Méthode de comparaison entre une série et des intégrales

💡 Exercices d'entraînement sur la comparaison entre une série et des intégrales. Ici, on l'utilise spécifiquement pour obtenir des équivalents de sommes partielles ou de restes de séries convergentes.

Commentaire sur la rédaction des corrigés. Je ne justifie pas l'existence des sommes et intégrales en présence, même quand les sommes sont à support infini et les intégrales impropres. La raison à cela : les séries sont à termes positifs et les intégrandes sont également positifs. Il n'y a donc pas de problème d'existence (quitte à ce que ces sommes ou intégrales soient potentiellement égales à $+\infty$ en cas de divergence, ce qui n'est de toute façon pas le cas ici).

Cette explication est insuffisante lorsque j'intègre par parties dans certains corrigés : là, il faut bien s'être assuré de la convergence préalable d'au moins une des deux intégrales en jeu dans la formule de l'intégration par parties. Le lecteur vérifiera que c'est trivialement le cas, puisque ces intégrations par parties me ramènent à des intégrales convergentes de référence.

Si vous traitez ces exercices sans avoir encore vu ce qu'est une intégrale impropre, vous devrez adapter le raisonnement des corrigés en remplaçant les écritures du type « $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ » par : « $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{n_0}^{N} f$ ».

Enfin, le raisonnement menant à l'encadrement donné par la comparaison série-intégrale est détaillé. Le niveau de détail exigé dans un examen ou concours dépend grandement du contexte de la question où on l'utilise, et il est bon de savoir jauger en chaque circonstance ce qui peut être tronqué ou non sans sacrifier l'essentiel.

Exercice 1. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 12

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

Exercice 2. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 13

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{55}}.$$

Exercice 3. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 13

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Exercice 4. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 14

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}.$$

Exercice 5. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 16

$$\sum_{k=2}^{n} k^{12} \ln(k).$$

Exercice 6. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 17

$$\sum_{k=2}^{n} k \ln(k).$$

Exercice 7. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent → page 18

asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^3}.$$

Exercice 8. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 19

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{32}}.$$

Exercice 9. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 20

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{13}}.$$

Exercice 10. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 21

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{2}}.$$

Exercice 11. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 21

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}.$$

Exercice 12. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 23

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}.$$

Exercice 13. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 24

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Exercice 14. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 25

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)}.$$

Exercice 15. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 26

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}.$$

Exercice 16. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 27

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}.$$

Exercice 17. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent → page 28

asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}.$$

Exercice 18. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 29

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}.$$

Exercice 19. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 30

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 20. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 31

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Exercice 21. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 32

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Exercice 22. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 33

$$\sum_{k=2}^{n} k^{\frac{1}{11}} \ln(k).$$

Exercice 23. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 34

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}}.$$

Exercice 24. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 35

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}.$$

Exercice 25. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 36

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 26. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 37

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{4}}.$$

Exercice 27. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent → page 38

asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 28. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 39

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}.$$

Exercice 29. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 40

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}.$$

Exercice 30. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 41

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 31. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 42

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}.$$

Exercice 32. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 43

$$\sum_{k=2}^{n} \sqrt{k}\ln(k).$$

Exercice 33. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 44

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^5}{k}.$$

Exercice 34. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 45

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(6\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 35. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 46

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 36. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 47

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Exercice 37. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent → page 47

asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{13}.$$

Exercice 38. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 48

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}.$$

Exercice 39. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 49

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}.$$

Exercice 40. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 51

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 41. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 52

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}}.$$

Exercice 42. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 53

$$\sum_{k=2}^{n} k^{\frac{1}{3}} \ln(k).$$

Exercice 43. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 54

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}.$$

Exercice 44. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 55

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}.$$

Exercice 45. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 56

$$\sum_{k=2}^{n} k^{\frac{1}{4}} \ln(k).$$

Exercice 46. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 57

$$\sum_{k=2}^{n} k^{2} \ln(k).$$

Exercice 47. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 58

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 48. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 59

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}.$$

Exercice 49. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 60

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}.$$

Exercice 50. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 62

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Exercice 51. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 62

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}.$$

Exercice 52. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 64

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{15}}.$$

Exercice 53. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 65

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 54. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 66

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 55. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 67

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Exercice 56. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 67

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}}.$$

Exercice 57. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 68

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}}.$$

Exercice 58. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 69

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}.$$

Exercice 59. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 71

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{4}}}.$$

Exercice 60. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 72

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2} k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}}.$$

Exercice 61. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 73

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{4}}.$$

Exercice 62. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 74

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}.$$

Exercice 63. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 75

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 64. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 76

$$\sum_{k=2}^{n} k \ln(k).$$

Exercice 65. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 77

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{4}}}.$$

Exercice 66. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 79

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 67. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 80

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 68. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 81

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{6}}.$$

Exercice 69. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 82

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}.$$

Exercice 70. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 83

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}}.$$

Exercice 71. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 83

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{2}}.$$

Exercice 72. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 84

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}.$$

Exercice 73. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 85

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}.$$

Exercice 74. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 86

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

Exercice 75. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 88

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Exercice 76. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 88

$$\sum_{k=1}^{n} k^{31}.$$

Exercice 77. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 89

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 78. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 90

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}.$$

Exercice 79. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 92

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}.$$

Exercice 80. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 93

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 81. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 93

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Exercice 82. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 94

$$\sum_{k=1}^{n} k^{141}.$$

Exercice 83. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 95

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 84. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 96

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 85. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 97

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 86. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 98

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 87. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 99

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}.$$

Exercice 88. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 101

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45} k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}.$$

Exercice 89. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 102

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{3}}}.$$

Exercice 90. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 103

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}}.$$

Exercice 91. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 104

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 \ln(k).$$

Exercice 92. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 105

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{96}{5}}}.$$

Exercice 93. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 106

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Exercice 94. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 107

$$\sum_{k=2}^{n} k^{\frac{3}{13}} \ln(k).$$

Exercice 95. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 108

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 96. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 109

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4 k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}.$$

Exercice 97. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 111

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}.$$

Exercice 98. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 112

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}.$$

Exercice 99. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 113

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 100. Utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales pour déterminer un équivalent asymptotique simple quand $n \to +\infty$ de : → page 114

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^7}.$$

Corrigé 1. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 1

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\ln(x)-1}{x^2}.$$

On observe que $-\ln(x)+1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 1$, si et seulement si $x < e^1$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est strictement croissante sur $]0,e]$, et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$, donc sur $[3,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{3}^{n} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, donc finalement :

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\ln(3). \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = 1$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x)^2$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{1}{2}\ln(3)^2 + \frac{1}{2}\ln(n+1)^2 \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant -\frac{1}{2}\ln(3)^2 + \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{3}\ln(3).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{1}{2}\ln(3)^2$ et $c_2 = -\dfrac{1}{2}\ln(3)^2 + \dfrac{1}{3}\ln(3)$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{2}\ln(n)^2$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{2}\ln(n+1)^2$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{2}\ln(n)^2$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ est équivalent à $\dfrac{1}{2}\ln(n)^2$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{2}\ln(n)^2 > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} + \frac{2\,c_1}{\ln(n)^2} \leqslant \frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}}{\frac{1}{2}\ln(n)^2} \leqslant \frac{2\,c_2}{\ln(n)^2} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}}{\frac{1}{2}\ln(n)^2} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)^2.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{\ln(k)}{k}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{2}\ln(n)^2$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)^2$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 2. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{55}}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. On a donc : ← page 1

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{55}} = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} k^{\frac{1}{55}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} x^{\frac{1}{55}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} x^{\frac{1}{55}}\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_0^n x^{\frac{1}{55}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{55}}$, donc finalement :

$$\int_0^n x^{\frac{1}{55}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{55}} \leqslant \int_1^{n+1} x^{\frac{1}{55}}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto x^{\frac{1}{55}}$ est $x \mapsto \frac{55}{56}\,x^{\frac{56}{55}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{55}} \leqslant \frac{55}{56}\,(n+1)^{\frac{56}{55}} - \frac{55}{56}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{55}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{55}{56}\,(n+1)^{\frac{56}{55}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{55}}$ est équivalent à $\dfrac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{55}}}{\frac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}}} \leqslant \left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{56}{55}} - \frac{1}{n^{\frac{56}{55}}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{56}{55}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{55}}}{\frac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{55}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{\frac{1}{55}}$ est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\frac{1}{n^{\frac{56}{55}}} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{55}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{55}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{\frac{1}{55}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{55}{56}\,x^{\frac{56}{55}}\right]_0^1 = \frac{55}{56},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{55}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{55}{56}\,n^{\frac{56}{55}}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 3. L'application $f : x \mapsto \ln(x)$ est clairement croissante sur $]0,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la ← page 1

méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto 1$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto x$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^n - \int_{1}^{n} 1\mathrm{d}x \\ &= n\ln(n) - [x]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\,\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = -2\,\ln(2) + 2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $n\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $(n+1)\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $n\ln(n) > 0$:

$$\frac{c_1}{n\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{c_2}{n\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Corrigé 4. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 1

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}} = -\dfrac{11}{3} \cdot \left(-\dfrac{3\,e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{11\,x^{\frac{10}{11}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $-\dfrac{11}{3}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -3\,x^{\frac{1}{11}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}}{x^{\frac{10}{11}}}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{11}{3}\,e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{11}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}} \leqslant \frac{11}{3}\,e^{\left(-3\,(n-1)^{\frac{1}{11}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{11}{3}\,e^{\left(-3\,(n-1)^{\frac{1}{11}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}$ est équivalent à $\dfrac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}}{\frac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)}} \leqslant e^{\left(-3\,(n-1)^{\frac{1}{11}}+3\,n^{\frac{1}{11}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-3\,(n-1)^{\frac{1}{11}}+3\,n^{\frac{1}{11}}} = e^{-3\,n^{\frac{1}{11}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{11}}-1\right)} = e^{-3\,n^{\frac{1}{11}}\left(\left(1-\frac{1}{11\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{3}{11\,n^{\frac{10}{11}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{10}{11}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant

évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}}{\frac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{11}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{11}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{11}}\right)}}{k^{\frac{10}{11}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k\to+\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 5. L'application $f : x \mapsto x^{12}\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 1

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \frac{1}{x}\times x^{12} + \ln(x)\times\left(12\,x^{11}\right) = x^{11}(12\,\ln(x)+1).$$

On observe que $12\,\ln(x)+1>0$ si et seulement si $\ln(x) > -\frac{1}{12}$, si et seulement si $x > e^{-\frac{1}{12}}$. On en déduit que $f : x\mapsto x^{12}\ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{\left(-\frac{1}{12}\right)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{\left(-\frac{1}{12}\right)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto x^{12}\ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{\left(-\frac{1}{12}\right)}, +\infty\right[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{12}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} k^{12}\ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} x^{12}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} x^{12}\ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n x^{12}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{12}\ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n x^{12}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{12}\ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} x^{12}\ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x\mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x\mapsto x^{12}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x\mapsto \frac{1}{13}\,x^{13}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n x^{12}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{13}\,x^{13}\ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{13}\,x^{12}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{13}\,n^{13}\ln(n) - \left[\frac{1}{169}\,x^{13}\right]_1^n = \frac{1}{13}\,n^{13}\ln(n) - \frac{1}{169}\,n^{13} + \frac{1}{169}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{13}\,n^{13}\ln(n) - \frac{1}{169}\,n^{13} + \frac{1}{169} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{12}\ln(k) \leqslant \frac{1}{13}\,(n+1)^{13}\ln(n+1) - \frac{1}{169}\,(n+1)^{13} - \frac{8192}{13}\,\ln(2) + \frac{8192}{169}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{1}{169}$ et $c_2 = -\dfrac{8192}{13}\,\ln(2) + \dfrac{8192}{169}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{12}\ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{1}{13}\,n^{13}\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{13}\,(n+1)^{13}\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{13}\, n^{13} \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{12} \ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{1}{13}\, n^{13} \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{13}\, n^{13} \ln(n) > 0$:

$$-\frac{1}{13 \ln(n)} + \frac{13\, c_1}{n^{13} \ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{12} \ln(k)}{\frac{1}{13}\, n^{13} \ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{13} + \frac{13\, c_2}{n^{13} \ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{12} \ln(k)}{\frac{1}{13}\, n^{13} \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{12} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{13}\, n^{13} \ln(n).$$

Corrigé 6. L'application $f : x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 1

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times x + \ln(x) \times (1) = \ln(x) + 1.$$

On observe que $\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) > -1$, si et seulement si $x > e^{-1}$. On en déduit que $f : x \mapsto x \ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{(-1)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{(-1)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x \ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{(-1)}, +\infty\right[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} k \ln(k)\, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} x \ln(x)\, \mathrm{d}x = \int_{2}^{n+1} x \ln(x)\, \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{1}^{n} x \ln(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n} x \ln(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k \ln(k) \leqslant \int_{2}^{n+1} x \ln(x)\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto x$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{1}{2}\, x^2$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n} x \ln(x)\, \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\, x^2 \ln(x)\right]_1^n - \int_{1}^{n} \frac{1}{2}\, x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\, n^2 \ln(n) - \left[\frac{1}{4}\, x^2\right]_1^n = \frac{1}{2}\, n^2 \ln(n) - \frac{1}{4}\, n^2 + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{2}\, n^2 \ln(n) - \frac{1}{4}\, n^2 + \frac{1}{4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k \ln(k) \leqslant \frac{1}{2}\,(n+1)^2 \ln(n+1) - \frac{1}{4}\,(n+1)^2 - 2\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{1}{4}$ et $c_2 = -2\ln(2) + 1$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\frac{1}{2}n^2\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\frac{1}{2}(n+1)^2\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{1}{2}n^2\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)$ est équivalent à $\frac{1}{2}n^2\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{1}{2}n^2\ln(n) > 0$:

$$-\frac{1}{2\ln(n)} + \frac{2c_1}{n^2\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)}{\frac{1}{2}n^2\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^2 + \frac{2c_2}{n^2\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)}{\frac{1}{2}n^2\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}n^2\ln(n).$$

Corrigé 7. L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^3}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 1

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^3}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)^3}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)^3}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^3}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^3}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^3}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^3}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^3}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -3$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^3}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2\ln(x)^2}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{2\ln(n)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3} \leqslant \frac{1}{2\ln(n-1)^2}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{1}{2\ln(n-1)^2}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{1}{2\ln(n)^2}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier).

Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{2\,\ln(n)^2}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3}$ est équivalent à $\dfrac{1}{2\,\ln(n)^2}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{2\,\ln(n)^2} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3}}{\frac{1}{2\,\ln(n)^2}} \leqslant \frac{\ln(n)^2}{\ln(n-1)^2}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3}}{\frac{1}{2\,\ln(n)^2}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,\ln(n)^2}.$$

Remarque. Une comparaison entre une série et une intégrale aurait également permis de démontrer (si vous reprenez la majoration obtenue par cette méthode) que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k\ln(k)^3}$ converge effectivement. Nous vous invitons à vous en convaincre.

Corrigé 8. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{32}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 2

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{32}} + \ln(x) \times \left(-\frac{32}{x^{33}}\right) = -\frac{32\,\ln(x) - 1}{x^{33}}.$$

On observe que $-32\,\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{1}{32}$, si et seulement si $x < e^{\frac{1}{32}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{32}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^{\frac{1}{32}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{32}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{32}}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{32}}, +\infty\right[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{32}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k^{32}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^{32}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{32}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{32}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{32}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{32}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{32}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{32}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;

— en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{32}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto -\frac{1}{31\,x^{31}}$.

Puisque les intégrales en jeu sont impropres (on intègre jusqu'à $+\infty$), il faut encore vérifier que le terme entre crochets de l'intégration par parties est bien défini. C'est bien le cas, puisque : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{31\,x^{31}} = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{n}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{32}}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{31\,x^{31}}\right]_n^{+\infty} - \int_{n}^{+\infty} -\frac{1}{31\,x^{32}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(n)}{31\,n^{31}} - \left[\frac{1}{961\,x^{31}}\right]_n^{+\infty} = \frac{\ln(n)}{31\,n^{31}} + \frac{1}{961\,n^{31}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{\ln(n)}{31\,n^{31}}+\frac{1}{961\,n^{31}}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{32}}\leqslant\frac{\ln(n-1)}{31\,(n-1)^{31}}+\frac{1}{961\,(n-1)^{31}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{32}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{\ln(n-1)}{31\,(n-1)^{31}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{\ln(n)}{31\,n^{31}}$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{\ln(n)}{31\,n^{31}}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{32}}$ est équivalent à $\dfrac{\ln(n)}{31\,n^{31}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{\ln(n)}{31\,n^{31}}>0$:

$$\frac{1}{31\,\ln(n)}+1\leqslant\frac{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{32}}}{\frac{\ln(n)}{31\,n^{31}}}\leqslant-\frac{\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n)}}{\left(\frac{1}{n}-1\right)^{31}}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)}=\frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}=\frac{\ln(n)}{\ln(n)}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{32}}}{\frac{\ln(n)}{31\,n^{31}}}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{32}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(n)}{31\,n^{31}}.$$

Corrigé 9. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x\mapsto\dfrac{1}{x^{13}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 2

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{13}}=\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^{13}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^{13}}\mathrm{d}x=\int_{n-1}^{+\infty}\frac{1}{x^{13}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty}\frac{1}{x^{13}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{13}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty}\frac{1}{x^{13}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{13}}\leqslant\int_{n-1}^{+\infty}\frac{1}{x^{13}}\mathrm{d}x.\tag{1}$$

Une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x^{13}}$ est $x\mapsto-\frac{1}{12\,x^{12}}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{12\,n^{12}}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{13}}\leqslant\frac{1}{12\,(n-1)^{12}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{13}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{12\,(n-1)^{12}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{12\,n^{12}}$ quand $n\to+\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{12\,n^{12}}$. Ainsi nous conjecturons que

$\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{13}}$ est équivalent à $\dfrac{1}{12\,n^{12}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{12\,n^{12}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{13}}}{\frac{1}{12\,n^{12}}} \leqslant \frac{n^{12}}{(n-1)^{12}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n^{12}}{(n-1)^{12}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{12}}{n^{12}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{13}}}{\frac{1}{12\,n^{12}}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{13}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12\,n^{12}}.$$

Corrigé 10. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc : ← page 2

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{n-1}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{n}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{n} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{n}{n-1}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Corrigé 11. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables ← page 2

(logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{12}}} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{12\, x^{\frac{13}{12}}}\right) = -\frac{\ln(x) - 12}{12\, x^{\frac{13}{12}}}.$$

On observe que $-\frac{1}{12}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 12$, si et seulement si $x < e^{12}$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^{12}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{12}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}$ est décroissante sur $\left[e^{12}, +\infty\right[$, donc sur $[n_0, +\infty[$, où l'on a posé : $n_0 = \lfloor e^{12} \rfloor + 1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}} \leqslant \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{12}}}. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
- en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{12}}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{12}{11}\, x^{\frac{11}{12}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x &= \left[\frac{12}{11}\, x^{\frac{11}{12}} \ln(x)\right]_{n_0}^{n} - \int_{n_0}^{n} \frac{12}{11\, x^{\frac{1}{12}}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n) - \frac{12}{11}\, n_0^{\frac{11}{12}} \ln(n_0) - \left[\frac{144}{121}\, x^{\frac{11}{12}}\right]_{n_0}^{n} = \frac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n) - \frac{12}{11}\, n_0^{\frac{11}{12}} \ln(n_0) - \frac{144}{121}\, n^{\frac{11}{12}} + \frac{144}{121}\, n_0^{\frac{11}{12}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{12}{11}(n+1)^{\frac{11}{12}} \ln(n+1) - \frac{12}{11}\, n_0^{\frac{11}{12}} \ln(n_0) - \frac{144}{121}(n+1)^{\frac{11}{12}} + \frac{144}{121}\, n_0^{\frac{11}{12}} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}} \leqslant \frac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n) - \frac{12}{11}\, n_0^{\frac{11}{12}} \ln(n_0) - \frac{144}{121}\, n^{\frac{11}{12}} + \frac{144}{121}\, n_0^{\frac{11}{12}} +$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{12}{11}\, n_0^{\frac{11}{12}} \ln(n_0) + \dfrac{144}{121}\, n_0^{\frac{11}{12}}$ et $c_2 = -\dfrac{12}{11}\, n_0^{\frac{11}{12}} \ln(n_0) + \dfrac{144}{121}\, n_0^{\frac{11}{12}} + \dfrac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{12}}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n)$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{12}{11}(n+1)^{\frac{11}{12}} \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}$ est équivalent à $\dfrac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n) > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{11}{12}} + \frac{11\, c_1}{12\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}}{\frac{12}{11}\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n)} \leqslant \frac{11\, c_2}{12\, n^{\frac{11}{12}} \ln(n)} - \frac{12}{11 \ln(n)} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}=\frac{\ln(n)}{\ln(n)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}}{\frac{12}{11}\,n^{\frac{11}{12}}\ln(n)}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{12}{11}\,n^{\frac{11}{12}}\ln(n)\,.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n_0-1}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}$ est négligeable devant $\dfrac{12}{11}\,n^{\frac{11}{12}}\ln(n)$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{12}{11}\,n^{\frac{11}{12}}\ln(n)$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{12}}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 12. L'application $f : x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 2

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}+\ln(x)\times\left(-\frac{1}{6\,x^{\frac{7}{6}}}\right)=-\frac{\ln(x)-6}{6\,x^{\frac{7}{6}}}.$$

On observe que $-\frac{1}{6}\ln(x)+1>0$ si et seulement si $\ln(x)<6$, si et seulement si $x<e^6$. On en déduit que $f : x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}$ est strictement croissante sur $\left]0,e^6\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^6,+\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}$ est décroissante sur $\left[e^6,+\infty\right[$, donc sur $[n_0,+\infty[$, où l'on a posé : $n_0=\lfloor e^6\rfloor+1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}=\sum_{k=n_0+1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n_0+1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x=\int_{n_0}^{n}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n+1}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}\leqslant\int_{n_0}^{n}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x+\frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{6}}}.\tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x\mapsto\frac{1}{x}$;

— en intégrant $x\mapsto\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x\mapsto\frac{6}{5}\,x^{\frac{5}{6}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{n}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x&=\left[\frac{6}{5}\,x^{\frac{5}{6}}\ln(x)\right]_{n_0}^{n}-\int_{n_0}^{n}\frac{6}{5\,x^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x\\&=\frac{6}{5}\,n^{\frac{5}{6}}\ln(n)-\frac{6}{5}\,n_0^{\frac{5}{6}}\ln(n_0)-\left[\frac{36}{25}\,x^{\frac{5}{6}}\right]_{n_0}^{n}=\frac{6}{5}\,n^{\frac{5}{6}}\ln(n)-\frac{6}{5}\,n_0^{\frac{5}{6}}\ln(n_0)-\frac{36}{25}\,n^{\frac{5}{6}}+\frac{36}{25}\,n_0^{\frac{5}{6}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{6}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{6}}\ln(n+1)-\frac{6}{5}\,n_0^{\frac{5}{6}}\ln(n_0)-\frac{36}{25}\,(n+1)^{\frac{5}{6}}+\frac{36}{25}\,n_0^{\frac{5}{6}}\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}\leqslant\frac{6}{5}\,n^{\frac{5}{6}}\ln(n)-\frac{6}{5}\,n_0^{\frac{5}{6}}\ln(n_0)-\frac{36}{25}\,n^{\frac{5}{6}}+\frac{36}{25}\,n_0^{\frac{5}{6}}+\frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{6}}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac{6}{5} n_0^{\frac{5}{6}} \ln(n_0) + \frac{36}{25} n_0^{\frac{5}{6}}$ et $c_2 = -\frac{6}{5} n_0^{\frac{5}{6}} \ln(n_0) + \frac{36}{25} n_0^{\frac{5}{6}} + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{6}}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n)$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{6}{5}(n+1)^{\frac{5}{6}} \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}$ est équivalent à $\frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n) > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{5}{6}} + \frac{5\,c_1}{6\,n^{\frac{5}{6}} \ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}}{\frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n)} \leqslant \frac{5\,c_2}{6\,n^{\frac{5}{6}} \ln(n)} - \frac{6}{5\,\ln(n)} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}}{\frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n).$$

Comme $\sum_{k=2}^{n_0-1} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}$ est négligeable devant $\frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n)$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6}{5} n^{\frac{5}{6}} \ln(n)$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{6}}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 13. L'application $f : x \mapsto \ln(x)$ est clairement croissante sur $]0,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 2
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_1^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;

— en intégrant $x \mapsto 1$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto x$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^n - \int_1^n 1\mathrm{d}x \\ &= n\ln(n) - [x]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = -2\ln(2) + 2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $n\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $(n+1)\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $n\ln(n) > 0$:

$$\frac{c_1}{n\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{c_2}{n\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Corrigé 14. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 2
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, donc finalement :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\ln(2)}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -1$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\ln(\ln(3)) + \ln(\ln(n+1)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant -\ln(\ln(2)) + \ln(\ln(n)).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\ln(\ln(3))$ et $c_2 = -\ln(\ln(2))$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\ln(\ln(n))$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\ln(\ln(n+1))$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\ln(\ln(n)) > 0$:

$$\frac{c_1}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{c_2}{\ln(\ln(n))} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 15. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 2

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x + 1. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(n+1)^{\frac{2}{3}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{3}{2}\, n^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{3}{2}\, n^{\frac{2}{3}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{3}{2}(n+1)^{\frac{2}{3}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{3}{2}\, n^{\frac{2}{3}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$ est équivalent à $\dfrac{3}{2} n^{\frac{2}{3}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{3}{2} n^{\frac{2}{3}} > 0$:

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}}{\frac{3}{2} n^{\frac{2}{3}}} \leqslant -\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} + 1.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{2}{3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}}{\frac{3}{2} n^{\frac{2}{3}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2} n^{\frac{2}{3}}.$$

Corrigé 16. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 2

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{5\ln(x)^{\frac{3}{2}}}{2x} \times \frac{1}{x} + \ln(x)^{\frac{5}{2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{(2\ln(x) - 5)\ln(x)^{\frac{3}{2}}}{2x^2}.$$

On observe que $-\ln(x) + \frac{5}{2} > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{5}{2}$, si et seulement si $x < e^{\frac{5}{2}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x}$ est strictement croissante sur $\left]1, e^{\frac{5}{2}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{5}{2}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{5}{2}}, +\infty\right[$, donc sur $[n_0, +\infty[$, où l'on a posé : $n_0 = \lfloor e^{\frac{5}{2}} \rfloor + 1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x} \mathrm{d}x = \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k} \leqslant \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x} \mathrm{d}x + \frac{\ln(n_0)^{\frac{5}{2}}}{n_0}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = \frac{5}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{5}{2}}}{x}$ est $x \mapsto \frac{2}{7}\ln(x)^{\frac{7}{2}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{2}{7}\ln(n+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7}\ln(n_0)^{\frac{7}{2}} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k} \leqslant \frac{2}{7}\ln(n)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7}\ln(n_0)^{\frac{7}{2}} + \frac{\ln(n_0)^{\frac{5}{2}}}{n_0}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{2}{7}\ln(n_0)^{\frac{7}{2}}$ et $c_2 = -\dfrac{2}{7}\ln(n_0)^{\frac{7}{2}} + \dfrac{\ln(n_0)^{\frac{5}{2}}}{n_0}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{2}{7}\ln(n)^{\frac{7}{2}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{2}{7}\ln(n+1)^{\frac{7}{2}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{2}{7}\ln(n)^{\frac{7}{2}}$ quand

$n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}$ est équivalent à $\dfrac{2}{7} \ln(n)^{\frac{7}{2}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{2}{7} \ln(n)^{\frac{7}{2}} > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{7\,c_1}{2\,\ln(n)^{\frac{7}{2}}} \leqslant \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}}{\frac{2}{7}\ln(n)^{\frac{7}{2}}} \leqslant \frac{7\,c_2}{2\,\ln(n)^{\frac{7}{2}}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}}{\frac{2}{7}\ln(n)^{\frac{7}{2}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{7} \ln(n)^{\frac{7}{2}}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n_0-1} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}$ est négligeable devant $\dfrac{2}{7} \ln(n)^{\frac{7}{2}}$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{7} \ln(n)^{\frac{7}{2}}$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)^{\frac{5}{2}}}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 17. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 2

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{2\,e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{3\,x^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \times \left(\frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{3\,x^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(\frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\right) \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{5}{3}}}.$$

On observe que $\frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} > 0$ si et seulement si $x < 8$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est d'abord strictement décroissante sur $]0,8]$, puis strictement croissante sur $[8, +\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est croissante sur $[8, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} = \sum_{k=8}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=8}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x = \int_8^{n+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_8^{n} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=9}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_8^{n} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\,e^2 \leqslant \sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant \int_8^{n+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} = 3 \cdot \left(\dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{3\,x^{\frac{2}{3}}}\right)$ est, à la constante multiplicative 3 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est donc $x \mapsto 3\,e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{11}{4}\,e^2 + 3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)} \leqslant \sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant -3\,e^2 + 3\,e^{\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{11}{4}\,e^2$ et $c_2 = -3\,e^2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $3\,e^{\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est équivalent à $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)} > 0$:

$$\frac{1}{3}\,c_1 e^{\left(-n^{\frac{1}{3}}\right)} + 1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}} \leqslant \frac{1}{3}\,c_2 e^{\left(-n^{\frac{1}{3}}\right)} + e^{\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Or :

$$e^{(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}} = e^{n^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)} = e^{n^{\frac{1}{3}}\left(\left(1 + \frac{1}{3\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)} = e^{\frac{1}{3\,n^{\frac{2}{3}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est négligeable devant $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$, d'où le résultat.

Corrigé 18. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 3

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$, donc finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x + 1. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$ est $x \mapsto \frac{5}{4}\, x^{\frac{4}{5}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{5}{4} \cdot 2^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{4}\,(n+1)^{\frac{4}{5}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} \leqslant \frac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{4}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{5}{4}\,(n+1)^{\frac{4}{5}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$ est équivalent à $\dfrac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}} > 0$:

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{4}{5}} - \frac{2^{\frac{4}{5}}}{n^{\frac{4}{5}}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}}} \leqslant -\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}} + 1.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{4}{5}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{4}\, n^{\frac{4}{5}}.$$

Corrigé 19. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 3

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{2\, x^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{\ln(x) - 2}{2\, x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $-\frac{1}{2}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 2$, si et seulement si $x < e^2$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^2\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^2, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\left[e^2, +\infty\right[$, donc sur $[8, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=9}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} = \sum_{k=9}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=9}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_8^{n} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_8^{n+1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=8}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_8^{n+1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=8}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} \leqslant \int_8^{n} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\sqrt{2}\ln(2). \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
- en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- en intégrant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_8^n \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_8^n - \int_8^n \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\ &= -12\sqrt{2}\ln(2) + 2\sqrt{n}\ln(n) - \left[4\sqrt{x}\right]_8^n = -12\sqrt{2}\ln(2) + 2\sqrt{n}\ln(n) + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{n}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-12\sqrt{2}\ln(2) + 2\sqrt{n+1}\ln(n+1) + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{n+1} \leqslant \sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} \leqslant -\frac{45}{4}\sqrt{2}\ln(2) + 2\sqrt{n}\ln(n) + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{n}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -12\sqrt{2}\ln(2) + 8\sqrt{2}$ et $c_2 = -\frac{45}{4}\sqrt{2}\ln(2) + 8\sqrt{2}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $2\sqrt{n}\ln(n)$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $2\sqrt{n+1}\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $2\sqrt{n}\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $2\sqrt{n}\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\sqrt{n}\ln(n) > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\sqrt{\frac{1}{n}+1} + \frac{c_1}{2\sqrt{n}\ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}\ln(n)} \leqslant \frac{c_2}{2\sqrt{n}\ln(n)} - \frac{2}{\ln(n)} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\ln(n).$$

Comme $\sum_{k=2}^{7}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$ est négligeable devant $2\sqrt{n}\ln(n)$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\ln(n)$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 20. L'application $f : x \mapsto \ln(x)$ est clairement croissante sur $]0,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 3

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln(k) \leqslant \int_2^{n+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto 1$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto x$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^n - \int_1^n 1\mathrm{d}x \\ &= n\ln(n) - [x]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\,\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = -2\,\ln(2) + 2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $n\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $(n+1)\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $n\ln(n) > 0$:

$$\frac{c_1}{n\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{c_2}{n\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Corrigé 21. L'application $f : x \mapsto \ln(x)$ est clairement croissante sur $]0,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 3
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto 1$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto x$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^n - \int_1^n 1\mathrm{d}x \\ &= n\ln(n) - [x]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = -2\ln(2) + 2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $n\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $(n+1)\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $n\ln(n) > 0$:

$$\frac{c_1}{n\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{c_2}{n\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Corrigé 22. L'application $f : x \mapsto x^{\frac{1}{11}} \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 3

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times x^{\frac{1}{11}} + \ln(x) \times \left(\frac{1}{11\, x^{\frac{10}{11}}}\right) = \frac{\ln(x) + 11}{11\, x^{\frac{10}{11}}}.$$

On observe que $\frac{1}{11}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) > -11$, si et seulement si $x > e^{-11}$. On en déduit que $f : x \mapsto x^{\frac{1}{11}} \ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{(-11)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{(-11)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{11}} \ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{(-11)}, +\infty\right[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{11}} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} k^{\frac{1}{11}} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} x^{\frac{1}{11}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n+1} x^{\frac{1}{11}} \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{1}^{n} x^{\frac{1}{11}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{\frac{1}{11}} \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n} x^{\frac{1}{11}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{\frac{1}{11}} \ln(k) \leqslant \int_{2}^{n+1} x^{\frac{1}{11}} \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;

— en intégrant $x \mapsto x^{\frac{1}{11}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{11}{12} x^{\frac{12}{11}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n} x^{\frac{1}{11}} \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{11}{12} x^{\frac{12}{11}} \ln(x)\right]_1^n - \int_{1}^{n} \frac{11}{12} x^{\frac{1}{11}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{11}{12} n^{\frac{12}{11}} \ln(n) - \left[\frac{121}{144} x^{\frac{12}{11}}\right]_1^n = \frac{11}{12} n^{\frac{12}{11}} \ln(n) - \frac{121}{144} n^{\frac{12}{11}} + \frac{121}{144}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)-\frac{121}{144}\,n^{\frac{12}{11}}+\frac{121}{144}\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{11}}\ln(k)\leqslant\frac{11}{12}\,(n+1)^{\frac{12}{11}}\ln(n+1)-\frac{121}{144}\,(n+1)^{\frac{12}{11}}-\frac{11}{6}\cdot 2^{\frac{1}{11}}\ln(2)+\frac{121}{72}\cdot 2^{\frac{1}{11}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1=\dfrac{121}{144}$ et $c_2=-\dfrac{11}{6}\cdot 2^{\frac{1}{11}}\ln(2)+\dfrac{121}{72}\cdot 2^{\frac{1}{11}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{11}}\ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{11}{12}\,(n+1)^{\frac{12}{11}}\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{11}}\ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)>0$:

$$-\frac{11}{12\,\ln(n)}+\frac{12\,c_1}{11\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)}+1\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{11}}\ln(k)}{\frac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)}\leqslant\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{12}{11}}+\frac{12\,c_2}{11\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}=\frac{\ln(n)}{\ln(n)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{11}}\ln(k)}{\frac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n)}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{11}}\ln(k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{11}{12}\,n^{\frac{12}{11}}\ln(n).$$

Corrigé 23. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. On a donc : ← page 3

$$\sum_{k=0}^{n}k^{\frac{3}{2}}=\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}k^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_0^n x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}$, donc finalement :

$$\int_0^n x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}\leqslant\int_1^{n+1}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Une primitive de $x\mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est $x\mapsto\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}\leqslant\sum_{k=0}^{n}k^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{2}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^{\frac{3}{2}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{2}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{2}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{3}{2}}$ est équivalent à $\dfrac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}} \leqslant \left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{5}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{3}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est continue sur [0,1], on a :

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{5}\,n^{\frac{5}{2}}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 24. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 3

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}} = \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}} = -20 \cdot \left(-\dfrac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{20\,x^{\frac{4}{5}}}\right)$ est, à la constante multiplicative -20 près, de la forme $u'e^{u}$ avec u l'application $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}}{x^{\frac{4}{5}}}$ est donc $x \mapsto -20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{5}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}} \leqslant 20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,(n-1)^{\frac{1}{5}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,(n-1)^{\frac{1}{5}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}$ est équivalent à $20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}}{20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)}} \leqslant e^{\left(-\frac{1}{4}\,(n-1)^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-\frac{1}{4}\,(n-1)^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}} = e^{-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{5}}-1\right)} = e^{-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\left(\left(1-\frac{1}{5\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{20\,n^{\frac{4}{5}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}}{20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 20\,e^{\left(-\frac{1}{4}\,n^{\frac{1}{5}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^{\alpha}u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\,k^{\frac{1}{5}}\right)}}{k^{\frac{4}{5}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 25. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 3

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\,x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\,\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}\,\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $\frac{1}{2}\,\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $x < 1$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est d'abord strictement décroissante sur $]0,1]$, puis strictement croissante sur $[1,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_{1}^{n+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_1^n \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + e \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\cdot\left(\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative 2 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto \sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto 2\,e^{\sqrt{x}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-e + 2\,e^{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \leqslant -2\,e + 2\,e^{\left(\sqrt{n+1}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -e$ et $c_2 = -2\,e$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $2\,e^{\sqrt{n}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $2\,e^{\left(\sqrt{n+1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $2\,e^{\sqrt{n}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $2\,e^{\sqrt{n}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\,e^{\sqrt{n}} > 0$:

$$\frac{1}{2}\,c_1 e^{\left(-\sqrt{n}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{1}{2}\,c_2 e^{\left(-\sqrt{n}\right)} + e^{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)} = e^{\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{2\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\sqrt{n}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,e^{\sqrt{n}}.$$

Corrigé 26. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. On a donc : ← page 3

$$\sum_{k=0}^n k^{\frac{1}{4}} = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} k^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_0^n x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{4}}$, donc finalement :

$$\int_0^n x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{4}} \leqslant \int_1^{n+1} x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Une primitive de $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ est $x \mapsto \frac{4}{5}\,x^{\frac{5}{4}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}} \leqslant \sum_{k=0}^n k^{\frac{1}{4}} \leqslant \frac{4}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{4}} - \frac{4}{5}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\frac{4}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{4}}$, qui est bien sûr équivalent à $\frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}}$ est équivalent à $\frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}}}{\frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}}} \leqslant \left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{5}{4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}}}{\frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ est continue sur [0,1], on a :

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{5}\,x^{\frac{5}{4}}\right]_0^1 = \frac{4}{5},$$

d'où : $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\,n^{\frac{5}{4}}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 27. L'application $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 3

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \ln(x) \times \left(-\frac{3}{2\,x^{\frac{5}{2}}}\right) = -\frac{3\,\ln(x) - 2}{2\,x^{\frac{5}{2}}}.$$

On observe que $-\frac{3}{2}\,\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{2}{3}$, si et seulement si $x < e^{\frac{2}{3}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^{\frac{2}{3}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_n^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}}$, donc finalement :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
- en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto -\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque les intégrales en jeu sont impropres (on intègre jusqu'à $+\infty$), il faut encore vérifier que le terme entre crochets de l'intégration par parties est bien défini. C'est bien le cas, puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2\,\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_n^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2\,\ln(x)}{\sqrt{x}}\right]_n^{+\infty} - \int_n^{+\infty} -\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}} - \left[\frac{4}{\sqrt{x}}\right]_n^{+\infty} = \frac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{2\,\ln(n-1)}{\sqrt{n-1}} + \frac{4}{\sqrt{n-1}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{2\,\ln(n-1)}{\sqrt{n-1}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}}$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}}$ est équivalent à $\dfrac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}} > 0$:

$$\frac{2}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}}}{\frac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}}{\sqrt{-\frac{1}{n}+1}}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}}}{\frac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{3}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,\ln(n)}{\sqrt{n}}.$$

Corrigé 28. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 4

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x = \int_1^n \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$, donc finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x + 1. \tag{1}$$

Une primitive de $x\mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$ est $x\mapsto \frac{5}{4}\,x^{\frac{4}{5}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{5}{4}\cdot 2^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{4}\,(n+1)^{\frac{4}{5}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} \leqslant \frac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{4}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{5}{4}\,(n+1)^{\frac{4}{5}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}}$ quand $n\to+\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$ est équivalent à $\dfrac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}}>0$:

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{4}{5}}-\frac{2^{\frac{4}{5}}}{n^{\frac{4}{5}}}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}}}\leqslant-\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}+1.$$

Il est clair que $1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{4}{5}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}}}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{5}{4}\,n^{\frac{4}{5}}.$$

Corrigé 29. L'application $f\,:\,x\mapsto\dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 4

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x\mapsto\dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}=\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}\mathrm{d}x=\int_{n-1}^{+\infty}\frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}\leqslant\int_{n-1}^{+\infty}\frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}\mathrm{d}x.\tag{1}$$

L'application $x\mapsto\dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}=-7\cdot\left(-\dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{7\,x^{\frac{6}{7}}}\right)$ est, à la constante multiplicative -7 près, de la forme $u'e^{u}$ avec u l'application $x\mapsto-x^{\frac{1}{7}}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}}{x^{\frac{6}{7}}}$ est donc $x\mapsto-7\,e^{\left(-x^{\frac{1}{7}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}\leqslant7\,e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{7}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $7\,e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{7}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}$ est équivalent à $7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}}{7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)}} \leqslant e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{7}}+n^{\frac{1}{7}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-(n-1)^{\frac{1}{7}}+n^{\frac{1}{7}}} = e^{-n^{\frac{1}{7}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{7}}-1\right)} = e^{-n^{\frac{1}{7}}\left(\left(1-\frac{1}{7\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{7\,n^{\frac{6}{7}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{6}{7}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}}{7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 7\,e^{\left(-n^{\frac{1}{7}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{7}}\right)}}{k^{\frac{6}{7}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 30. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 4

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, donc finalement :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\,\ln(2)}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -1$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\ln(\ln(3)) + \ln(\ln(n+1)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant -\ln(\ln(2)) + \ln(\ln(n)).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\ln(\ln(3))$ et $c_2 = -\ln(\ln(2))$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\ln(\ln(n))$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\ln(\ln(n+1))$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\ln(\ln(n)) > 0$:

$$\frac{c_1}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{c_2}{\ln(\ln(n))} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 31. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 4

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x + 1. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ est $x \mapsto 3\,x^{\frac{1}{3}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-3\cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3\,(n+1)^{\frac{1}{3}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant 3\,n^{\frac{1}{3}} - 3.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $3\,n^{\frac{1}{3}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $3\,(n+1)^{\frac{1}{3}}$, qui est bien sûr équivalent à $3\,n^{\frac{1}{3}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$ est équivalent à $3\,n^{\frac{1}{3}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $3\,n^{\frac{1}{3}} > 0$:

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}}{3\,n^{\frac{1}{3}}} \leqslant -\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} + 1.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}}{3\,n^{\frac{1}{3}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,n^{\frac{1}{3}}.$$

Corrigé 32. L'application $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 4

$$\forall x>0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \sqrt{x} + \ln(x) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}.$$

On observe que $\frac{1}{2}\ln(x)+1>0$ si et seulement si $\ln(x)>-2$, si et seulement si $x>e^{-2}$. On en déduit que $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{(-2)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{(-2)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{(-2)}, +\infty\right[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \sqrt{k}\ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n+1} \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{1}^{n} \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k}\ln(k)$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n} \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k}\ln(k) \leqslant \int_{2}^{n+1} \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;

— en intégrant $x \mapsto \sqrt{x}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n} \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x)\right]_{1}^{n} - \int_{1}^{n} \frac{2}{3}\sqrt{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n) - \left[\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{n} = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n) - \frac{4}{9}n^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n) - \frac{4}{9}n^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln(k) \leqslant \frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}\ln(n+1) - \frac{4}{9}(n+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) + \frac{8}{9}\sqrt{2}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{4}{9}$ et $c_2 = -\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) + \dfrac{8}{9}\sqrt{2}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n)$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n)>0$:

$$-\frac{2}{3\ln(n)} + \frac{3\,c_1}{2\,n^{\frac{3}{2}}\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln(k)}{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3\,c_2}{2\,n^{\frac{3}{2}}\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln(k)}{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\ln(n).$$

Corrigé 33. L'application $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^5}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 4

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \frac{5\ln(x)^4}{x}\times\frac{1}{x} + \ln(x)^5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{(\ln(x)-5)\ln(x)^4}{x^2}.$$

On observe que $-\ln(x)+5>0$ si et seulement si $\ln(x)<5$, si et seulement si $x<e^5$. On en déduit que $f : x\mapsto \frac{\ln(x)^5}{x}$ est strictement croissante sur $\left]0,e^5\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^5,+\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto\frac{\ln(x)^5}{x}$ est décroissante sur $\left[e^5,+\infty\right[$, donc sur $[n_0,+\infty[$, où l'on a posé : $n_0 = \lfloor e^5\rfloor + 1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\ln(k)^5}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)^5}{k}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)^5}{x}\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)^5}{x}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{n_0}^{n+1}\frac{\ln(x)^5}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)^5}{k}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n+1}\frac{\ln(x)^5}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)^5}{k} \leqslant \int_{n_0}^{n}\frac{\ln(x)^5}{x}\mathrm{d}x + \frac{\ln(n_0)^5}{n_0}. \tag{1}$$

L'application $x\mapsto\frac{\ln(x)^5}{x}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x\mapsto\ln(x)$ et $\alpha=5$, donc une primitive de $x\mapsto\frac{\ln(x)^5}{x}$ est $x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x)^6$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{6}\ln(n+1)^6 - \frac{1}{6}\ln(n_0)^6 \leqslant \sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)^5}{k} \leqslant \frac{1}{6}\ln(n)^6 - \frac{1}{6}\ln(n_0)^6 + \frac{\ln(n_0)^5}{n_0}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac{1}{6}\ln(n_0)^6$ et $c_2 = -\frac{1}{6}\ln(n_0)^6 + \frac{\ln(n_0)^5}{n_0}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)^5}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{1}{6}\ln(n)^6$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{1}{6}\ln(n+1)^6$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{1}{6}\ln(n)^6$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\ln(k)^5}{k}$ est équivalent à $\frac{1}{6}\ln(n)^6$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{6}\ \ln(n)^6 > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)^6}{\ln(n)^6} + \frac{6\,c_1}{\ln(n)^6} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^5}{k}}{\frac{1}{6}\ \ln(n)^6} \leqslant \frac{6\,c_2}{\ln(n)^6} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^5}{k}}{\frac{1}{6}\ \ln(n)^6} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)^5}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\ \ln(n)^6.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n_0-1} \frac{\ln(k)^5}{k}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{6}\ \ln(n)^6$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^5}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\ \ln(n)^6$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)^5}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 34. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 4

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{e^{(6\sqrt{x})}}{2\,x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{3\,e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\right) = \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{(6\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $3\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $x < \frac{1}{36}$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}$ est d'abord strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{36}\right]$, puis strictement croissante sur $\left[\frac{1}{36}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $\left[\dfrac{1}{36}, +\infty\right[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{(6\sqrt{k})}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{(6\sqrt{k})}}{\sqrt{k}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n \frac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{(6\sqrt{k})}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_1^n \frac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x + e^6 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{(6\sqrt{k})}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{3\,e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative $\dfrac{1}{3}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto 6\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{(6\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto \dfrac{1}{3}\, e^{(6\sqrt{x})}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{2}{3}\, e^6 + \frac{1}{3}\, e^{(6\sqrt{n})} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{(6\sqrt{k})}}{\sqrt{k}} \leqslant -\frac{1}{3}\, e^6 + \frac{1}{3}\, e^{(6\sqrt{n+1})}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{2}{3}\, e^6$ et $c_2 = -\dfrac{1}{3}\, e^6$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(6\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n+1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(6\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $\frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n}\right)} > 0$:

$$3\, c_1 e^{\left(-6\sqrt{n}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(6\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n}\right)}} \leqslant 3\, c_2 e^{\left(-6\sqrt{n}\right)} + e^{\left(6\sqrt{n+1}-6\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{6\sqrt{n+1}-6\sqrt{n}} = e^{6\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)} = e^{6\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{3}{\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(6\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(6\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\, e^{\left(6\sqrt{n}\right)}.$$

Corrigé 35. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 4

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{1}{n-1}$, qui est bien sûr équivalent à $\frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{1}{n}$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{1}{n} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{n}{n-1}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Corrigé 36. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 4

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^4}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, donc finalement :

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ est $x \mapsto -\frac{1}{3\,x^3}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{3\,n^3} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \leqslant \frac{1}{3\,(n-1)^3}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{3\,(n-1)^3}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{3\,n^3}$ quand $n \to +\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{3\,n^3}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$ est équivalent à $\dfrac{1}{3\,n^3}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{3\,n^3} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{3\,n^3}} \leqslant \frac{n^3}{(n-1)^3}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n^3}{(n-1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{3\,n^3}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3\,n^3}.$$

Corrigé 37. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{13}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. On a donc : ← page 4

$$\sum_{k=0}^{n} k^{13} = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} k^{13}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} x^{13}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} x^{13}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_0^n x^{13}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{13}$, donc finalement :

$$\int_0^n x^{13}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{13} \leqslant \int_1^{n+1} x^{13}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto x^{13}$ est $x \mapsto \frac{1}{14}\,x^{14}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{14}\,n^{14} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^{13} \leqslant \frac{1}{14}\,(n+1)^{14} - \frac{1}{14}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{13}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{1}{14}\,n^{14}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{14}\,(n+1)^{14}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{14}\,n^{14}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{13}$ est équivalent à $\dfrac{1}{14}\,n^{14}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{14}\,n^{14} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} k^{13}}{\frac{1}{14}\,n^{14}} \leqslant \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{14} - \frac{1}{n^{14}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{14} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} k^{13}}{\frac{1}{14}\,n^{14}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{13} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{14}\,n^{14}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{13}$ est continue sur [0,1], on a :

$$\frac{1}{n^{14}} \sum_{k=1}^{n} k^{13} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{13} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{13}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{14}\,x^{14}\right]_0^1 = \frac{1}{14},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{13} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{14}\,n^{14}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 38. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 5

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}} = -6 \cdot \left(-\dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{6\,x^{\frac{5}{6}}}\right)$ est, à la constante multiplicative -6 près, de la forme $u'e^u$ avec

u l'application $x \mapsto -x^{\frac{1}{6}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}}{x^{\frac{5}{6}}}$ est donc $x \mapsto -6\, e^{\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}} \leqslant 6\, e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{6}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $6\, e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{6}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}$ est équivalent à $6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}}{6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)}} \leqslant e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{6}}+n^{\frac{1}{6}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-(n-1)^{\frac{1}{6}}+n^{\frac{1}{6}}} = e^{-n^{\frac{1}{6}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{6}}-1\right)} = e^{-n^{\frac{1}{6}}\left(\left(1-\frac{1}{6n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{-1}{6n^{\frac{5}{6}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}}{6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 6\, e^{\left(-n^{\frac{1}{6}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{6}}\right)}}{k^{\frac{5}{6}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 39. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(35\, x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 5

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{3\, e^{\left(35\, x^{\frac{1}{4}}\right)}}{4\, x^{\frac{7}{4}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} \times \left(\frac{35\, e^{\left(35\, x^{\frac{1}{4}}\right)}}{4\, x^{\frac{3}{4}}} \right) = \left(\frac{35}{4}\, x^{\frac{1}{4}} - \frac{3}{4} \right) \frac{e^{\left(35\, x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{7}{4}}}.$$

On observe que $\frac{35}{4}\, x^{\frac{1}{4}} - \frac{3}{4} > 0$ si et seulement si $x < \frac{81}{1500625}$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\left(35\, x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est d'abord strictement décroissante sur $\left]0, \frac{81}{1500625}\right]$, puis strictement croissante sur $\left[\frac{81}{1500625}, +\infty\right[$.

On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est croissante sur $\left[\dfrac{81}{1500625}, +\infty\right[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} \mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^{n} \frac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$, donc finalement :

$$\int_1^{n} \frac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} \mathrm{d}x + e^{35} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} \mathrm{d}x. \qquad (1)$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{4}{35} \cdot \left(\dfrac{35\,e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{4\,x^{\frac{3}{4}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $\dfrac{4}{35}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto 35\,x^{\frac{1}{4}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est donc $x \mapsto \dfrac{4}{35}\,e^{\left(35\,x^{\frac{1}{4}}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{31}{35}\,e^{35} + \frac{4}{35}\,e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \leqslant -\frac{4}{35}\,e^{35} + \frac{4}{35}\,e^{\left(35\,(n+1)^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{31}{35}\,e^{35}$ et $c_2 = -\dfrac{4}{35}\,e^{35}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{4}{35}\,e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{4}{35}\,e^{\left(35\,(n+1)^{\frac{1}{4}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{4}{35}\,e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$ est équivalent à $\dfrac{4}{35}\,e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{4}{35}\,e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)} > 0$:

$$\frac{35}{4}\,c_1 e^{\left(-35\,n^{\frac{1}{4}}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}}{\frac{4}{35}\,e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)}} \leqslant \frac{35}{4}\,c_2 e^{\left(-35\,n^{\frac{1}{4}}\right)} + e^{\left(35\,(n+1)^{\frac{1}{4}} - 35\,n^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Or :

$$e^{35\,(n+1)^{\frac{1}{4}} - 35\,n^{\frac{1}{4}}} = e^{35\,n^{\frac{1}{4}}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right)} = e^{35\,n^{\frac{1}{4}}\left(\left(1 + \frac{1}{4\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)} = e^{\frac{35}{4\,n^{\frac{3}{4}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant

évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}}{\frac{4}{35}\, e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(35\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{35}\, e^{\left(35\,n^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Corrigé 40. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 5

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, donc finalement :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\,\ln(2)}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -1$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\ln(\ln(3)) + \ln(\ln(n+1)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant -\ln(\ln(2)) + \ln(\ln(n)).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\ln(\ln(3))$ et $c_2 = -\ln(\ln(2))$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\ln(\ln(n))$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\ln(\ln(n+1))$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\ln(\ln(n)) > 0$:

$$\frac{c_1}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{c_2}{\ln(\ln(n))} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 41. L'application $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 5

$$\forall x>0, \quad f'(x) = \frac{1}{x}\times\frac{1}{x^{\frac{38}{3}}} + \ln(x)\times\left(-\frac{38}{3\,x^{\frac{41}{3}}}\right) = -\frac{38\ln(x)-3}{3\,x^{\frac{41}{3}}}.$$

On observe que $-\frac{38}{3}\ln(x)+1>0$ si et seulement si $\ln(x)<\frac{3}{38}$, si et seulement si $x<e^{\frac{3}{38}}$. On en déduit que $f : x\mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}$ est strictement croissante sur $\left]0,e^{\frac{3}{38}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{3}{38}},+\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x\mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{3}{38}},+\infty\right[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}} = \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_n^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_n^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x\mapsto\frac{1}{x}$;
— en intégrant $x\mapsto\frac{1}{x^{\frac{38}{3}}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x\mapsto -\frac{3}{35\,x^{\frac{35}{3}}}$.
Puisque les intégrales en jeu sont impropres (on intègre jusqu'à $+\infty$), il faut encore vérifier que le terme entre crochets de l'intégration par parties est bien défini. C'est bien le cas, puisque : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{3\ln(x)}{35\,x^{\frac{35}{3}}}=0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_n^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{3\ln(x)}{35\,x^{\frac{35}{3}}}\right]_n^{+\infty} - \int_n^{+\infty} -\frac{3}{35\,x^{\frac{38}{3}}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}} - \left[\frac{9}{1225\,x^{\frac{35}{3}}}\right]_n^{+\infty} = \frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}} + \frac{9}{1225\,n^{\frac{35}{3}}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}} + \frac{9}{1225\,n^{\frac{35}{3}}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}} \leqslant \frac{3\ln(n-1)}{35\,(n-1)^{\frac{35}{3}}} + \frac{9}{1225\,(n-1)^{\frac{35}{3}}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{3\ln(n-1)}{35\,(n-1)^{\frac{35}{3}}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}}$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}}$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}}$ est équivalent à $\frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}}$

quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}} > 0$:

$$\frac{3}{35\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}}}{\frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}}} \leqslant \frac{\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}}{\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{35}{3}}}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}}}{\frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{38}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\ln(n)}{35\,n^{\frac{35}{3}}}.$$

Corrigé 42. L'application $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 5

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times x^{\frac{1}{3}} + \ln(x) \times \left(\frac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{\ln(x)+3}{3\,x^{\frac{2}{3}}}.$$

On observe que $\frac{1}{3}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) > -3$, si et seulement si $x > e^{-3}$. On en déduit que $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}\ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{(-3)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{(-3)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}\ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{(-3)}, +\infty\right[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{3}}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} k^{\frac{1}{3}}\ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} x^{\frac{1}{3}}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} x^{\frac{1}{3}}\ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n x^{\frac{1}{3}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{\frac{1}{3}}\ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n x^{\frac{1}{3}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{\frac{1}{3}}\ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} x^{\frac{1}{3}}\ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
- en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- en intégrant $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n x^{\frac{1}{3}}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}}\ln(n) - \left[\frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^n = \frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}}\ln(n) - \frac{9}{16}n^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}}\ln(n) - \frac{9}{16}n^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{16} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{3}}\ln(k) \leqslant \frac{3}{4}(n+1)^{\frac{4}{3}}\ln(n+1) - \frac{9}{16}(n+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\ln(2) + \frac{9}{8}\cdot 2^{\frac{1}{3}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{9}{16}$ et $c_2 = -\dfrac{3}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\ln(2) + \dfrac{9}{8}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{3}} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\frac{3}{4}(n+1)^{\frac{4}{3}} \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{3}} \ln(k)$ est équivalent à $\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \ln(n) > 0$:

$$-\frac{3}{4 \ln(n)} + \frac{4 c_1}{3 n^{\frac{4}{3}} \ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{3}} \ln(k)}{\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{4 c_2}{3 n^{\frac{4}{3}} \ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{3}} \ln(k)}{\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{3}} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \ln(n).$$

Corrigé 43. L'application $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 5

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}} \times \frac{1}{x} + \sqrt{\ln(x)} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2\ln(x) - 1}{2x^2\sqrt{\ln(x)}}.$$

On observe que $-\ln(x) + \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{1}{2}$, si et seulement si $x < e^{\frac{1}{2}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est strictement croissante sur $\left]1, e^{\frac{1}{2}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} dx \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx = \int_{2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{2}^{n+1} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$, donc finalement :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est $x \mapsto \frac{2}{3} \ln(x)^{\frac{3}{2}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\ln(n+1)^{\frac{3}{2}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} \leqslant -\frac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}}$ et $c_2 = -\frac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{2}{3}\ln(n+1)^{\frac{3}{2}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$ est équivalent à $\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}} > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3\,c_1}{2\,\ln(n)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}}{\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{3\,c_2}{2\,\ln(n)^{\frac{3}{2}}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}}{\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 44. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 5

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}} = -248 \cdot \left(-\frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{248\,x^{\frac{61}{62}}}\right)$ est, à la constante multiplicative -248 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}}{x^{\frac{61}{62}}}$ est donc $x \mapsto -248\,e^{\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{62}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}} \leqslant 248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, (n-1)^{\frac{1}{62}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, (n-1)^{\frac{1}{62}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}$ est équivalent à $248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}}{248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)}} \leqslant e^{\left(-\frac{1}{4}\, (n-1)^{\frac{1}{62}} + \frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-\frac{1}{4}\, (n-1)^{\frac{1}{62}} + \frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}} = e^{-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}} \left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{62}} - 1\right)} = e^{-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}} \left(\left(1 - \frac{1}{62\, n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)} = e^{\frac{1}{248\, n^{\frac{61}{62}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{61}{62}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}}{248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 248\, e^{\left(-\frac{1}{4}\, n^{\frac{1}{62}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\, k^{\frac{1}{62}}\right)}}{k^{\frac{61}{62}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 45. L'application $f : x \mapsto x^{\frac{1}{4}} \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 5

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times x^{\frac{1}{4}} + \ln(x) \times \left(\frac{1}{4\, x^{\frac{3}{4}}}\right) = \frac{\ln(x) + 4}{4\, x^{\frac{3}{4}}}.$$

On observe que $\frac{1}{4}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) > -4$, si et seulement si $x > e^{-4}$. On en déduit que $f : x \mapsto x^{\frac{1}{4}} \ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{(-4)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{(-4)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} \ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{(-4)}, +\infty\right[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{4}} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} k^{\frac{1}{4}} \ln(k)\, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} x^{\frac{1}{4}} \ln(x)\, \mathrm{d}x = \int_2^{n+1} x^{\frac{1}{4}} \ln(x)\, \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n x^{\frac14}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^n k^{\frac14}\ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n x^{\frac14}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^n k^{\frac14}\ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} x^{\frac14}\ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x\mapsto \frac1x$;
— en intégrant $x\mapsto x^{\frac14}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x\mapsto \frac45 x^{\frac54}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n x^{\frac14}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac45 x^{\frac54}\ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac45 x^{\frac14}\mathrm{d}x\\ &= \frac45 n^{\frac54}\ln(n) - \left[\frac{16}{25}x^{\frac54}\right]_1^n = \frac45 n^{\frac54}\ln(n) - \frac{16}{25}n^{\frac54} + \frac{16}{25}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac45 n^{\frac54}\ln(n) - \frac{16}{25}n^{\frac54} + \frac{16}{25} \leqslant \sum_{k=1}^n k^{\frac14}\ln(k) \leqslant \frac45 (n+1)^{\frac54}\ln(n+1) - \frac{16}{25}(n+1)^{\frac54} - \frac85\cdot 2^{\frac14}\ln(2) + \frac{32}{25}\cdot 2^{\frac14}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{16}{25}$ et $c_2 = -\dfrac85\cdot 2^{\frac14}\ln(2) + \dfrac{32}{25}\cdot 2^{\frac14}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^{\frac14}\ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac45 n^{\frac54}\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac45 (n+1)^{\frac54}\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac45 n^{\frac54}\ln(n)$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^{\frac14}\ln(k)$ est équivalent à $\dfrac45 n^{\frac54}\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac45 n^{\frac54}\ln(n) > 0$:

$$-\frac{4}{5\ln(n)} + \frac{5c_1}{4n^{\frac54}\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n k^{\frac14}\ln(k)}{\frac45 n^{\frac54}\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac1n + 1\right)^{\frac54} + \frac{5c_2}{4n^{\frac54}\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac1n\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac1n\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac1n\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{\frac14}\ln(k)}{\frac45 n^{\frac54}\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^n k^{\frac14}\ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac45 n^{\frac54}\ln(n).$$

Corrigé 46. L'application $f : x\mapsto x^2\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 5

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \frac1x \times x^2 + \ln(x)\times(2x) = x(2\ln(x)+1).$$

On observe que $2\ln(x)+1>0$ si et seulement si $\ln(x) > -\frac12$, si et seulement si $x > e^{-\frac12}$. On en déduit que $f : x\mapsto x^2\ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{\left(-\frac12\right)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{\left(-\frac12\right)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}, +\infty\right[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} k^2 \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^2 \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^2 \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto x^2$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{1}{3}\,x^3$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{3}\,x^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\,n^3 \ln(n) - \left[\frac{1}{9}\,x^3\right]_1^n = \frac{1}{3}\,n^3 \ln(n) - \frac{1}{9}\,n^3 + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{3}\,n^3 \ln(n) - \frac{1}{9}\,n^3 + \frac{1}{9} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k) \leqslant \frac{1}{3}\,(n+1)^3 \ln(n+1) - \frac{1}{9}\,(n+1)^3 - \frac{8}{3}\,\ln(2) + \frac{8}{9}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{1}{9}$ et $c_2 = -\dfrac{8}{3}\,\ln(2) + \dfrac{8}{9}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{3}\,(n+1)^3 \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n) > 0$:

$$-\frac{1}{3\,\ln(n)} + \frac{3\,c_1}{n^3 \ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)}{\frac{1}{3}\,n^3 \ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)^3 + \frac{3\,c_2}{n^3 \ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)}{\frac{1}{3}\,n^3 \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\,n^3 \ln(n)\,.$$

Corrigé 47. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non ← page 6

autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{n-1}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{n}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{n} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{n}{n-1}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Corrigé 48. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 6
Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} = -4 \cdot \left(-\dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{4\,x^{\frac{3}{4}}}\right)$ est, à la constante multiplicative -4 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -x^{\frac{1}{4}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est donc $x \mapsto -4\,e^{\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \leqslant 4\,e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $4\,e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$ est équivalent à $4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}}{4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)}} \leqslant e^{\left(-(n-1)^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-(n-1)^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}} = e^{-n^{\frac{1}{4}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)} = e^{-n^{\frac{1}{4}}\left(\left(1-\frac{1}{4\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{4\,n^{\frac{3}{4}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}}{4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\,e^{\left(-n^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 49. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 6

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{2\,e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{3\,x^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \times \left(\frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{3\,x^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(\frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\right)\frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{5}{3}}}.$$

On observe que $\frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} > 0$ si et seulement si $x < 8$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est d'abord strictement décroissante sur $]0{,}8]$, puis strictement croissante sur $[8, +\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est croissante sur $[8, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} = \sum_{k=8}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=8}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x = \int_{8}^{n+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{8}^{n} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=9}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_{8}^{n} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\,e^{2} \leqslant \sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant \int_{8}^{n+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} = 3 \cdot \left(\dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{3\,x^{\frac{2}{3}}}\right)$ est, à la constante multiplicative 3 près, de la forme $u'e^{u}$ avec u l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est donc $x \mapsto 3\,e^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{11}{4}\,e^{2} + 3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)} \leqslant \sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant -3\,e^{2} + 3\,e^{\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{11}{4}\,e^{2}$ et $c_2 = -3\,e^{2}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $3\,e^{\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est équivalent à $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)} > 0$:

$$\frac{1}{3}\,c_1 e^{\left(-n^{\frac{1}{3}}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}} \leqslant \frac{1}{3}\,c_2 e^{\left(-n^{\frac{1}{3}}\right)} + e^{\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Or :

$$e^{(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}} = e^{n^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)} = e^{n^{\frac{1}{3}}\left(\left(1 + \frac{1}{3\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)} = e^{\frac{1}{3\,n^{\frac{2}{3}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{0} = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant

évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=8}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Comme $\sum_{k=1}^{7} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est négligeable devant $3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,e^{\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}$, d'où le résultat.

Corrigé 50. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 6

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^4} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ est $x \mapsto -\frac{1}{3\,x^3}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{3\,n^3} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \leqslant \frac{1}{3\,(n-1)^3}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{1}{3\,(n-1)^3}$, qui est bien sûr équivalent à $\frac{1}{3\,n^3}$ quand $n \to +\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{1}{3\,n^3}$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$ est équivalent à $\frac{1}{3\,n^3}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{1}{3\,n^3} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{3\,n^3}} \leqslant \frac{n^3}{(n-1)^3}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n^3}{(n-1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{3\,n^3}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3\,n^3}.$$

Corrigé 51. L'application $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables ← page 6

(logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre :

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\,x\sqrt{\ln(x)}} \times \frac{1}{x} + \sqrt{\ln(x)} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2\,\ln(x) - 1}{2\,x^2\sqrt{\ln(x)}}.$$

On observe que $-\ln(x) + \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{1}{2}$, si et seulement si $x < e^{\frac{1}{2}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est strictement croissante sur $\left]1, e^{\frac{1}{2}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$, donc finalement :

$$\int_2^{n+1} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} \leqslant \int_2^{n} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ est $x \mapsto \frac{2}{3}\ln(x)^{\frac{3}{2}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\ln(n+1)^{\frac{3}{2}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} \leqslant -\frac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}}$ et $c_2 = -\dfrac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{2}{3}\ln(n+1)^{\frac{3}{2}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$ est équivalent à $\dfrac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}} > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3\,c_1}{2\,\ln(n)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}}{\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{3\,c_2}{2\,\ln(n)^{\frac{3}{2}}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}}{\frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\ln(k)}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\ln(n)^{\frac{3}{2}}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{\sqrt{\ln(k)}}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 52. L'application $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{15}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 6

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{15}} + \ln(x) \times \left(-\frac{15}{x^{16}}\right) = -\frac{15\ln(x) - 1}{x^{16}}.$$

On observe que $-15\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{1}{15}$, si et seulement si $x < e^{\frac{1}{15}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{15}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^{\frac{1}{15}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{15}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{15}}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{15}}, +\infty\right[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{15}} = \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(k)}{k^{15}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(x)}{x^{15}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{15}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{n}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{15}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{15}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{15}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{15}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{15}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{15}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto -\frac{1}{14\,x^{14}}$.
Puisque les intégrales en jeu sont impropres (on intègre jusqu'à $+\infty$), il faut encore vérifier que le terme entre crochets de l'intégration par parties est bien défini. C'est bien le cas, puisque : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{14\,x^{14}} = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{n}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{15}}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{14\,x^{14}}\right]_n^{+\infty} - \int_{n}^{+\infty} -\frac{1}{14\,x^{15}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(n)}{14\,n^{14}} - \left[\frac{1}{196\,x^{14}}\right]_n^{+\infty} = \frac{\ln(n)}{14\,n^{14}} + \frac{1}{196\,n^{14}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{\ln(n)}{14\,n^{14}} + \frac{1}{196\,n^{14}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{15}} \leqslant \frac{\ln(n-1)}{14\,(n-1)^{14}} + \frac{1}{196\,(n-1)^{14}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{15}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{\ln(n-1)}{14\,(n-1)^{14}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{\ln(n)}{14\,n^{14}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{\ln(n)}{14\,n^{14}}$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{15}}$ est équivalent à $\frac{\ln(n)}{14\,n^{14}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{\ln(n)}{14\,n^{14}} > 0$:

$$\frac{1}{14\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{15}}}{\frac{\ln(n)}{14\,n^{14}}} \leqslant \frac{\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}}{\left(\frac{1}{n} - 1\right)^{14}}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{15}}}{\frac{\ln(n)}{14\,n^{14}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{15}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{14\,n^{14}}.$$

Corrigé 53. L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 6

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, donc finalement :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\,\ln(2)}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -1$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\ln(\ln(3)) + \ln(\ln(n+1)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant -\ln(\ln(2)) + \ln(\ln(n)).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\ln(\ln(3))$ et $c_2 = -\ln(\ln(2))$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\ln(\ln(n))$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\ln(\ln(n+1))$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\ln(\ln(n)) > 0$:

$$\frac{c_1}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{c_2}{\ln(\ln(n))} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 54. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 6

$$\forall x>0,\quad f'(x) = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\,x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $x < 1$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est d'abord strictement décroissante sur $]0,1]$, puis strictement croissante sur $[1,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_1^n \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_1^n \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + e \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\cdot\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative 2 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto \sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto 2\,e^{\sqrt{x}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-e + 2\,e^{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \leqslant -2\,e + 2\,e^{\left(\sqrt{n+1}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -e$ et $c_2 = -2\,e$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $2\,e^{\sqrt{n}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $2\,e^{\left(\sqrt{n+1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $2\,e^{\sqrt{n}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $2\,e^{\sqrt{n}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\,e^{\sqrt{n}} > 0$:

$$\frac{1}{2}\,c_1 e^{\left(-\sqrt{n}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{1}{2}\,c_2 e^{\left(-\sqrt{n}\right)} + e^{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)} = e^{\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{2\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\sqrt{n}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,e^{\sqrt{n}}.$$

Corrigé 55. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. On a donc : ← page 6

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} \sqrt{k}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_{1}^{n+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_0^n \sqrt{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, donc finalement :

$$\int_0^n \sqrt{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \leqslant \frac{2}{3}\,(n+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{2}{3}\,(n+1)^{\frac{3}{2}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$ est équivalent à $\dfrac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{k}}{\frac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}} \leqslant \left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{3}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{k}}{\frac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 56. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{6}{29}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. ← page 6

On a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{\frac{6}{29}}} \mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{6}{29}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{6}{29}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}}$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{6}{29}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{6}{29}}} \mathrm{d}x + 1. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{6}{29}}}$ est $x \mapsto \frac{29}{23} x^{\frac{23}{29}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{29}{23} \cdot 2^{\frac{23}{29}} + \frac{29}{23} (n+1)^{\frac{23}{29}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}} \leqslant \frac{29}{23} n^{\frac{23}{29}} - \frac{29}{23}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{29}{23} n^{\frac{23}{29}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{29}{23} (n+1)^{\frac{23}{29}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{29}{23} n^{\frac{23}{29}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}}$ est équivalent à $\dfrac{29}{23} n^{\frac{23}{29}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{29}{23} n^{\frac{23}{29}} > 0$:

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{23}{29}} - \frac{2^{\frac{23}{29}}}{n^{\frac{23}{29}}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}}}{\frac{29}{23} n^{\frac{23}{29}}} \leqslant -\frac{1}{n^{\frac{23}{29}}} + 1.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{23}{29}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}}}{\frac{29}{23} n^{\frac{23}{29}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{6}{29}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{29}{23} n^{\frac{23}{29}}.$$

Corrigé 57. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 7

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}} \mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}}$, donc finalement :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2 \ln(2)^{\frac{1}{5}}}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}}$ est de la forme $u' u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -\frac{1}{5}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(x)^{\frac{1}{5}}}$ est $x \mapsto \frac{5}{4} \ln(x)^{\frac{4}{5}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{5}{4} \ln(3)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{4} \ln(n+1)^{\frac{4}{5}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}} \leqslant -\frac{5}{4} \ln(2)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac{5}{4} \ln(3)^{\frac{4}{5}}$ et $c_2 = -\frac{5}{4} \ln(2)^{\frac{4}{5}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{5}{4} \ln(n+1)^{\frac{4}{5}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}}$ est équivalent à $\frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}} > 0$:

$$\frac{4\,c_1}{5 \ln(n)^{\frac{4}{5}}} + \frac{\ln(n+1)^{\frac{4}{5}}}{\ln(n)^{\frac{4}{5}}} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}}} \leqslant \frac{4\,c_2}{5 \ln(n)^{\frac{4}{5}}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{4} \ln(n)^{\frac{4}{5}}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{1}{5}}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 58. L'application $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 7

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{89}}} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{89\,x^{\frac{90}{89}}}\right) = -\frac{\ln(x) - 89}{89\,x^{\frac{90}{89}}}.$$

On observe que $-\frac{1}{89} \ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 89$, si et seulement si $x < e^{89}$. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^{89}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{89}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}}$ est décroissante sur $\left[e^{89}, +\infty\right[$, donc sur $[n_0, +\infty[$, où l'on a posé : $n_0 = \lfloor e^{89} \rfloor + 1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}} \mathrm{d}x = \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}} \leqslant \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}} \mathrm{d}x + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{89}}}. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{89}}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{89}{88}\, x^{\frac{88}{89}}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{89}}}\mathrm{d}x &= \left[\frac{89}{88}\, x^{\frac{88}{89}} \ln(x)\right]_{n_0}^{n} - \int_{n_0}^{n} \frac{89}{88\, x^{\frac{1}{89}}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n) - \frac{89}{88}\, n_0^{\frac{88}{89}} \ln(n_0) - \left[\frac{7921}{7744}\, x^{\frac{88}{89}}\right]_{n_0}^{n} = \frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n) - \frac{89}{88}\, n_0^{\frac{88}{89}} \ln(n_0) - \frac{7921}{7744}\, n^{\frac{88}{89}} + \frac{7921}{7744}\, n_0^{\frac{88}{89}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{89}{88}(n+1)^{\frac{88}{89}} \ln(n+1) - \frac{89}{88}\, n_0^{\frac{88}{89}} \ln(n_0) - \frac{7921}{7744}(n+1)^{\frac{88}{89}} + \frac{7921}{7744}\, n_0^{\frac{88}{89}} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}} \leqslant \frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n) - \frac{89}{88}\, n_0^{\frac{88}{89}} \ln(n_0) - \frac{7921}{7744}\, n^{\frac{88}{89}} + \frac{7921}{7744}\, n_0^{\frac{88}{89}}$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac{89}{88}\, n_0^{\frac{88}{89}} \ln(n_0) + \frac{7921}{7744}\, n_0^{\frac{88}{89}}$ et $c_2 = -\frac{89}{88}\, n_0^{\frac{88}{89}} \ln(n_0) + \frac{7921}{7744}\, n_0^{\frac{88}{89}} + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{89}}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{89}{88}(n+1)^{\frac{88}{89}} \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}$ est équivalent à $\frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n) > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{88}{89}} + \frac{88\, c_1}{89\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}}{\frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)} \leqslant \frac{88\, c_2}{89\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)} - \frac{89}{88\, \ln(n)} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}}{\frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n).$$

Comme $\sum_{k=2}^{n_0-1} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}$ est négligeable devant $\frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{89}{88}\, n^{\frac{88}{89}} \ln(n)$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{89}}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 59. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 7

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}}$, donc finalement :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}} \leqslant \int_2^{n} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\ln(2)^{\frac14}}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -\frac14$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac14}}$ est $x \mapsto \frac43 \ln(x)^{\frac34}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac43 \ln(3)^{\frac34} + \frac43 \ln(n+1)^{\frac34} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}} \leqslant -\frac43 \ln(2)^{\frac34} + \frac43 \ln(n)^{\frac34}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac43 \ln(3)^{\frac34}$ et $c_2 = -\dfrac43 \ln(2)^{\frac34}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac43 \ln(n)^{\frac34}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac43 \ln(n+1)^{\frac34}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac43 \ln(n)^{\frac34}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}}$ est équivalent à $\dfrac43 \ln(n)^{\frac34}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac43 \ln(n)^{\frac34} > 0$:

$$\frac{3\,c_1}{4\ln(n)^{\frac34}} + \frac{\ln(n+1)^{\frac34}}{\ln(n)^{\frac34}} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}}}{\frac43 \ln(n)^{\frac34}} \leqslant \frac{3\,c_2}{4\ln(n)^{\frac34}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac1n\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac1n\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac1n\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}}}{\frac43 \ln(n)^{\frac34}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac43 \ln(n)^{\frac34}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac14}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 60. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 7

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{2\,e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{5\,x^{\frac{7}{5}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} \times \left(\frac{3\,e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{10\,x^{\frac{2}{5}}}\right) = \left(\frac{3}{10}\,x^{\frac{3}{5}} - \frac{2}{5}\right)\frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{7}{5}}}.$$

On observe que $\frac{3}{10}\,x^{\frac{3}{5}} - \frac{2}{5} > 0$ si et seulement si $x < \frac{4}{3}\,\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}}$ est d'abord strictement décroissante sur $\left]0, \frac{4}{3}\,\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$, puis strictement croissante sur $\left[\frac{4}{3}\,\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}}$ est croissante sur $\left[\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}} = \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}} \mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_2^n \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}}$, donc finalement :

$$\int_2^n \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{3}{5}} e^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\right)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{3\,e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{10\,x^{\frac{2}{5}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $\frac{10}{3}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto \frac{1}{2}\,x^{\frac{3}{5}}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}}{x^{\frac{2}{5}}}$ est donc $x \mapsto \frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{3}{5}} e^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\right)} - \frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\right)} + \frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}} \leqslant -\frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\right)} + \frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\,(n+1)^{\frac{3}{5}}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{3}{5}} e^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\right)} - \frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\right)}$ et $c_2 = -\frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\right)}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\,(n+1)^{\frac{3}{5}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{10}{3}\,e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}$

quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\,k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}}$ est équivalent à $\dfrac{10}{3}\, e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{10}{3}\, e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)} > 0$:

$$\frac{3}{10}\, c_1 e^{\left(-\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\,k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}}}{\frac{10}{3}\, e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}} \leqslant \frac{3}{10}\, c_2 e^{\left(-\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)} + e^{\left(\frac{1}{2}\,(n+1)^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}.$$

Or :

$$e^{\frac{1}{2}\,(n+1)^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}} = e^{\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{3}{5}} - 1\right)} = e^{\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\left(\left(1 + \frac{3}{5\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)} = e^{\frac{3}{10\,n^{\frac{2}{5}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\,k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}}}{\frac{10}{3}\, e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\,k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{10}{3}\, e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\,k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}}$ est négligeable devant $\dfrac{10}{3}\, e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\,k^{\frac{3}{5}}\right)}}{k^{\frac{2}{5}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{10}{3}\, e^{\left(\frac{1}{2}\,n^{\frac{3}{5}}\right)}$, d'où le résultat.

Corrigé 61. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. On a donc : ← page 7

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}} = \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} k^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{n+1} x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{0}^{n} x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{4}}$, donc finalement :

$$\int_{0}^{n} x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{4}} \leqslant \int_{1}^{n+1} x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ est $x \mapsto \frac{4}{5}\, x^{\frac{5}{4}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{4}{5}\, n^{\frac{5}{4}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}} \leqslant \frac{4}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{4}} - \frac{4}{5}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{4}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{4}{5}\, n^{\frac{5}{4}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{4}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{4}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{4}{5}\, n^{\frac{5}{4}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\frac14}$ est équivalent à $\dfrac45 n^{\frac54}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac45 n^{\frac54} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} k^{\frac14}}{\frac45 n^{\frac54}} \leqslant \left(\frac1n + 1\right)^{\frac54} - \frac{1}{n^{\frac54}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac1n + 1\right)^{\frac54} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} k^{\frac14}}{\frac45 n^{\frac54}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac14} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac45 n^{\frac54}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{\frac14}$ est continue sur [0,1], on a :

$$\frac{1}{n^{\frac54}} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac14} = \frac1n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac kn\right)^{\frac14} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{\frac14}\mathrm{d}x = \left[\frac45 x^{\frac54}\right]_0^1 = \frac45,$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac14} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac45 n^{\frac54}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 62. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 7

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac1x \times \frac{1}{x^{\frac{22}{21}}} + \ln(x) \times \left(-\frac{22}{21\, x^{\frac{43}{21}}}\right) = -\frac{22\,\ln(x) - 21}{21\, x^{\frac{43}{21}}}.$$

On observe que $-\frac{22}{21}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{21}{22}$, si et seulement si $x < e^{\frac{21}{22}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^{\frac{21}{22}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{21}{22}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{21}{22}}, +\infty\right[$, donc sur $[3, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}$, donc finalement :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
- en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac1x$;
- en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{22}{21}}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto -\frac{21}{x^{\frac{1}{21}}}$.

Puisque les intégrales en jeu sont impropres (on intègre jusqu'à $+\infty$), il faut encore vérifier que le terme entre crochets de l'intégration par parties est bien défini. C'est bien le cas, puisque : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{21\,\ln(x)}{x^{\frac{1}{21}}} = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_n^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{21\,\ln(x)}{x^{\frac{1}{21}}}\right]_n^{+\infty} - \int_n^{+\infty} -\frac{21}{x^{\frac{22}{21}}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}} - \left[\frac{441}{x^{\frac{1}{21}}}\right]_n^{+\infty} = \frac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}} + \frac{441}{n^{\frac{1}{21}}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}+\frac{441}{n^{\frac{1}{21}}}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}\leqslant\frac{21\,\ln(n-1)}{(n-1)^{\frac{1}{21}}}+\frac{441}{(n-1)^{\frac{1}{21}}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{21\,\ln(n-1)}{(n-1)^{\frac{1}{21}}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}$ est équivalent à $\dfrac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}>0$:

$$\frac{21}{\ln(n)}+1\leqslant\frac{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}}{\frac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}}\leqslant\frac{\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n)}}{\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{21}}}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)}=\frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}=\frac{\ln(n)}{\ln(n)}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}}{\frac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k^{\frac{22}{21}}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{21\,\ln(n)}{n^{\frac{1}{21}}}.$$

Corrigé 63. L'application $f:x\mapsto\frac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 7

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x\mapsto\dfrac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}=\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{n-1}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\leqslant\int_{n-1}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.\tag{1}$$

L'application $x\mapsto\dfrac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{2\,e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative $-\dfrac{1}{2}$ près, de la forme $u'e^{u}$ avec u l'application $x\mapsto-4\sqrt{x}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est donc $x\mapsto-\dfrac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{x}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\leqslant\frac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n-1}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n-1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $\dfrac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}>0$:

$$1\leqslant\frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}}\leqslant e^{\left(-4\sqrt{n-1}+4\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{-4\sqrt{n-1}+4\sqrt{n}}=e^{-4\sqrt{n}\left(\sqrt{-\frac{1}{n}+1}-1\right)}=e^{-4\sqrt{n}\left(\left(1-\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)}=e^{\frac{2}{\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{0}=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\,e^{\left(-4\sqrt{n}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^{\alpha}u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-4\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k\to+\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 64. L'application $f:x\mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 7

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\frac{1}{x}\times x+\ln(x)\times(1)=\ln(x)+1.$$

On observe que $\ln(x)+1>0$ si et seulement si $\ln(x)>-1$, si et seulement si $x>e^{-1}$. On en déduit que $f:x\mapsto x\ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0,e^{(-1)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{(-1)},+\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto x\ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{(-1)},+\infty\right[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}k\ln(k)=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}k\ln(k)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}x\ln(x)\,\mathrm{d}x=\int_{2}^{n+1}x\ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{1}^{n}x\ln(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=2}^{n}k\ln(k)$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n}x\ln(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=2}^{n}k\ln(k)\leqslant\int_{2}^{n+1}x\ln(x)\,\mathrm{d}x.\tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x\mapsto\frac{1}{x}$;
— en intégrant $x\mapsto x$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x\mapsto\frac{1}{2}\,x^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\,x^2\ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{2}\,x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\,n^2\ln(n) - \left[\frac{1}{4}\,x^2\right]_1^n = \frac{1}{2}\,n^2\ln(n) - \frac{1}{4}\,n^2 + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{2}\,n^2\ln(n) - \frac{1}{4}\,n^2 + \frac{1}{4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \leqslant \frac{1}{2}\,(n+1)^2\ln(n+1) - \frac{1}{4}\,(n+1)^2 - 2\,\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{1}{4}$ et $c_2 = -2\,\ln(2) + 1$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{1}{2}\,n^2\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{2}\,(n+1)^2\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{2}\,n^2\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{1}{2}\,n^2\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{2}\,n^2\ln(n) > 0$:

$$-\frac{1}{2\,\ln(n)} + \frac{2\,c_1}{n^2\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln(k)}{\frac{1}{2}\,n^2\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^2 + \frac{2\,c_2}{n^2\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln(k)}{\frac{1}{2}\,n^2\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,n^2\ln(n)\,.$$

Corrigé 65. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 7

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{4\,x^{\frac{5}{4}}}\right) = -\frac{\ln(x) - 4}{4\,x^{\frac{5}{4}}}.$$

On observe que $-\frac{1}{4}\,\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 4$, si et seulement si $x < e^4$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^4\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^4, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}$ est décroissante sur $\left[e^4, +\infty\right[$, donc sur $[n_0, +\infty[$, où l'on a posé : $n_0 = \lfloor e^4 \rfloor + 1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{4}}} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac14}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac14}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}} \leqslant \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac14}}\mathrm{d}x + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac14}}. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac14}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac43 x^{\frac34}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac14}}\mathrm{d}x &= \left[\frac43 x^{\frac34}\ln(x)\right]_{n_0}^{n} - \int_{n_0}^{n} \frac{4}{3\,x^{\frac14}}\mathrm{d}x \\ &= \frac43 n^{\frac34}\ln(n) - \frac43 n_0^{\frac34}\ln(n_0) - \left[\frac{16}{9} x^{\frac34}\right]_{n_0}^{n} = \frac43 n^{\frac34}\ln(n) - \frac43 n_0^{\frac34}\ln(n_0) - \frac{16}{9} n^{\frac34} + \frac{16}{9} n_0^{\frac34}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac43 (n+1)^{\frac34}\ln(n+1) - \frac43 n_0^{\frac34}\ln(n_0) - \frac{16}{9}(n+1)^{\frac34} + \frac{16}{9} n_0^{\frac34} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}} \leqslant \frac43 n^{\frac34}\ln(n) - \frac43 n_0^{\frac34}\ln(n_0) - \frac{16}{9} n^{\frac34} + \frac{16}{9} n_0^{\frac34} + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac14}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac43 n_0^{\frac34}\ln(n_0) + \frac{16}{9} n_0^{\frac34}$ et $c_2 = -\frac43 n_0^{\frac34}\ln(n_0) + \frac{16}{9} n_0^{\frac34} + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac14}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac43 n^{\frac34}\ln(n)$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac43 (n+1)^{\frac34}\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac43 n^{\frac34}\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}}$ est équivalent à $\frac43 n^{\frac34}\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac43 n^{\frac34}\ln(n) > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac1n + 1\right)^{\frac34} + \frac{3\,c_1}{4\,n^{\frac34}\ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}}}{\frac43 n^{\frac34}\ln(n)} \leqslant \frac{3\,c_2}{4\,n^{\frac34}\ln(n)} - \frac{4}{3\ln(n)} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac1n\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac1n\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac1n\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}}}{\frac43 n^{\frac34}\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac43 n^{\frac34}\ln(n).$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n_0-1} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}}$ est négligeable devant $\frac43 n^{\frac34}\ln(n)$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac14}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac43 n^{\frac34}\ln(n)$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{4}}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 66. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 7

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} = -2 \cdot \left(-\dfrac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{2\sqrt{x}} \right)$ est, à la constante multiplicative -2 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto -2\,e^{\left(-\sqrt{x}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant 2\,e^{\left(-\sqrt{n-1}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $2\,e^{\left(-\sqrt{n-1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)}} \leqslant e^{\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n}\left(\sqrt{-\frac{1}{n}+1}-1\right)} = e^{-\sqrt{n}\left(\left(1-\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{2\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,e^{\left(-\sqrt{n}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 67. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 8

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln(x)\times\left(-\frac{1}{2\,x^{\frac{3}{2}}}\right)=-\frac{\ln(x)-2}{2\,x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $-\frac{1}{2}\ln(x)+1>0$ si et seulement si $\ln(x)<2$, si et seulement si $x<e^2$. On en déduit que $f : x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est strictement croissante sur $\left]0,e^2\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^2,+\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\left[e^2,+\infty\right[$, donc sur $[8,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=9}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}=\sum_{k=9}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=9}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{8}^{n}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_8^{n+1}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_8^{n+1}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}\leqslant\int_8^{n}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\frac{3}{4}\sqrt{2}\ln(2).\tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x\mapsto\frac{1}{x}$;

— en intégrant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x\mapsto 2\sqrt{x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_8^{n}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_8^n-\int_8^n\frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=-12\sqrt{2}\ln(2)+2\sqrt{n}\ln(n)-\left[4\sqrt{x}\right]_8^n=-12\sqrt{2}\ln(2)+2\sqrt{n}\ln(n)+8\sqrt{2}-4\sqrt{n}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-12\sqrt{2}\ln(2)+2\sqrt{n+1}\ln(n+1)+8\sqrt{2}-4\sqrt{n+1}\leqslant\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}\leqslant-\frac{45}{4}\sqrt{2}\ln(2)+2\sqrt{n}\ln(n)+8\sqrt{2}-4\sqrt{n}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1=-12\sqrt{2}\ln(2)+8\sqrt{2}$ et $c_2=-\dfrac{45}{4}\sqrt{2}\ln(2)+8\sqrt{2}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $2\sqrt{n}\ln(n)$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $2\sqrt{n+1}\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $2\sqrt{n}\ln(n)$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $2\sqrt{n}\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\sqrt{n}\ln(n)>0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n)}\right)\sqrt{\frac{1}{n}+1}+\frac{c_1}{2\sqrt{n}\ln(n)}\leqslant\frac{\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}\ln(n)}\leqslant\frac{c_2}{2\sqrt{n}\ln(n)}-\frac{2}{\ln(n)}+1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}=\frac{\ln(n)}{\ln(n)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}\ln(n)}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=8}^{n}\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}\ln(n).$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{7} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$ est négligeable devant $2\sqrt{n}\ln(n)$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\ln(n)$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 68. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{6}}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. On a donc : ← page 8

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{6}} = \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} k^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} x^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{n+1} x^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{0}^{n} x^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{6}}$, donc finalement :

$$\int_{0}^{n} x^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{6}} \leqslant \int_{1}^{n+1} x^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto x^{\frac{1}{6}}$ est $x \mapsto \frac{6}{7}\,x^{\frac{7}{6}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{6}} \leqslant \frac{6}{7}\,(n+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{7}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{6}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{6}{7}\,(n+1)^{\frac{7}{6}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{6}}$ est équivalent à $\dfrac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{6}}}{\frac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}}} \leqslant \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{7}{6}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{6}}}{\frac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\frac{1}{6}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{\frac{1}{6}}$ est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{6}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{0}^{1} x^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{7}\,x^{\frac{7}{6}}\right]_{0}^{1} = \frac{6}{7},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{6}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6}{7}\,n^{\frac{7}{6}}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 69. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 8

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}$, donc finalement :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{\ln(2)}}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{\ln(x)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-2\sqrt{\ln(3)} + 2\sqrt{\ln(n+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}} \leqslant -2\sqrt{\ln(2)} + 2\sqrt{\ln(n)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -2\sqrt{\ln(3)}$ et $c_2 = -2\sqrt{\ln(2)}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $2\sqrt{\ln(n)}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $2\sqrt{\ln(n+1)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $2\sqrt{\ln(n)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}$ est équivalent à $2\sqrt{\ln(n)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\sqrt{\ln(n)} > 0$:

$$\frac{c_1}{2\sqrt{\ln(n)}} + \frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{\sqrt{\ln(n)}} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}}{2\sqrt{\ln(n)}} \leqslant \frac{c_2}{2\sqrt{\ln(n)}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}}{2\sqrt{\ln(n)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\ln(n)}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^{\alpha}u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 70. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^{51}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 8

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^{51}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{51}} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^{51}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^{51}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^{51}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^{51}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{51}}$ est $x \mapsto -\frac{1}{50\,x^{50}}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{50\,n^{50}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}} \leqslant \frac{1}{50\,(n-1)^{50}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{50\,(n-1)^{50}}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{50\,n^{50}}$ quand $n \to +\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{50\,n^{50}}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}}$ est équivalent à $\dfrac{1}{50\,n^{50}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{50\,n^{50}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}}}{\frac{1}{50\,n^{50}}} \leqslant \frac{n^{50}}{(n-1)^{50}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n^{50}}{(n-1)^{50}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{50}}{n^{50}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}}}{\frac{1}{50\,n^{50}}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{51}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{50\,n^{50}}.$$

Corrigé 71. Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc : ← page 8

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{1}{n-1}$, qui est bien sûr équivalent à $\frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{1}{n}$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{1}{n} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{n}{n-1}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}} = 1$.
En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Corrigé 72. L'application $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 8

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{2}{3\,x\ln(x)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{x} + \ln(x)^{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3\ln(x) - 2}{3\,x^2\ln(x)^{\frac{1}{3}}}.$$

On observe que $-\ln(x) + \frac{2}{3} > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{2}{3}$, si et seulement si $x < e^{\frac{2}{3}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est strictement croissante sur $\left]1, e^{\frac{2}{3}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x} \mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{2}^{n+1} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$, donc finalement :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = \frac{2}{3}$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est $x \mapsto \frac{3}{5}\ln(x)^{\frac{5}{3}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{5}\ln(n+1)^{\frac{5}{3}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} \leqslant -\frac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}}$ et $c_2 = -\frac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{3}{5}\ln(n+1)^{\frac{5}{3}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$ est équivalent à $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}} > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{\frac{5}{3}} + \frac{5\,c_1}{3\,\ln(n)^{\frac{5}{3}}} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}}{\frac{3}{5}\,\ln(n)^{\frac{5}{3}}} \leqslant \frac{5\,c_2}{3\,\ln(n)^{\frac{5}{3}}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}}{\frac{3}{5}\,\ln(n)^{\frac{5}{3}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 73. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 8

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} = -\dfrac{3}{16}\cdot\left(-\dfrac{16\,e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{3\,x^{\frac{2}{3}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $-\dfrac{3}{16}$ près, de la forme $u'e^{u}$ avec u l'application $x \mapsto -16\,x^{\frac{1}{3}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{3}{16}\,e^{\left(-16\,x^{\frac{1}{3}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{3}{16}\,e^{\left(-16\,(n-1)^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{3}{16}\,e^{\left(-16\,(n-1)^{\frac{1}{3}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est équivalent à $\dfrac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{\frac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)}} \leqslant e^{\left(-16\,(n-1)^{\frac{1}{3}}+16\,n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-16\,(n-1)^{\frac{1}{3}}+16\,n^{\frac{1}{3}}} = e^{-16\,n^{\frac{1}{3}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)} = e^{-16\,n^{\frac{1}{3}}\left(\left(1-\frac{1}{3\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{16}{3\,n^{\frac{2}{3}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{\frac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{16}\,e^{\left(-16\,n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-16\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 74. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 8

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\ln(x)-1}{x^2}.$$

On observe que $-\ln(x)+1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 1$, si et seulement si $x < e^1$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est strictement croissante sur $]0,e]$, et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. On peut donc bel et

bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$, donc sur $[3, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{3}^{n} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{3}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, donc finalement :

$$\int_{3}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{3}^{n} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x + \frac{1}{3} \ln(3). \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = 1$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x)^2$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{1}{2} \ln(3)^2 + \frac{1}{2} \ln(n+1)^2 \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant -\frac{1}{2} \ln(3)^2 + \frac{1}{2} \ln(n)^2 + \frac{1}{3} \ln(3).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{1}{2} \ln(3)^2$ et $c_2 = -\dfrac{1}{2} \ln(3)^2 + \dfrac{1}{3} \ln(3)$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{2} \ln(n)^2$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{2} \ln(n+1)^2$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{2} \ln(n)^2$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ est équivalent à $\dfrac{1}{2} \ln(n)^2$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{2} \ln(n)^2 > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} + \frac{2\,c_1}{\ln(n)^2} \leqslant \frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}}{\frac{1}{2} \ln(n)^2} \leqslant \frac{2\,c_2}{\ln(n)^2} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}}{\frac{1}{2} \ln(n)^2} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)^2.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{\ln(k)}{k}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{2} \ln(n)^2$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)^2$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 75. L'application $f : x \mapsto \ln(x)$ est clairement croissante sur $]0, +\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 8
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto 1$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto x$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^n - \int_1^n 1\mathrm{d}x \\ &= n\ln(n) - [x]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = -2\ln(2) + 2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $n\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $(n+1)\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $n\ln(n) > 0$:

$$\frac{c_1}{n\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{c_2}{n\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Corrigé 76. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{31}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. On a donc : ← page 8

$$\sum_{k=0}^{n} k^{31} = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} k^{31}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} x^{31}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} x^{31}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_0^n x^{31}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{31}$, donc finalement :

$$\int_0^n x^{31}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{31} \leqslant \int_1^{n+1} x^{31}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto x^{31}$ est $x \mapsto \frac{1}{32}\, x^{32}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{32}\, n^{32} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^{31} \leqslant \frac{1}{32}\,(n+1)^{32} - \frac{1}{32}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{31}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{1}{32}\, n^{32}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{32}\,(n+1)^{32}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{32}\, n^{32}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{31}$ est équivalent à $\dfrac{1}{32}\, n^{32}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{32}\, n^{32} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{31}}{\frac{1}{32}\, n^{32}} \leqslant \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{32} - \frac{1}{n^{32}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{32} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{31}}{\frac{1}{32}\, n^{32}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{31} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{32}\, n^{32}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{31}$ est continue sur $[0{,}1]$, on a :

$$\frac{1}{n^{32}} \sum_{k=1}^{n} k^{31} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{31} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{31}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{32}\, x^{32}\right]_0^1 = \frac{1}{32},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{31} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{32}\, n^{32}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 77. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 9

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{2\, x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{3\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right) \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $\frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $x < \frac{9}{4}$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est d'abord strictement décroissante sur $\left]0, \frac{9}{4}\right]$, puis strictement croissante sur $\left[\frac{9}{4}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $\left[\dfrac{9}{4}, +\infty\right[$, donc sur $[3, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_3^{n+1} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_3^n \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_3^n \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\sqrt{3}e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} = 3 \cdot \left(\dfrac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{3\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative 3 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto 3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)} - 3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)} + 3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant -3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)} + 3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n+1}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)} - 3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$ et $c_2 = -3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n+1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)} > 0$:

$$\frac{1}{3}c_1 e^{\left(-\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}} \leqslant \frac{1}{3}c_2 e^{\left(-\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)} + e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n+1}-\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{\frac{2}{3}\sqrt{n+1}-\frac{2}{3}\sqrt{n}} = e^{\frac{2}{3}\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)} = e^{\frac{2}{3}\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{3\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est négligeable devant $3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\,e^{\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}\right)}$, d'où le résultat.

Corrigé 78. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 9

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour

k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}} = -\dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{2\, e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{3\, x^{\frac{1}{3}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $-\dfrac{3}{2}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -x^{\frac{2}{3}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{3}{2}\, e^{\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{3}{2}\, e^{\left(-(n-1)^{\frac{2}{3}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{3}{2}\, e^{\left(-(n-1)^{\frac{2}{3}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}$ est équivalent à $\dfrac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}}{\frac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)}} \leqslant e^{\left(-(n-1)^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-(n-1)^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} = e^{-n^{\frac{2}{3}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)} = e^{-n^{\frac{2}{3}}\left(\left(1-\frac{2}{3n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{2}{3n^{\frac{1}{3}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}}{\frac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\, e^{\left(-n^{\frac{2}{3}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-k^{\frac{2}{3}}\right)}}{k^{\frac{1}{3}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 79. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 9

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{2}{3\,x\ln(x)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{x} + \ln(x)^{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3\,\ln(x) - 2}{3\,x^2\ln(x)^{\frac{1}{3}}}.$$

On observe que $-\ln(x) + \frac{2}{3} > 0$ si et seulement si $\ln(x) < \frac{2}{3}$, si et seulement si $x < e^{\frac{2}{3}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est strictement croissante sur $\left]1, e^{\frac{2}{3}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$, donc finalement :

$$\int_2^{n+1} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} \leqslant \int_2^{n} \frac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = \frac{2}{3}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{2}{3}}}{x}$ est $x \mapsto \frac{3}{5}\ln(x)^{\frac{5}{3}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{5}\ln(n+1)^{\frac{5}{3}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} \leqslant -\frac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}}$ et $c_2 = -\dfrac{3}{5}\ln(2)^{\frac{5}{3}} + \dfrac{1}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{3}{5}\ln(n+1)^{\frac{5}{3}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$ est équivalent à $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}} > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{\frac{5}{3}} + \frac{5\,c_1}{3\ln(n)^{\frac{5}{3}}} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}}{\frac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}} \leqslant \frac{5\,c_2}{3\ln(n)^{\frac{5}{3}}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}}{\frac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{5}\ln(n)^{\frac{5}{3}}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)^{\frac{2}{3}}}{k}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 80. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. ← page 9
On a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + 1. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-2\sqrt{2} + 2\sqrt{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 2.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $2\sqrt{n}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $2\sqrt{n+1}$, qui est bien sûr équivalent à $2\sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $2\sqrt{n}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\sqrt{n} > 0$:

$$\sqrt{\frac{1}{n}+1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} \leqslant -\frac{1}{\sqrt{n}} + 1.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\sqrt{\frac{1}{n}+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Corrigé 81. L'application $f : x \mapsto \ln(x)$ est clairement croissante sur $]0,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 9
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto 1$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto x$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^n - \int_1^n 1\mathrm{d}x \\ &= n\ln(n) - [x]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = -2\ln(2) + 2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $n\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $(n+1)\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $n\ln(n) > 0$:

$$\frac{c_1}{n\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{c_2}{n\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)}{n\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Corrigé 82. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{141}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. On a donc : ← page 9

$$\sum_{k=0}^{n} k^{141} = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} k^{141}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} x^{141}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} x^{141}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_0^n x^{141}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{141}$, donc finalement :

$$\int_0^n x^{141}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{141} \leqslant \int_1^{n+1} x^{141}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Une primitive de $x \mapsto x^{141}$ est $x \mapsto \frac{1}{142}\, x^{142}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{142}\, n^{142} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^{141} \leqslant \frac{1}{142}\,(n+1)^{142} - \frac{1}{142}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{141}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{1}{142}\, n^{142}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{142}\,(n+1)^{142}$, qui est bien sûr équivalent à $\dfrac{1}{142}\, n^{142}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{141}$ est équivalent à $\dfrac{1}{142}\, n^{142}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{142}\, n^{142} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{141}}{\frac{1}{142}\, n^{142}} \leqslant \left(\frac{1}{n}+1\right)^{142} - \frac{1}{n^{142}}.$$

Il est clair que $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et : $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{142} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{141}}{\frac{1}{142}\, n^{142}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{141} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{142}\, n^{142}.$$

Remarque. On peut retrouver cet équivalent grâce aux sommes de Riemann : comme l'application $f : x \mapsto x^{141}$ est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\frac{1}{n^{142}} \sum_{k=1}^{n} k^{141} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{141} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{141} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{142}\, x^{142}\right]_0^1 = \frac{1}{142},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{141} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{142}\, n^{142}$. Néanmoins l'exercice demande spécifiquement à ce que l'équivalent soit trouvé grâce à une comparaison entre une série et une intégrale.

Corrigé 83. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 9

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x = \int_2^n \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, donc finalement :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^{n} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x + \frac{1}{2\,\ln(2)}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -1$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\ln(\ln(3)) + \ln(\ln(n+1)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant -\ln(\ln(2)) + \ln(\ln(n)).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\ln(\ln(3))$ et $c_2 = -\ln(\ln(2))$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\ln(\ln(n))$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\ln(\ln(n+1))$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\ln(\ln(n)) > 0$:

$$\frac{c_1}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{c_2}{\ln(\ln(n))} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 84. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 9

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{19\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{4\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{19}{4}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $\frac{19}{4}\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $x < \frac{4}{361}$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est d'abord strictement décroissante sur $\left]0, \frac{4}{361}\right]$, puis strictement croissante sur $\left[\frac{4}{361}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $\left[\frac{4}{361}, +\infty\right[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_1^n \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_1^n \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + e^{\frac{19}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} = \frac{4}{19} \cdot \left(\frac{19\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{4\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative $\frac{4}{19}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto \frac{19}{2}\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto \frac{4}{19}e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{x}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{15}{19}\,e^{\frac{19}{2}}+\frac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\leqslant-\frac{4}{19}\,e^{\frac{19}{2}}+\frac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n+1}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1=\dfrac{15}{19}\,e^{\frac{19}{2}}$ et $c_2=-\dfrac{4}{19}\,e^{\frac{19}{2}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n+1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}$ quand $n\to+\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $\dfrac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}>0$:

$$\frac{19}{4}\,c_1e^{\left(-\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}+1\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{\frac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}}\leqslant\frac{19}{4}\,c_2e^{\left(-\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}+e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n+1}-\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{\frac{19}{2}\sqrt{n+1}-\frac{19}{2}\sqrt{n}}=e^{\frac{19}{2}\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)}=e^{\frac{19}{2}\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)}=e^{\frac{19}{4\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{\frac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}}=1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4}{19}\,e^{\left(\frac{19}{2}\sqrt{n}\right)}.$$

Corrigé 85. L'application $f:x\mapsto\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 9

$$\forall x>0,\quad f'(x)=-\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{2\,x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\times\left(\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{10\sqrt{x}}\right)=\left(\frac{1}{10}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $\frac{1}{10}\sqrt{x}-\frac{1}{2}>0$ si et seulement si $x<25$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f:x\mapsto\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est d'abord strictement décroissante sur $]0{,}25]$, puis strictement croissante sur $[25,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x\mapsto\dfrac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $[25,+\infty[$ (on pose désormais $n_0=n_0$ pour ne pas s'encombrer des constantes numériques). On a donc :

$$\sum_{k=n_0}^{n}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}=\sum_{k=n_0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{n_0}^{n+1}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n_0}^{n}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n_0}\right)}}{\sqrt{n_0}}\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\leqslant\int_{n_0}^{n+1}\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} = 10 \cdot \left(\dfrac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{10\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative 10 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto \dfrac{1}{5}\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n_0}\right)}}{\sqrt{n_0}} + 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)} - 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n_0}\right)} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n+1}\right)} - 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n_0}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n_0}\right)}}{\sqrt{n_0}} - 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n_0}\right)}$ et $c_2 = -10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n_0}\right)}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n+1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)} > 0$:

$$\frac{1}{10}\,c_1 e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}} \leqslant \frac{1}{10}\,c_2 e^{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)} + e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n+1} - \frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{\frac{1}{5}\sqrt{n+1} - \frac{1}{5}\sqrt{n}} = e^{\frac{1}{5}\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1\right)} = e^{\frac{1}{5}\sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)} = e^{\frac{1}{10\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est négligeable devant $10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)}$, d'où le résultat.

Corrigé 86. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 9

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, donc finalement :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\ln(2)}. \qquad (1)$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -1$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\ln(\ln(3)) + \ln(\ln(n+1)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant -\ln(\ln(2)) + \ln(\ln(n)).$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\ln(\ln(3))$ et $c_2 = -\ln(\ln(2))$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\ln(\ln(n))$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\ln(\ln(n+1))$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\ln(\ln(n)) > 0$:

$$\frac{c_1}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{c_2}{\ln(\ln(n))} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 87. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a en outre : ← page 10

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{9}}} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{9\,x^{\frac{10}{9}}}\right) = -\frac{\ln(x) - 9}{9\,x^{\frac{10}{9}}}.$$

On observe que $-\frac{1}{9}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 9$, si et seulement si $x < e^9$. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}$ est strictement croissante sur $\left]0, e^9\right]$, et strictement décroissante sur $\left[e^9, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}$ est décroissante sur $\left[e^9, +\infty\right[$, donc sur $[n_0, +\infty[$, où l'on a posé : $n_0 = \lfloor e^9 \rfloor + 1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}$, donc finalement :

$$\int_{n_0}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}} \leqslant \int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{9}}}. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;

— en intégrant $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{9}}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{9}{8}\, x^{\frac{8}{9}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{n} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x &= \left[\frac{9}{8}\, x^{\frac{8}{9}} \ln(x)\right]_{n_0}^{n} - \int_{n_0}^{n} \frac{9}{8\, x^{\frac{1}{9}}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n) - \frac{9}{8}\, n_0^{\frac{8}{9}} \ln(n_0) - \left[\frac{81}{64}\, x^{\frac{8}{9}}\right]_{n_0}^{n} = \frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n) - \frac{9}{8}\, n_0^{\frac{8}{9}} \ln(n_0) - \frac{81}{64}\, n^{\frac{8}{9}} + \frac{81}{64}\, n_0^{\frac{8}{9}}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{9}{8}(n+1)^{\frac{8}{9}} \ln(n+1) - \frac{9}{8}\, n_0^{\frac{8}{9}} \ln(n_0) - \frac{81}{64}(n+1)^{\frac{8}{9}} + \frac{81}{64}\, n_0^{\frac{8}{9}} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}} \leqslant \frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n) - \frac{9}{8}\, n_0^{\frac{8}{9}} \ln(n_0) - \frac{81}{64}\, n^{\frac{8}{9}} + \frac{81}{64}\, n_0^{\frac{8}{9}} + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{9}}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\frac{9}{8}\, n_0^{\frac{8}{9}} \ln(n_0) + \frac{81}{64}\, n_0^{\frac{8}{9}}$ et $c_2 = -\frac{9}{8}\, n_0^{\frac{8}{9}} \ln(n_0) + \frac{81}{64}\, n_0^{\frac{8}{9}} + \frac{\ln(n_0)}{n_0^{\frac{1}{9}}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{9}{8}(n+1)^{\frac{8}{9}} \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}$ est équivalent à $\frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n) > 0$:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{8}{9}} + \frac{8\, c_1}{9\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}}{\frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} \leqslant \frac{8\, c_2}{9\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} - \frac{9}{8\,\ln(n)} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}}{\frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n).$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n_0-1} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}$ est négligeable devant $\frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)$ (c'est une quantité constante, qui est donc négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$), on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{9}{8}\, n^{\frac{8}{9}} \ln(n)$, d'où le résultat.

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k^{\frac{1}{9}}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles.

Corrigé 88. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 10

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}} = -135 \cdot \left(-\dfrac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{135\,x^{\frac{2}{3}}}\right)$ est, à la constante multiplicative -135 près, de la forme $u'e^{u}$ avec u l'application $x \mapsto -\dfrac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}}{x^{\frac{2}{3}}}$ est donc $x \mapsto -135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,x^{\frac{1}{3}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \leqslant 135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,(n-1)^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,(n-1)^{\frac{1}{3}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est équivalent à $135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}\,k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{135\,e^{\left(-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\right)}} \leqslant e^{\left(-\frac{1}{45}\,(n-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-\frac{1}{45}\,(n-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}} = e^{-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)} = e^{-\frac{1}{45}\,n^{\frac{1}{3}}\left(\left(1-\frac{1}{3\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{135\,n^{\frac{2}{3}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{0} = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}}{135\,e^{\left(-\frac{1}{45}n^{\frac{1}{3}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{45}k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 135\,e^{\left(-\frac{1}{45}n^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{45}k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-\frac{1}{45}k^{\frac{1}{3}}\right)}}{k^{\frac{2}{3}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 89. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 10

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}}$, donc finalement :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}} \leqslant \int_2^{n} \frac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\ln(2)^{\frac{1}{3}}}. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -\frac{1}{3}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac{1}{3}}}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(x)^{\frac{2}{3}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{3}{2}\ln(3)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\ln(n+1)^{\frac{2}{3}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}} \leqslant -\frac{3}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{3}{2}\ln(3)^{\frac{2}{3}}$ et $c_2 = -\dfrac{3}{2}\ln(2)^{\frac{2}{3}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}}$. Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{3}{2}\ln(n+1)^{\frac{2}{3}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}}$ est équivalent à $\dfrac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}} > 0$:

$$\frac{2\,c_1}{3\ln(n)^{\frac{2}{3}}} + \frac{\ln(n+1)^{\frac{2}{3}}}{\ln(n)^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{2\,c_2}{3\ln(n)^{\frac{2}{3}}} + 1.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\ln(n)^{\frac{2}{3}}.$$

Remarque. Cette comparaison entre une série et une intégrale démontre également que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{1}{3}}}$ diverge. L'équivalent trouvé dans cet exercice donne une idée plus précise de la vitesse de divergence des sommes partielles. Il est très important, pour votre prise de recul, de vous convaincre que vous n'auriez pas réussi à obtenir la nature de cette série par les autres méthodes classiques, y compris la méthode « $n^\alpha u_n$ » qui sert pourtant à étudier des séries analogues. Essayez, pour vous en convaincre. C'est avec ce genre « d'expériences » que vous prendrez les bons réflexes, en voyant que telle ou telle méthode est en défaut.

Corrigé 90. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 10

$$\forall x>0, \quad f'(x) = -\frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{5\,x^{\frac{6}{5}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} \times \left(\frac{4\,e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{5\,x^{\frac{1}{5}}}\right) = \left(\frac{4}{5}\,x^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{5}\right)\frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{6}{5}}}.$$

On observe que $\frac{4}{5}\,x^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{5} > 0$ si et seulement si $x < \frac{1}{4}\,\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}$ est d'abord strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{4}\,\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$, puis strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}\,\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}$ est croissante sur $\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, +\infty\right[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_1^{n} \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}}$, donc finalement :

$$\int_1^{n} \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x + e \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}} = \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{4\,e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{5\,x^{\frac{1}{5}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $\frac{5}{4}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto x^{\frac{4}{5}}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}}{x^{\frac{1}{5}}}$ est donc $x \mapsto \frac{5}{4}\,e^{\left(x^{\frac{4}{5}}\right)}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-\frac{1}{4}\,e + \frac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}} \leqslant -\frac{5}{4}\,e + \frac{5}{4}\,e^{\left((n+1)^{\frac{4}{5}}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -\dfrac{1}{4}\,e$ et $c_2 = -\dfrac{5}{4}\,e$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{5}{4}\,e^{\left((n+1)^{\frac{4}{5}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}}$ est équivalent à $\dfrac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)} > 0$:

$$\frac{4}{5}\,c_1 e^{\left(-n^{\frac{4}{5}}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)}} \leqslant \frac{4}{5}\,c_2 e^{\left(-n^{\frac{4}{5}}\right)} + e^{\left((n+1)^{\frac{4}{5}} - n^{\frac{4}{5}}\right)}.$$

Or :

$$e^{(n+1)^{\frac{4}{5}} - n^{\frac{4}{5}}} = e^{n^{\frac{4}{5}}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{4}{5}} - 1\right)} = e^{n^{\frac{4}{5}}\left(\left(1 + \frac{4}{5\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)} = e^{\frac{4}{5\,n^{\frac{1}{5}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}}}{\frac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\left(k^{\frac{4}{5}}\right)}}{k^{\frac{1}{5}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{4}\,e^{\left(n^{\frac{4}{5}}\right)}.$$

Corrigé 91. L'application $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 10

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times x^2 + \ln(x) \times (2\,x) = x(2\,\ln(x) + 1).$$

On observe que $2\,\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) > -\frac{1}{2}$, si et seulement si $x > e^{-\frac{1}{2}}$. On en déduit que $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}, +\infty\right[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} k^2 \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^2 \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^2 \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto x^2$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{1}{3}\,x^3$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{3}\,x^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\,n^3 \ln(n) - \left[\frac{1}{9}\,x^3\right]_1^n = \frac{1}{3}\,n^3 \ln(n) - \frac{1}{9}\,n^3 + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{3}\,n^3 \ln(n) - \frac{1}{9}\,n^3 + \frac{1}{9} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k) \leqslant \frac{1}{3}\,(n+1)^3 \ln(n+1) - \frac{1}{9}\,(n+1)^3 - \frac{8}{3}\,\ln(2) + \frac{8}{9}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{1}{9}$ et $c_2 = -\dfrac{8}{3}\,\ln(2) + \dfrac{8}{9}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{3}\,(n+1)^3 \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{3}\,n^3 \ln(n) > 0$:

$$-\frac{1}{3\,\ln(n)} + \frac{3\,c_1}{n^3 \ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)}{\frac{1}{3}\,n^3 \ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)^3 + \frac{3\,c_2}{n^3 \ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln(k)}{\frac{1}{3}\,n^3 \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\,n^3 \ln(n)\,.$$

Corrigé 92. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(x)^{\frac{96}{5}}}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 10

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(x)^{\frac{96}{5}}}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{96}{5}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{96}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{96}{5}}} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{96}{5}}} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{96}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{96}{5}}}$, donc finalement :

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{96}{5}}} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^{\frac{96}{5}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^{\frac{96}{5}}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac{96}{5}}}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -\frac{96}{5}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^{\frac{96}{5}}}$ est $x \mapsto -\frac{5}{91\ \ln(x)^{\frac{91}{5}}}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{96}{5}}} \leqslant \frac{5}{91\ \ln(n-1)^{\frac{91}{5}}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{96}{5}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{5}{91\ \ln(n-1)^{\frac{91}{5}}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{96}{5}}}$ est équivalent à $\dfrac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{96}{5}}}}{\frac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}}} \leqslant \frac{\ln(n)^{\frac{91}{5}}}{\ln(n-1)^{\frac{91}{5}}}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{96}{5}}}}{\frac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{96}{5}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{91\ \ln(n)^{\frac{91}{5}}}.$$

Remarque. Une comparaison entre une série et une intégrale aurait également permis de démontrer (si vous reprenez la majoration obtenue par cette méthode) que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k\ln(k)^{\frac{96}{5}}}$ converge effectivement. Nous vous invitons à vous en convaincre.

Corrigé 93. L'application $f : x \mapsto \ln(x)$ est clairement croissante sur $]0,+\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 10
Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :
- en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- en intégrant $x \mapsto 1$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto x$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^n - \int_1^n 1\mathrm{d}x\\ &= n\ln(n) - [x]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\,\ln(2) + 1.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = -2\,\ln(2) + 2$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $n\ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $(n+1)\ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $n\ln(n) > 0$:

$$\frac{c_1}{n\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}\ln(k)}{n\ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{c_2}{n\ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ln(k)}{n\ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Corrigé 94. L'application $f : x \mapsto x^{\frac{3}{13}}\ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (logarithme et fonction puissance). On a en outre : ← page 10

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{13}} + \ln(x) \times \left(\frac{3}{13\,x^{\frac{10}{13}}}\right) = \frac{3\,\ln(x) + 13}{13\,x^{\frac{10}{13}}}.$$

On observe que $\frac{3}{13}\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) > -\frac{13}{3}$, si et seulement si $x > e^{-\frac{13}{3}}$. On en déduit que $f : x \mapsto x^{\frac{3}{13}}\ln(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0, e^{\left(-\frac{13}{3}\right)}\right]$, et strictement croissante sur $\left[e^{\left(-\frac{13}{3}\right)}, +\infty\right[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto x^{\frac{3}{13}}\ln(x)$ est croissante sur $\left[e^{\left(-\frac{13}{3}\right)}, +\infty\right[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{13}}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} k^{\frac{3}{13}}\ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} x^{\frac{3}{13}}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} x^{\frac{3}{13}}\ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_1^n x^{\frac{3}{13}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{\frac{3}{13}}\ln(k)$, donc finalement :

$$\int_1^n x^{\frac{3}{13}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^{\frac{3}{13}}\ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} x^{\frac{3}{13}}\ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On calcule ces deux intégrales *via* une intégration par parties :

— en dérivant le logarithme, qui est de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— en intégrant $x \mapsto x^{\frac{3}{13}}$, qui est continue sur l'intervalle d'intégration ; une primitive en est $x \mapsto \frac{13}{16}\, x^{\frac{16}{13}}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^n x^{\frac{3}{13}} \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{13}{16}\, x^{\frac{16}{13}} \ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac{13}{16}\, x^{\frac{3}{13}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n) - \left[\frac{169}{256}\, x^{\frac{16}{13}}\right]_1^n = \frac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n) - \frac{169}{256}\, n^{\frac{16}{13}} + \frac{169}{256}.\end{aligned}$$

On calcule de même l'autre intégrale. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n) - \frac{169}{256}\, n^{\frac{16}{13}} + \frac{169}{256} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{13}} \ln(k) \leqslant \frac{13}{16}\, (n+1)^{\frac{16}{13}} \ln(n+1) - \frac{169}{256}\, (n+1)^{\frac{16}{13}} - \frac{13}{8} \cdot 2^{\frac{3}{13}} \ln(2) + \frac{169}{128} \cdot 2^{\frac{3}{13}}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = \dfrac{169}{256}$ et $c_2 = -\dfrac{13}{8} \cdot 2^{\frac{3}{13}} \ln(2) + \dfrac{169}{128} \cdot 2^{\frac{3}{13}}$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{13}} \ln(k)$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $\dfrac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n)$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $\dfrac{13}{16}\, (n+1)^{\frac{16}{13}} \ln(n+1)$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n)$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{13}} \ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n)$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n) > 0$:

$$-\frac{13}{16 \ln(n)} + \frac{16\, c_1}{13\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{13}} \ln(k)}{\frac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n)} \leqslant \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{16}{13}} + \frac{16\, c_2}{13\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n)}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{13}} \ln(k)}{\frac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n)} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{13}} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{13}{16}\, n^{\frac{16}{13}} \ln(n).$$

Corrigé 95. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 10

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}} = -4 \cdot \left(-\dfrac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{4\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative -4 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto -4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \leqslant 4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n-1}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n-1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}} \leqslant e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{-\frac{1}{2}\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}\sqrt{n}} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}\left(\sqrt{-\frac{1}{n}+1}-1\right)} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}\left(\left(1-\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{4\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}}{4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 96. L'application $f : x \mapsto \dfrac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 10

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}$, donc finalement :

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}} = -\dfrac{27}{4}\cdot\left(-\dfrac{4\,e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{27\,x^{\frac{26}{27}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $-\dfrac{27}{4}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -4\,x^{\frac{1}{27}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}}{x^{\frac{26}{27}}}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{27}{4}\,e^{\left(-4\,x^{\frac{1}{27}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}} \leqslant \frac{27}{4}\,e^{\left(-4\,(n-1)^{\frac{1}{27}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{27}{4}\,e^{\left(-4\,(n-1)^{\frac{1}{27}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}$ est équivalent à $\dfrac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}}{\frac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)}} \leqslant e^{\left(-4\,(n-1)^{\frac{1}{27}}+4\,n^{\frac{1}{27}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-4\,(n-1)^{\frac{1}{27}}+4\,n^{\frac{1}{27}}} = e^{-4\,n^{\frac{1}{27}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{27}}-1\right)} = e^{-4\,n^{\frac{1}{27}}\left(\left(1-\frac{1}{27\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{4}{27\,n^{\frac{26}{27}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{26}{27}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}}{\frac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{27}{4}\,e^{\left(-4\,n^{\frac{1}{27}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-4\,k^{\frac{1}{27}}\right)}}{k^{\frac{26}{27}}}$ est négligeable devant $\frac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 97. L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln{(x)}^2}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 11
Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \frac{1}{x \ln{(x)}^2}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[2, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln{(k)}^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k \ln{(k)}^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x \ln{(x)}^2} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x \ln{(x)}^2} \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x \ln{(x)}^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln{(k)}^2}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x \ln{(x)}^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln{(k)}^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x \ln{(x)}^2} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \frac{1}{x \ln{(x)}^2}$ est de la forme $u'u^{\alpha}$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -2$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln{(x)}^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{\ln(x)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{\ln{(n)}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln{(k)}^2} \leqslant \frac{1}{\ln{(n-1)}}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln{(k)}^2}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\frac{1}{\ln{(n-1)}}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\frac{1}{\ln{(n)}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\frac{1}{\ln{(n)}}$. Ainsi nous conjecturons que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln{(k)}^2}$ est équivalent à $\frac{1}{\ln{(n)}}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\frac{1}{\ln{(n)}} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}}{\frac{1}{\ln(n)}} \leqslant \frac{\ln{(n)}}{\ln{(n-1)}}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}}{\frac{1}{\ln(n)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln{(k)}^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln{(n)}}.$$

Remarque. Une comparaison entre une série et une intégrale aurait également permis de démontrer (si vous reprenez la majoration obtenue par cette méthode) que la série $\sum_{k \geqslant n} \frac{1}{k \ln{(k)}^2}$ converge effectivement. Nous vous invitons à vous en convaincre.

Corrigé 98. L'application $f\,:\,x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 11

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sur $[1,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}} = -\dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{3\,e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{4\,x^{\frac{3}{4}}}\right)$ est, à la constante multiplicative $-\dfrac{4}{3}$ près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto -3\,x^{\frac{1}{4}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{4}{3}\,e^{\left(-3\,x^{\frac{1}{4}}\right)}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \leqslant \frac{4}{3}\,e^{\left(-3\,(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{4}{3}\,e^{\left(-3\,(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$ est équivalent à $\dfrac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}}{\frac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)}} \leqslant e^{\left(-3\,(n-1)^{\frac{1}{4}}+3\,n^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Or :

$$e^{-3\,(n-1)^{\frac{1}{4}}+3\,n^{\frac{1}{4}}} = e^{-3\,n^{\frac{1}{4}}\left(\left(-\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)} = e^{-3\,n^{\frac{1}{4}}\left(\left(1-\frac{1}{4\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{3}{4\,n^{\frac{3}{4}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}}{\frac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3}\,e^{\left(-3\,n^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Remarque. Pour démontrer que la somme étudiée dans l'exercice est finie, on aurait aussi pu démontrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$ converge. On y parvient facilement *via* la méthode « $n^\alpha u_n$ » (le théorème des croissances comparées assure que $\frac{e^{\left(-3\,k^{\frac{1}{4}}\right)}}{k^{\frac{3}{4}}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ par exemple, quand $k \to +\infty$). Vérifiez-le pour vous entraîner.

Corrigé 99. L'application $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables (fonction puissance et exponentielle). On a en outre : ← page 11

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\,x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\,\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}\,\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

On observe que $\frac{1}{2}\,\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si $x < 1$. On traite de même le cas d'égalité. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est d'abord strictement décroissante sur $]0,1]$, puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé.

Soit n au voisinage de $+\infty$. L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $[1, +\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_1^{n} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$, donc finalement :

$$\int_1^{n} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + e \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 \cdot \left(\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\,\sqrt{x}}\right)$ est, à la constante multiplicative 2 près, de la forme $u'e^u$ avec u l'application $x \mapsto \sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto 2\,e^{\sqrt{x}}$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$-e + 2\,e^{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \leqslant -2\,e + 2\,e^{\left(\sqrt{n+1}\right)}.$$

Pour alléger les calculs qui suivent, à partir de maintenant nous posons $c_1 = -e$ et $c_2 = -2\,e$ (ce sont des constantes, qui disparaîtront lors du passage à la limite ci-dessous, donc leurs valeurs exactes n'importeront pas).

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la minoration, est : $2\,e^{\sqrt{n}}$. Dans la majoration, le terme prépondérant est $2\,e^{\left(\sqrt{n+1}\right)}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $2\,e^{\sqrt{n}}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$ est équivalent à $2\,e^{\sqrt{n}}$ quand n

est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $2\,e^{\sqrt{n}} > 0$:

$$\frac{1}{2}\,c_1 e^{\left(-\sqrt{n}\right)} + 1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{1}{2}\,c_2 e^{\left(-\sqrt{n}\right)} + e^{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)} = e^{\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)} = e^{\frac{1}{2\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}}{2\,e^{\sqrt{n}}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,e^{\sqrt{n}}.$$

Corrigé 100. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^7}$ est clairement décroissante sur $]1,+\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. On peut donc bel et bien utiliser la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, comme intimé par l'énoncé. ← page 11

Soit n au voisinage de $+\infty$ (ce choix assurera que n est plus grand, ci-dessous, que les valeurs non autorisées pour k). L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^7}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur $[2,+\infty[$. On a donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)^7}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)^7}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^7}\mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité découle de la relation de Chasles, et de même : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^7}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7}$, donc finalement :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^7}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^7}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^7}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec u l'application $x \mapsto \ln(x)$ et $\alpha = -7$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^7}$ est $x \mapsto -\frac{1}{6\,\ln(x)^6}$. Elle admet une limite nulle en $+\infty$. Ainsi l'encadrement (1) devient :

$$\frac{1}{6\,\ln(n)^6} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7} \leqslant \frac{1}{6\,\ln(n-1)^6}.$$

Conjecturons un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7}$, en nous basant sur des équivalents des deux extrémités de cet encadrement. On note que le terme prépondérant, dans la majoration, est : $\dfrac{1}{6\,\ln(n-1)^6}$, et il est raisonnable de conjecturer que c'est équivalent à $\dfrac{1}{6\,\ln(n)^6}$ quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas de soi et nous devrons le vérifier). Dans la minoration, le terme prépondérant est $\dfrac{1}{6\,\ln(n)^6}$. Ainsi nous conjecturons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7}$ est équivalent à $\dfrac{1}{6\,\ln(n)^6}$ quand n est au voisinage de $+\infty$: nous allons le démontrer, en vérifiant que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Divisons l'encadrement ci-dessus par $\dfrac{1}{6\,\ln(n)^6} > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7}}{\frac{1}{6\,\ln(n)^6}} \leqslant \frac{\ln(n)^6}{\ln(n-1)^6}.$$

Or :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+0=1.$$

On en déduit que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 1, les limites des autres quantités étant évidentes. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7}}{\frac{1}{6\ln(n)^6}} = 1$. En conclusion :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^7} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6\ln(n)^6}.$$

Remarque. Une comparaison entre une série et une intégrale aurait également permis de démontrer (si vous reprenez la majoration obtenue par cette méthode) que la série $\sum\limits_{k\geqslant n} \frac{1}{k\ln(k)^7}$ converge effectivement. Nous vous invitons à vous en convaincre.