14}}{(2\,n+3)^{14}}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{(2\,k+3)(k+1)} &= 7\gamma - 14\gamma + 7\gamma + \frac{35}{3} + \ln\left(\frac{1}{16384}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{16384}\right) + \frac{35}{3},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 82. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^2}+\ln\left(n^2\right)-u_n-\ln(n)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^2}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{2\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=1}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}=1,$$

d'où le résultat.

Corrigé 83. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{51\,n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{51\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= u_{51\,n}+\ln(51\,n)-u_n-\ln(n)\\ &= u_{51\,n}-u_n+\ln(51)\,.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{51\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln(51)=\ln(51)\,,$$

d'où le résultat.

Corrigé 84. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 6

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{k+6}{(2\,k+7)(k+1)k}=\frac{6}{7\,k}-\frac{1}{k+1}+\frac{2}{7\,(2\,k+7)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+6}{(2\,k+7)(k+1)k}=\frac{6}{7}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+7}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+7} &= \sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n+3}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2k+1}\\ &= \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2\,n+7}\frac{1}{k}-\frac{176}{105}\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+7}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2\,n+7}\frac{1}{k}-\frac{176}{105}\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+7}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n+3}\frac{1}{2\ell}-\frac{176}{105}\\ &= u_{2\,n+7}+\ln(2\,n+7)-\frac{1}{2}\left(u_{n+3}+\ln(n+3)\right)-\frac{176}{105},\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}\\ &= u_{n+1}+\ln\left(n+1\right)-1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+6}{(2\,k+7)(k+1)k} &= \frac{6}{7}\left(u_n+\ln\left(n\right)\right)-\left(u_{n+1}+\ln\left(n+1\right)-1\right)+\\ &\quad+\frac{2}{7}\left(u_{2\,n+7}+\ln(2\,n+7)-\frac{1}{2}\left(u_{n+3}+\ln(n+3)\right)-\frac{176}{105}\right)\\ &= \frac{6}{7}u_n-u_{n+1}+\frac{2}{7}u_{2\,n+7}-\frac{1}{7}u_{n+3}+\frac{383}{735}+\ln\left(\frac{(2\,n+7)^{\frac{2}{7}}n^{\frac{6}{7}}}{(n+3)^{\frac{1}{7}}(n+1)}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+6}{(2\,k+7)(k+1)k} &= \frac{6}{7}\gamma-\gamma+\frac{2}{7}\gamma-\frac{1}{7}\gamma+\frac{383}{735}+\ln\left(2^{\frac{2}{7}}\right)\\ &= \ln\left(2^{\frac{2}{7}}\right)+\frac{383}{735},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 85. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= u_{n^4}+\ln\left(n^4\right)-4\left(u_n+\ln(n)\right)\\ &= u_{n^4}-4u_n+4\ln(n)-4\ln(n)\\ &= u_{n^4}-4u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-4\gamma=-3\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 86. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=u_{n^2}+\ln\left(n^2\right)-2\left(u_n+\ln(n)\right)\\&=u_{n^2}-2u_n+2\ln(n)-2\ln(n)\\&=u_{n^2}-2u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-2\gamma=-\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 87. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{11\,n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{11\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&=u_{11\,n}+\ln\left(11\,n\right)-u_n-\ln\left(n\right)\\&=u_{11\,n}-u_n+\ln\left(11\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{11\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(11\right)=\ln\left(11\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 88. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\sum_{k=2\,n}^{7\,n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{7\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2\,n}\frac{1}{k}\\&=u_{7\,n}+\ln\left(7\,n\right)-u_{2\,n}-\ln\left(2\,n\right)\\&=u_{7\,n}-u_{2\,n}+\ln\left(\frac{7}{2}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2\,n}^{7\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(\frac{7}{2}\right)=\ln\left(\frac{7}{2}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=u_{n^2}+\ln\left(n^2\right)-2\left(u_n+\ln(n)\right)\\&=u_{n^2}-2u_n+2\ln(n)-2\ln(n)\\&=u_{n^2}-2u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\gamma-2\gamma=-\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 90. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{88\,n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{88\,n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&=u_{88\,n}+\ln\left(88\,n\right)-u_n-\ln\left(n\right)\\&=u_{88\,n}-u_n+\ln\left(88\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{88\,n}\frac{1}{k}=\gamma-\gamma+\ln\left(88\right)=\ln\left(88\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 91. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{345}}\frac{1}{k}&=\frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^{345}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{u_{n^{345}}+\ln\left(n^{345}\right)-u_n-\ln\left(n\right)}{\ln(n)}\\&=\frac{u_{n^{345}}-u_n}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{345\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=344}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{345}}\frac{1}{k}=344,$$

d'où le résultat.

Corrigé 92. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^{551}}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^{551}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^{551}}+\ln\left(n^{551}\right)-u_{n^2}-\ln\left(n^2\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^{551}}-u_{n^2}}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{551\ln(n)-2\ln(n)}{\ln(n)}}_{=549}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^2}^{n^{551}}\frac{1}{k}=549,$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{92}}\frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^{92}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^{92}}+\ln\left(n^{92}\right)-u_{n}-\ln\left(n\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^{92}}-u_{n}}{\ln(n)}+\underbrace{\frac{92\ln(n)-\ln(n)}{\ln(n)}}_{=91}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n}^{n^{92}}\frac{1}{k}=91,$$

d'où le résultat.

Corrigé 94. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 7

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{3}{(2\,k+1)(k+1)k}=\frac{3}{k}+\frac{3}{k+1}-\frac{12}{2\,k+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(2\,k+1)(k+1)k}=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-12\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-1\\ &= \sum_{k=1}^{2\,n+1}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2\ell}-1\\ &= u_{2\,n+1}+\ln(2\,n+1)-\frac{1}{2}\left(u_n+\ln(n)\right)-1,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \\ &= u_{n+1} + \ln(n+1) - 1,\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2\,k+1)(k+1)k} &= 3\,(u_n + \ln(n)) + 3\,(u_{n+1} + \ln(n+1) - 1) + \\ &\quad - 12\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1\right) \\ &= 3u_n + 3u_{n+1} - 12u_{2\,n+1} + 6u_n + 9 + \ln\left(\frac{(n+1)^3 n^9}{(2\,n+1)^{12}}\right).\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2\,k+1)(k+1)k} &= 3\gamma + 3\gamma - 12\gamma + 6\gamma + 9 + \ln\left(\frac{1}{4096}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4096}\right) + 9,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 95. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{13}} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)} \left(\sum_{k=1}^{n^{13}} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{u_{n^{13}} + \ln\left(n^{13}\right) - u_n - \ln(n)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_{n^{13}} - u_n}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{13\ln(n) - \ln(n)}{\ln(n)}}_{=12}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{n^{13}} \frac{1}{k} = 12,$$

d'où le résultat.

Corrigé 96. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 7

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+141)k} = \frac{1}{141\,k} - \frac{140}{39621\,(k+141)} - \frac{2}{281\,(2\,k+1)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+141)k} = \frac{1}{141} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{140}{39621} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+141} - \frac{2}{281} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k+1} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+1} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2\ell} - 1 \\
&= u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1,
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+141} &= \sum_{k=142}^{n+141} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+141} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{141} \frac{1}{k} \\
&= u_{n+141} + \ln\,(n+141) - \frac{18420327039982467977683059131589948994910848850884262273592293}{33312720618553145840562713089120360606823375590405920630576000}
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+141)k} &= \frac{1}{141}\,(u_n + \ln\,(n)) - \frac{140}{39621}\left(u_{n+141} + \ln\,(n+141) - \frac{1842032703998246797768305913}{3331272061855314584056271308}\right. \\
&\quad - \frac{2}{281}\left(u_{2\,n+1} + \ln(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,(u_n + \ln(n)) - 1\right) \\
&= \frac{1}{141}u_n - \frac{140}{39621}u_{n+141} - \frac{2}{281}u_{2\,n+1} + \frac{1}{281}u_n + \frac{25130460764576744496996405625255}{942773788305495850963525182360027}
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(2\,k+1)(k+141)k} &= \frac{1}{141}\gamma - \frac{140}{39621}\gamma - \frac{2}{281}\gamma + \frac{1}{281}\gamma + \frac{25130460764576744496996405625255562163}{9427737883054958509635251823600270054} \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{279}{281}}\right) + \frac{251304607645767444969964056252555621631428128791237454 8}{942773788305495850963525182360027005430677831619623558}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 97. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n^{15}} \frac{1}{k} - 15\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{15}} + \ln\left(n^{15}\right) - 15\,(u_n + \ln(n)) \\
&= u_{n^{15}} - 15u_n + 15\ln(n) - 15\ln(n) \\
&= u_{n^{15}} - 15u_n.
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n^{15}} \frac{1}{k} - 15\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 15\gamma = -14\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 98. Soit n au voisinage de $+\infty$. Une décomposition en éléments simples donne : ← page 7

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \frac{4\,k+1}{(2\,k+3)(k+1)k} = \frac{1}{3\,k} + \frac{3}{k+1} - \frac{20}{3\,(2\,k+3)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4\,k+1}{(2\,k+3)(k+1)k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{20}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+3}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k+3} &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{2k+1}\\
&= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\,n+3}\frac{1}{k} - \frac{4}{3}\\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\,n+3}\frac{1}{k} - \frac{4}{3}\\
&= \sum_{k=1}^{2\,n+3}\frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{1}{2\ell} - \frac{4}{3}\\
&= u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}\\
&= u_{n+1} + \ln\,(n+1) - 1,
\end{aligned}$$

ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{4\,k+1}{(2\,k+3)(k+1)k} &= \frac{1}{3}\left(u_n + \ln\,(n)\right) + 3\left(u_{n+1} + \ln\,(n+1) - 1\right) +\\
&\quad - \frac{20}{3}\left(u_{2\,n+3} + \ln(2\,n+3) - \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \ln(n+1)\right) - \frac{4}{3}\right)\\
&= \frac{1}{3}u_n + 3u_{n+1} - \frac{20}{3}u_{2\,n+3} + \frac{10}{3}u_{n+1} + \frac{53}{9} + \ln\left(\frac{(n+1)^{\frac{19}{3}}\,n^{\frac{1}{3}}}{(2\,n+3)^{\frac{20}{3}}}\right).
\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4\,k+1}{(2\,k+3)(k+1)k} &= \frac{1}{3}\gamma + 3\gamma - \frac{20}{3}\gamma + \frac{10}{3}\gamma + \frac{53}{9} + \ln\left(\frac{1}{128}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{128}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{53}{9},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 99. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^{17}} \frac{1}{k} - 17\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{n^{17}} + \ln\left(n^{17}\right) - 17\left(u_n + \ln(n)\right)\\ &= u_{n^{17}} - 17u_n + 17\ln(n) - 17\ln(n)\\ &= u_{n^{17}} - 17u_n.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^{17}} \frac{1}{k} - 17\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma - 17\gamma = -16\,\gamma,$$

d'où le résultat.

Corrigé 100. Soit n au voisinage de $+\infty$. On a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^3}^{n^5} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n^5} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{u_{n^5} + \ln\left(n^5\right) - u_{n^3} - \ln\left(n^3\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{u_{n^5} - u_{n^3}}{\ln(n)} + \underbrace{\frac{5\ln(n) - 3\ln(n)}{\ln(n)}}_{=2}.\end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ, donc toutes ses suites extraites également, tandis que le logarithme tend vers $+\infty$. On en déduit, quand on prend la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=n^3}^{n^5} \frac{1}{k} = 2,$$

d'où le résultat.