Relations de Bézout dans $\mathbb{Z}$

💡 Comment trouver une relation de Bézout entre deux nombres entiers naturels, à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu. Dans le corrigé, je propose une façon de remonter l'algorithme qui, je l'espère, rend la tâche moins pénible.

Commentaire général sur le traitement de ces exercices. L'étape fastidieuse est la remontée de l'algorithme d'Euclide étendu, une fois le dernier reste non nul trouvé, pour l'exprimer en fonction des entiers a et b dont on veut trouver une relation de Bézout. Pour me simplifier les calculs et minimiser les risques d'erreurs dus aux réinjections successives, je vais interpréter matriciellement les différentes divisions euclidiennes. Une division euclidienne de la forme : $a = bq + r$, sera réécrite matriciellement : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix}$. Posons : $M_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour alléger les notations. Il est utile de noter pour la suite que : $M_q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}$. Après avoir appliqué l'algorithme d'Euclide étendu, en réécrivant matriciellement toutes les divisions euclidiennes effectuées, et en les réinjectant successivement dans la première égalité, j'aurai une relation du type :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M_{q_1} \begin{pmatrix} b \\ r_1 \end{pmatrix} = M_{q_1} M_{q_2} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \cdots = M_{q_1} M_{q_2} \cdots M_{q_k} \begin{pmatrix} r_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

où r_k est le dernier reste non nul de l'algorithme. En inversant les matrices carrées ci-dessus, on a alors :

$$r_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} M_{q_k}^{-1} \cdots M_{q_2}^{-1} M_{q_1}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à simplifier ce produit matriciel pour avoir une expression de r en fonction de a et b. Pour minimiser les calculs, il est plus malin de commencer par la gauche. Le produit d'un vecteur ligne par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}$ ne nécessite au fond qu'un seul calcul à effectuer, puisque : $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & * \end{pmatrix}$. Ayez ces commentaires en tête au moment de lire le corrigé.

Exercice 1. Déterminer le plus grand commun diviseur de 29 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 7

Exercice 2. Déterminer le plus grand commun diviseur de 22 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 7

Exercice 3. Déterminer le plus grand commun diviseur de 30 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 8

Exercice 4. Déterminer le plus grand commun diviseur de 39 et 27 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 8

Exercice 5. Déterminer le plus grand commun diviseur de 134 et 13 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 8

Exercice 6. Déterminer le plus grand commun diviseur de 12 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 9

Exercice 7. Déterminer le plus grand commun diviseur de 141 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 9

Exercice 8. Déterminer le plus grand commun diviseur de 77 et 16 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 9

Exercice 9. Déterminer le plus grand commun diviseur de 19 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 9

Exercice 10. Déterminer le plus grand commun diviseur de 11 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 10

Exercice 11. Déterminer le plus grand commun diviseur de 18 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 10

Exercice 12. Déterminer le plus grand commun diviseur de 17 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 11

Exercice 13. Déterminer le plus grand commun diviseur de 23 et 15 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 11

Exercice 14. Déterminer le plus grand commun diviseur de 10 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 12

Exercice 15. Déterminer le plus grand commun diviseur de 11 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 12

Exercice 16. Déterminer le plus grand commun diviseur de 32 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 12

Exercice 17. Déterminer le plus grand commun diviseur de 10 et 7 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 13

Exercice 18. Déterminer le plus grand commun diviseur de 34 et 27 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 13

Exercice 19. Déterminer le plus grand commun diviseur de 43 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 14

Exercice 20. Déterminer le plus grand commun diviseur de 17 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 14

Exercice 21. Déterminer le plus grand commun diviseur de 35 et 15 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 15

Exercice 22. Déterminer le plus grand commun diviseur de 28 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 15

Exercice 23. Déterminer le plus grand commun diviseur de 59 et 29 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 16

Exercice 24. Déterminer le plus grand commun diviseur de 17 et 7 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 16

Exercice 25. Déterminer le plus grand commun diviseur de 12 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 16

Exercice 26. Déterminer le plus grand commun diviseur de 100 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 16

Exercice 27. Déterminer le plus grand commun diviseur de 13 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 17

Exercice 28. Déterminer le plus grand commun diviseur de 10 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 17

Exercice 29. Déterminer le plus grand commun diviseur de 63 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 17

Exercice 30. Déterminer le plus grand commun diviseur de 37 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 18

Exercice 31. Déterminer le plus grand commun diviseur de 44 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 18

Exercice 32. Déterminer le plus grand commun diviseur de 264 et 58 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 18

Exercice 33. Déterminer le plus grand commun diviseur de 26 et 16 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 19

Exercice 34. Déterminer le plus grand commun diviseur de 43 et 15 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 19

Exercice 35. Déterminer le plus grand commun diviseur de 290 et 27 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 20

Exercice 36. Déterminer le plus grand commun diviseur de 36 et 34 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 20

Exercice 37. Déterminer le plus grand commun diviseur de 362 et 33 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 20

Exercice 38. Déterminer le plus grand commun diviseur de 49 et 13 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 21

Exercice 39. Déterminer le plus grand commun diviseur de 14 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 21

Exercice 40. Déterminer le plus grand commun diviseur de 27 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 22

Exercice 41. Déterminer le plus grand commun diviseur de 47 et 16 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 22

Exercice 42. Déterminer le plus grand commun diviseur de 39 et 19 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 23

Exercice 43. Déterminer le plus grand commun diviseur de 75 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 23

Exercice 44. Déterminer le plus grand commun diviseur de 11 et 7 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 23

Exercice 45. Déterminer le plus grand commun diviseur de 26 et 14 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 24

Exercice 46. Déterminer le plus grand commun diviseur de 13 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 24

Exercice 47. Déterminer le plus grand commun diviseur de 55 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 24

Exercice 48. Déterminer le plus grand commun diviseur de 32 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 25

Exercice 49. Déterminer le plus grand commun diviseur de 13 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 25

Exercice 50. Déterminer le plus grand commun diviseur de 40 et 17 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 25

Exercice 51. Déterminer le plus grand commun diviseur de 17 et 13 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 26

Exercice 52. Déterminer le plus grand commun diviseur de 12 et 7 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 26

Exercice 53. Déterminer le plus grand commun diviseur de 13 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 27

Exercice 54. Déterminer le plus grand commun diviseur de 13 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 27

Exercice 55. Déterminer le plus grand commun diviseur de 308 et 21 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 28

Exercice 56. Déterminer le plus grand commun diviseur de 192 et 13 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 28

Exercice 57. Déterminer le plus grand commun diviseur de 63 et 16 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 28

Exercice 58. Déterminer le plus grand commun diviseur de 22 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 29

Exercice 59. Déterminer le plus grand commun diviseur de 14 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 29

Exercice 60. Déterminer le plus grand commun diviseur de 118 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 30

Exercice 61. Déterminer le plus grand commun diviseur de 23 et 9 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 30

Exercice 62. Déterminer le plus grand commun diviseur de 31 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 31

Exercice 63. Déterminer le plus grand commun diviseur de 24 et 16 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 31

Exercice 64. Déterminer le plus grand commun diviseur de 17 et 12 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 31

Exercice 65. Déterminer le plus grand commun diviseur de 38 et 20 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 31

Exercice 66. Déterminer le plus grand commun diviseur de 100 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 32

Exercice 67. Déterminer le plus grand commun diviseur de 166 et 32 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 32

Exercice 68. Déterminer le plus grand commun diviseur de 14 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 33

Exercice 69. Déterminer le plus grand commun diviseur de 131 et 19 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 33

Exercice 70. Déterminer le plus grand commun diviseur de 19 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 34

Exercice 71. Déterminer le plus grand commun diviseur de 303 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 34

Exercice 72. Déterminer le plus grand commun diviseur de 16 et 13 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 34

Exercice 73. Déterminer le plus grand commun diviseur de 68 et 23 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 35

Exercice 74. Déterminer le plus grand commun diviseur de 12 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 35

Exercice 75. Déterminer le plus grand commun diviseur de 46 et 12 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 35

Exercice 76. Déterminer le plus grand commun diviseur de 39 et 32 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 36

Exercice 77. Déterminer le plus grand commun diviseur de 11 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 36

Exercice 78. Déterminer le plus grand commun diviseur de 23 et 10 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 37

Exercice 79. Déterminer le plus grand commun diviseur de 17 et 7 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 37

Exercice 80. Déterminer le plus grand commun diviseur de 73 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 38

Exercice 81. Déterminer le plus grand commun diviseur de 51 et 30 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 38

Exercice 82. Déterminer le plus grand commun diviseur de 70 et 15 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 39

Exercice 83. Déterminer le plus grand commun diviseur de 13 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 39

Exercice 84. Déterminer le plus grand commun diviseur de 34 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 40

Exercice 85. Déterminer le plus grand commun diviseur de 47 et 15 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 40

Exercice 86. Déterminer le plus grand commun diviseur de 77 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 40

Exercice 87. Déterminer le plus grand commun diviseur de 16 et 13 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 41

Exercice 88. Déterminer le plus grand commun diviseur de 22 et 12 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 41

Exercice 89. Déterminer le plus grand commun diviseur de 22 et 14 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 42

Exercice 90. Déterminer le plus grand commun diviseur de 236 et 13 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 42

Exercice 91. Déterminer le plus grand commun diviseur de 147 et 6 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 43

Exercice 92. Déterminer le plus grand commun diviseur de 15 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 43

Exercice 93. Déterminer le plus grand commun diviseur de 65 et 12 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 43

Exercice 94. Déterminer le plus grand commun diviseur de 21 et 14 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 44

Exercice 95. Déterminer le plus grand commun diviseur de 14 et 8 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 44

Exercice 96. Déterminer le plus grand commun diviseur de 36 et 7 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 44

Exercice 97. Déterminer le plus grand commun diviseur de 105 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 45

Exercice 98. Déterminer le plus grand commun diviseur de 77 et 14 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 45

Exercice 99. Déterminer le plus grand commun diviseur de 18 et 7 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 45

Exercice 100. Déterminer le plus grand commun diviseur de 13 et 11 et trouver une relation de Bézout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu. → page 46

Corrigé 1. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 1

$$\begin{cases} 29 = 11 \times 2 + 7 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 29 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \\ 11 = 7 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ 7 = 4 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 4 = 3 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 3 = 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 29 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $29u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 8 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 11 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $29u + 11v = 1$, avec : $(u, v) = (-3{,}8)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 2. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 1

$$\begin{cases} 22 = 9 \times 2 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 22 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ 9 = 4 \times 2 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 4 = 1 \times 4 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 22 et 9 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $22u + 9v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 9 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $22u + 9v = 1$, avec : $(u, v) = (-2{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 3. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{lcl} 30 & = & 9\times 3+3 \\ 9 & = & 3\times 3+0 \end{array}\right.$$

Le dernier reste non nul est 3. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 30 et 9 est 3. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $30u+9v=3$, avec : $(u,v)=(1,-3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 4. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{lcll} 39 & = & 27\times 1+12 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}39\\27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27\\12\end{pmatrix}\right) \\ 27 & = & 12\times 2+3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}27\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}\right) \\ 12 & = & 3\times 4+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right) \end{array}\right.$$

Le dernier reste non nul est 3. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 39 et 27 est 3. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $39u+27v=3$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$3=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\27\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $3=\begin{pmatrix}-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\27\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $39u+27v=3$, avec : $(u,v)=(-2{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 5. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{lcll} 134 & = & 13\times 10+4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}134\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}\right) \\ 13 & = & 4\times 3+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right) \\ 4 & = & 1\times 4+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{array}\right.$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 134 et 13 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $134u+13v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}134\\13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&31\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 134 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $134u + 13v = 1$, avec : $(u, v) = (-3{,}31)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 6. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 1

$$\begin{cases} 12 & = & 8 \times 1 + 4 \\ 8 & = & 4 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 4. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 12 et 8 est 4. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $12u + 8v = 4$, avec : $(u, v) = (1, -1)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 7. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 1

$$\begin{cases} 141 & = & 10 \times 14 + 1 \\ 10 & = & 1 \times 10 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 141 et 10 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $141u + 10v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -14)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 8. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 1

$$\begin{cases} 77 & = & 16 \times 4 + 13 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 77 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \\ 16 & = & 13 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ 13 & = & 3 \times 4 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 3 & = & 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 77 et 16 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $77u + 16v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -24 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 5 & -24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 16 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $77u + 16v = 1$, avec : $(u, v) = (5, -24)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 9. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 1

$$\begin{cases} 19 & = & 9 \times 2 + 1 \\ 9 & = & 1 \times 9 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 19 et 9 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $19u + 9v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 10. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 1

$$\begin{cases} 11 = 9\times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 9 = 2\times 4 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 2 = 1\times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 11 et 9 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $11u + 9v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $11u + 9v = 1$, avec : $(u, v) = (-4{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 11. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 18 = 11\times 1 + 7 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \\ 11 = 7\times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ 7 = 4\times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 4 = 3\times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 3 = 1\times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 18 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $18u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\11\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $18u+11v = 1$, avec : $(u,v) = (-3{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 12. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 17 = 6\times 2+5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\right) \\ 6 = 5\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\right) \\ 5 = 1\times 5+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 17 et 6 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $17u+6v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $17u+6v = 1$, avec : $(u,v) = (-1{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 13. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 23 = 15\times 1+8 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}23\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}\right) \\ 15 = 8\times 1+7 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}\right) \\ 8 = 7\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\right) \\ 7 = 1\times 7+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 23 et 15 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $23u+15v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}23\\15\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}23\\15\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $23u+15v = 1$, avec : $(u,v) = (2,-3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 14. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 10 = 6\times 1+4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\right) \\ 6 = 4\times 1+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right) \\ 4 = 2\times 2+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 10 et 6 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $10u+6v=2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2=\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $10u+6v=2$, avec : $(u,v)=(-1{,}2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 15. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 11 = 8\times 1+3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}11\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\right) \\ 8 = 3\times 2+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right) \\ 3 = 2\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) \\ 2 = 1\times 2+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 11 et 8 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $11u+8v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&-4\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1=\begin{pmatrix}3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\8\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $11u+8v=1$, avec : $(u,v)=(3,-4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 16. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement ← page 2

trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement :

$$\begin{cases} 32 = 9\times 3+5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 32\\ 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9\\ 5\end{pmatrix}\right) \\[2ex] 9 = 5\times 1+4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 9\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5\\ 4\end{pmatrix}\right) \\[2ex] 5 = 4\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 1\end{pmatrix}\right) \\[2ex] 4 = 1\times 4+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 32 et 9 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $32u + 9v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32\\ 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -7\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32\\ 9\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $32u + 9v = 1$, avec : $(u, v) = (2, -7)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 17. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 10 = 7\times 1+3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 10\\ 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7\\ 3\end{pmatrix}\right) \\[2ex] 7 = 3\times 2+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 1\end{pmatrix}\right) \\[2ex] 3 = 1\times 3+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 10 et 7 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $10u + 7v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\\ 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\\ 7\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $10u + 7v = 1$, avec : $(u, v) = (-2{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 18. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 34 = 27\times 1+7 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}34\\27\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27\\7\end{pmatrix}\right) \\ 27 = 7\times 3+6 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}27\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}\right) \\ 7 = 6\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}\right) \\ 6 = 1\times 6+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 34 et 27 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $34u + 27v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}34\\27\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4 & -5\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix}4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}34\\27\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $34u+27v = 1$, avec : $(u, v) = (4, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 19. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 43 = 11\times 3+10 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}43\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}\right) \\ 11 = 10\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}\right) \\ 10 = 1\times 10+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 43 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $43u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}43\\11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 4\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix}-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}43\\11\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $43u+11v = 1$, avec : $(u, v) = (-1{,}4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 20. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je ← page 2

prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement :

$$\begin{cases} 17 = 6\times 2+5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\[2ex] 6 = 5\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\[2ex] 5 = 1\times 5+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 17 et 6 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $17u + 6v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $17u + 6v = 1$, avec : $(u, v) = (-1{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 21. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 35 = 15\times 2+5 \\[2ex] 15 = 5\times 3+0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 5. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 35 et 15 est 5. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $35u + 15v = 5$, avec : $(u, v) = (1, -2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 22. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 28 = 6\times 4+4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\[2ex] 6 = 4\times 1+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\[2ex] 4 = 2\times 2+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 28 et 6 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $28u + 6v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $28u + 6v = 2$, avec : $(u, v) = (-1{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 23. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 59 & = & 29 \times 2 + 1 \\ 29 & = & 1 \times 29 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 59 et 29 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $59u + 29v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 24. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 17 & = & 7 \times 2 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 7 & = & 3 \times 2 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 3 & = & 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 17 et 7 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $17u + 7v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $17u + 7v = 1$, avec : $(u, v) = (-2{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 25. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 12 & = & 8 \times 1 + 4 \\ 8 & = & 4 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 4. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 12 et 8 est 4. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $12u + 8v = 4$, avec : $(u, v) = (1, -1)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 26. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 100 & = & 11 \times 9 + 1 \\ 11 & = & 1 \times 11 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 100 et 11 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $100u + 11v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -9)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 27. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 13 = 11 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 11 = 2 \times 5 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 13 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $13u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 6 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $13u + 11v = 1$, avec : $(u, v) = (-5{,}6)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 28. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 10 = 8 \times 1 + 2 \\ 8 = 2 \times 4 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 10 et 8 est 2. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $10u + 8v = 2$, avec : $(u, v) = (1, -1)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 29. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 2

$$\begin{cases} 63 = 10 \times 6 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 63 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 10 = 3 \times 3 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 3 = 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 63 et 10 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $63u + 10v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 19 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63 \\ 10 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $63u + 10v = 1$, avec : $(u, v) = (-3{,}19)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 30. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 37 & = & 9 \times 4 + 1 \\ 9 & = & 1 \times 9 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 37 et 9 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $37u + 9v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 31. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 44 & = & 8 \times 5 + 4 \\ 8 & = & 4 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 4. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 44 et 8 est 4. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $44u + 8v = 4$, avec : $(u, v) = (1, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 32. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases}
264 & = & 58 \times 4 + 32 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 264 \\ 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 58 \\ 32 \end{pmatrix} \right) \\
58 & = & 32 \times 1 + 26 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 58 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 26 \end{pmatrix} \right) \\
32 & = & 26 \times 1 + 6 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 32 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\
26 & = & 6 \times 4 + 2 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 26 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
6 & = & 2 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 264 et 58 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $264u + 58v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 264 \\ 58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 41 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -9 & 41 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 264 \\ 58 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $264u + 58v = 2$, avec : $(u, v) = (-9{,}41)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 33. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 26 = 16 \times 1 + 10 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \\ 16 = 10 \times 1 + 6 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\ 10 = 6 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ 6 = 4 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 4 = 2 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 26 et 16 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $26u + 16v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 26 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 26 \\ 16 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $26u + 16v = 2$, avec : $(u, v) = (-3{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 34. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 43 = 15 \times 2 + 13 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 43 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \\ 15 = 13 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 13 = 2 \times 6 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 43 et 15 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $43u + 15v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -20 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 7 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 \\ 15 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $43u + 15v = 1$, avec : $(u, v) = (7, -20)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 35. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 290 = 27 \times 10 + 20 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 290 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 27 \\ 20 \end{pmatrix}\right) \\ 27 = 20 \times 1 + 7 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 27 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \\ 20 = 7 \times 2 + 6 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \\ 7 = 6 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 6 = 1 \times 6 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 290 et 27 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $290u + 27v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 290 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 43 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -4 & 43 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 290 \\ 27 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $290u + 27v = 1$, avec : $(u, v) = (-4{,}43)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 36. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 36 = 34 \times 1 + 2 \\ 34 = 2 \times 17 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 36 et 34 est 2. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $36u + 34v = 2$, avec : $(u, v) = (1, -1)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 37. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 362 = 33 \times 10 + 32 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 362 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 \\ 32 \end{pmatrix}\right) \\ 33 = 32 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 33 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 32 = 1 \times 32 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 32 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 362 et 33 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $362u + 33v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 362 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 11 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 362 \\ 33 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $362u + 33v = 1$, avec : $(u, v) = (-1{,}11)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 38. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 49 = 13 \times 3 + 10 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 49 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \\ 13 = 10 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ 10 = 3 \times 3 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 3 = 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 49 et 13 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $49u + 13v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -15 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 4 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $49u + 13v = 1$, avec : $(u, v) = (4, -15)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 39. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 14 = 10 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ 10 = 4 \times 2 + 2 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 4 = 2 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 14 et 10 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $14u + 10v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ 10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2=\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ 10\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $14u+10v=2$, avec : $(u,v)=(-2{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 40. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases}27 = 8\times 3+3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}27\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ 3\end{pmatrix}\right)\\ 8 = 3\times 2+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}8\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\right)\\ 3 = 2\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right)\\ 2 = 1\times 2+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 27 et 8 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $27u+8v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27\\ 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -10\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1=\begin{pmatrix}3 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27\\ 8\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $27u+8v=1$, avec : $(u,v)=(3,-10)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 41. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases}47 = 16\times 2+15 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}47\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\ 15\end{pmatrix}\right)\\ 16 = 15\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}16\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\ 1\end{pmatrix}\right)\\ 15 = 1\times 15+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}15\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 47 et 16 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $47u+16v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}47\\ 16\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47 \\ 16 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $47u + 16v = 1$, avec : $(u, v) = (-1{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 42. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 39 = 19 \times 2 + 1 \\ \\ 19 = 1 \times 19 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 39 et 19 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $39u + 19v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 43. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 75 = 8 \times 9 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 75 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ \\ 8 = 3 \times 2 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ \\ 3 = 2 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 75 et 8 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $75u + 8v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -28 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 3 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 8 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $75u + 8v = 1$, avec : $(u, v) = (3, -28)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 44. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 11 = 7 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ \\ 7 = 4 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ \\ 4 = 3 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \\ 3 = 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 11 et 7 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $11u + 7v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique

en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $11u + 7v = 1$, avec : $(u, v) = (2, -3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 45. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 26 = 14 \times 1 + 12 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 26 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix} \right) \\[2ex] 14 = 12 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\[2ex] 12 = 2 \times 6 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 26 et 14 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $26u + 14v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 14 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $26u + 14v = 2$, avec : $(u, v) = (-1{,}2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 46. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 13 = 6 \times 2 + 1 \\[2ex] 6 = 1 \times 6 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 13 et 6 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $13u + 6v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 47. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 55 = 10 \times 5 + 5 \\[2ex] 10 = 5 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 5. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 55 et 10 est 5. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $55u + 10v = 5$, avec : $(u, v) = (1, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 48. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 3

$$\begin{cases} 32 & = & 6 \times 5 + 2 \\ 6 & = & 2 \times 3 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 32 et 6 est 2. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $32u + 6v = 2$, avec : $(u, v) = (1, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 49. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 13 & = & 11 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 11 & = & 2 \times 5 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 2 & = & 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 13 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $13u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 6 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $13u + 11v = 1$, avec : $(u, v) = (-5{,}6)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 50. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 40 & = & 17 \times 2 + 6 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 40 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\ 17 & = & 6 \times 2 + 5 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ 6 & = & 5 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 5 & = & 1 \times 5 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 40 et 17 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $40u + 17v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -7 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 17 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $40u + 17v = 1$, avec : $(u, v) = (3, -7)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 51. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 17 = 13 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ 13 = 4 \times 3 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 4 = 1 \times 4 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 17 et 13 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $17u + 13v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $17u + 13v = 1$, avec : $(u, v) = (-3, 4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 52. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 12 = 7 \times 1 + 5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ 7 = 5 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 5 = 2 \times 2 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 12 et 7 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $12u + 7v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -5\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1=\begin{pmatrix}3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 7\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $12u+7v=1$, avec : $(u,v)=(3,-5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 53. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 13 = 10\times 1+3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}13\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 3\end{pmatrix}\right)\\[2ex] 10 = 3\times 3+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}10\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\right)\\[2ex] 3 = 1\times 3+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 13 et 10 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $13u+10v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3 & 4\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1=\begin{pmatrix}-3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 10\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $13u+10v=1$, avec : $(u,v)=(-3{,}4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 54. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 13 = 9\times 1+4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}13\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ 4\end{pmatrix}\right)\\[2ex] 9 = 4\times 2+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}9\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\right)\\[2ex] 4 = 1\times 4+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 13 et 9 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $13u+9v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $13u + 9v = 1$, avec : $(u,v) = (-2{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 55. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 308 = 21 \times 14 + 14 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 308 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} \right) \\ 21 = 14 \times 1 + 7 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \\ 14 = 7 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 7. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 308 et 21 est 7. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $308u + 21v = 7$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 308 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 15 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $7 = \begin{pmatrix} -1 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 308 \\ 21 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $308u + 21v = 7$, avec : $(u,v) = (-1{,}15)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 56. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 192 = 13 \times 14 + 10 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 192 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \\ 13 = 10 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ 10 = 3 \times 3 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 3 = 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 192 et 13 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $192u + 13v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 192 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -59 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 4 & -59 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 192 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $192u + 13v = 1$, avec : $(u,v) = (4,-59)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 57. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 63 = 16 \times 3 + 15 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 63 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}\right) \\ 16 = 15 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 15 = 1 \times 15 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 63 et 16 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $63u + 16v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63 \\ 16 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $63u + 16v = 1$, avec : $(u, v) = (-1,4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 58. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 22 = 10 \times 2 + 2 \\ 10 = 2 \times 5 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 22 et 10 est 2. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $22u + 10v = 2$, avec : $(u, v) = (1, -2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 59. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 14 = 9 \times 1 + 5 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ 9 = 5 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ 5 = 4 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 4 = 1 \times 4 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 14 et 9 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $14u + 9v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $14u + 9v = 1$, avec : $(u,v) = (2,-3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 60. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 118 = 11 \times 10 + 8 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 118 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \\ 11 = 8 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 8 = 3 \times 2 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 3 = 2 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 118 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $118u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 118 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 43 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -4 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 118 \\ 11 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $118u + 11v = 1$, avec : $(u,v) = (-4{,}43)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 61. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 23 = 9 \times 2 + 5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ 9 = 5 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ 5 = 4 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 4 = 1 \times 4 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 23 et 9 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $23u + 9v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $23u + 9v = 1$, avec : $(u, v) = (2, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 62. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 31 = 10 \times 3 + 1 \\ 10 = 1 \times 10 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 31 et 10 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $31u + 10v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 63. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 24 = 16 \times 1 + 8 \\ 16 = 8 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 8. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 24 et 16 est 8. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $24u + 16v = 8$, avec : $(u, v) = (1, -1)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 64. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 17 = 12 \times 1 + 5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ 12 = 5 \times 2 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 5 = 2 \times 2 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 17 et 12 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $17u + 12v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -7 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $17u + 12v = 1$, avec : $(u, v) = (5, -7)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 65. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 38 = 20\times 1+18 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 38\\ 20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20\\ 18\end{pmatrix}\right) \\ 20 = 18\times 1+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 20\\ 18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18\\ 2\end{pmatrix}\right) \\ 18 = 2\times 9+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 18\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 38 et 20 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $38u+20v=2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 38\\ 20\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 38\\ 20\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $38u+20v=2$, avec : $(u,v)=(-1{,}2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 66. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 100 = 6\times 16+4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 100\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6\\ 4\end{pmatrix}\right) \\ 6 = 4\times 1+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 2\end{pmatrix}\right) \\ 4 = 2\times 2+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 100 et 6 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $100u+6v=2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -16\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100\\ 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 17\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -1 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100\\ 6\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $100u+6v=2$, avec : $(u,v)=(-1{,}17)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 67. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 4

$$\begin{cases} 166 = 32\times 5+6 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 166\\ 32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32\\ 6\end{pmatrix}\right) \\ 32 = 6\times 5+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 32\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6\\ 2\end{pmatrix}\right) \\ 6 = 2\times 3+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 166 et 32 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $166u + 32v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 166 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 26 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -5 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 166 \\ 32 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $166u + 32v = 2$, avec : $(u, v) = (-5{,}26)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 68. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{lll} 14 & = & 8 \times 1 + 6 \quad \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\ 8 & = & 6 \times 1 + 2 \quad \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 6 & = & 2 \times 3 + 0 \quad \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}\right.$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 14 et 8 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $14u + 8v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $14u + 8v = 2$, avec : $(u, v) = (-1{,}2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 69. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{lll} 131 & = & 19 \times 6 + 17 \quad \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 131 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix} \right) \\ 19 & = & 17 \times 1 + 2 \quad \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 17 & = & 2 \times 8 + 1 \quad \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 2 & = & 1 \times 2 + 0 \quad \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}\right.$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 131 et 19 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $131u + 19v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}131\\ 19\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-8 & 9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}9 & -62\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1=\begin{pmatrix}9 & -62\end{pmatrix}\begin{pmatrix}131\\ 19\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $131u+19v=1$, avec : $(u,v)=(9,-62)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 70. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases}19 &= 6\times 3+1\\ 6 &= 1\times 6+0\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 19 et 6 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $19u+6v=1$, avec : $(u,v)=(1,-3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 71. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases}303 = 8\times 37+7 & \left(\text{matriciellement : }\begin{pmatrix}303\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ 7\end{pmatrix}\right)\\ 8 = 7\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : }\begin{pmatrix}8\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}\right)\\ 7 = 1\times 7+0 & \left(\text{matriciellement : }\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 303 et 8 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $303u+8v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}303\\ 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 38\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1=\begin{pmatrix}-1 & 38\end{pmatrix}\begin{pmatrix}303\\ 8\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $303u+8v=1$, avec : $(u,v)=(-1{,}38)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 72. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases}16 = 13\times 1+3 & \left(\text{matriciellement : }\begin{pmatrix}16\\ 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 3\end{pmatrix}\right)\\ 13 = 3\times 4+1 & \left(\text{matriciellement : }\begin{pmatrix}13\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\right)\\ 3 = 1\times 3+0 & \left(\text{matriciellement : }\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 16 et 13 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $16u + 13v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $16u + 13v = 1$, avec : $(u, v) = (-4{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 73. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 68 = 23 \times 2 + 22 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 68 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix} \right) \\ 23 = 22 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 22 = 1 \times 22 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 68 et 23 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $68u + 23v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 23 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $68u + 23v = 1$, avec : $(u, v) = (-1{,}3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 74. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 12 = 10 \times 1 + 2 \\ 10 = 2 \times 5 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 12 et 10 est 2. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $12u + 10v = 2$, avec : $(u, v) = (1, -1)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 75. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je ← page 5

prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
46 & = & 12\times 3+10 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}46\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix}\right)\\[2ex]
12 & = & 10\times 1+2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}\right)\\[2ex]
10 & = & 2\times 5+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)
\end{array}\right.$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 46 et 12 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $46u+12v=2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}46\\12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&4\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2=\begin{pmatrix}-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}46\\12\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $46u+12v=2$, avec : $(u,v)=(-1,4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 76. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{lcll}
39 & = & 32\times 1+7 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}39\\32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\7\end{pmatrix}\right)\\[2ex]
32 & = & 7\times 4+4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}32\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}\right)\\[2ex]
7 & = & 4\times 1+3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right)\\[2ex]
4 & = & 3\times 1+1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)\\[2ex]
3 & = & 1\times 3+0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)
\end{array}\right.$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 39 et 32 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $39u+32v=1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\32\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&11\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1=\begin{pmatrix}-9&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\32\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $39u+32v=1$, avec : $(u,v)=(-9,11)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 77. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement ← page 5

trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement :

$$\begin{cases} 11 &= 6\times 1+5 \quad \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6\\ 5\end{pmatrix}\right) \\ 6 &= 5\times 1+1 \quad \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5\\ 1\end{pmatrix}\right) \\ 5 &= 1\times 5+0 \quad \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 11 et 6 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $11u + 6v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11\\ 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11\\ 6\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $11u + 6v = 1$, avec : $(u, v) = (-1{,}2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 78. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 23 &= 10\times 2+3 \quad \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 23\\ 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\\ 3\end{pmatrix}\right) \\ 10 &= 3\times 3+1 \quad \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 10\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 1\end{pmatrix}\right) \\ 3 &= 1\times 3+0 \quad \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 23 et 10 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $23u + 10v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23\\ 10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 7\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23\\ 10\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $23u + 10v = 1$, avec : $(u, v) = (-3{,}7)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 79. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je ← page 5

prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement :

$$\begin{cases} 17 = 7\times 2+3 & \left(\text{matriciellement}: \begin{pmatrix}17\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right) \\ 7 = 3\times 2+1 & \left(\text{matriciellement}: \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \\ 3 = 1\times 3+0 & \left(\text{matriciellement}: \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 17 et 7 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $17u + 7v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2 & 5\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix}-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\7\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $17u + 7v = 1$, avec : $(u,v) = (-2{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 80. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 73 = 8\times 9+1 \\ 8 = 1\times 8+0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 73 et 8 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $73u + 8v = 1$, avec : $(u,v) = (1,-9)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 81. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 51 = 30\times 1+21 & \left(\text{matriciellement}: \begin{pmatrix}51\\30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\21\end{pmatrix}\right) \\ 30 = 21\times 1+9 & \left(\text{matriciellement}: \begin{pmatrix}30\\21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21\\9\end{pmatrix}\right) \\ 21 = 9\times 2+3 & \left(\text{matriciellement}: \begin{pmatrix}21\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}\right) \\ 9 = 3\times 3+0 & \left(\text{matriciellement}: \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 3. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 51 et 30 est 3. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $51u + 30v = 3$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$3 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}51\\30\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3 & -5\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 51 \\ 30 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $51u + 30v = 3$, avec : $(u, v) = (3, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 82. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 70 = 15 \times 4 + 10 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 70 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \\ 15 = 10 \times 1 + 5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ 10 = 5 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 5. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 70 et 15 est 5. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $70u + 15v = 5$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $5 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 15 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $70u + 15v = 5$, avec : $(u, v) = (-1{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 83. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 13 = 8 \times 1 + 5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ 8 = 5 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ 5 = 3 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 3 = 2 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 13 et 8 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $13u + 8v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $13u + 8v = 1$, avec : $(u, v) = (-3{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 84. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 34 & = & 8 \times 4 + 2 \\ 8 & = & 2 \times 4 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 34 et 8 est 2. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $34u + 8v = 2$, avec : $(u, v) = (1, -4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 85. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 47 & = & 15 \times 3 + 2 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 47 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 15 & = & 2 \times 7 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 2 & = & 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 47 et 15 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $47u + 15v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 22 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -7 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47 \\ 15 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $47u + 15v = 1$, avec : $(u, v) = (-7{,}22)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 86. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 5

$$\begin{cases} 77 & = & 8 \times 9 + 5 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 77 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ 8 & = & 5 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 5 & = & 3 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 3 & = & 2 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 2 & = & 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 77 et 8 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $77u + 8v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique

en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 29 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -3 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 8 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $77u + 8v = 1$, avec : $(u, v) = (-3{,}29)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 87. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 16 = 13 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 13 = 3 \times 4 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 3 = 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 16 et 13 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $16u + 13v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $16u + 13v = 1$, avec : $(u, v) = (-4{,}5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 88. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 22 = 12 \times 1 + 10 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}\right) \\ 12 = 10 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 10 = 2 \times 5 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 22 et 12 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $22u + 12v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}22\\ 12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}22\\ 12\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $22u + 12v = 2$, avec : $(u,v) = (-1{,}2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 89. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 22 = 14 \times 1 + 8 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}22\\ 14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ 8\end{pmatrix}\right) \\ 14 = 8 \times 1 + 6 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}14\\ 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ 6\end{pmatrix}\right) \\ 8 = 6 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}8\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 2\end{pmatrix}\right) \\ 6 = 2 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}6\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 22 et 14 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $22u + 14v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}22\\ 14\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}22\\ 14\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $22u + 14v = 2$, avec : $(u,v) = (2,-3)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 90. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 236 = 13 \times 18 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}236\\ 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 2\end{pmatrix}\right) \\ 13 = 2 \times 6 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}13\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 236 et 13 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $236u + 13v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}236\\ 13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-6 & 109\end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -6 & 109 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 236 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $236u + 13v = 1$, avec : $(u, v) = (-6{,}109)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 91. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 147 & = & 6 \times 24 + 3 \\ 6 & = & 3 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 3. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 147 et 6 est 3. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $147u + 6v = 3$, avec : $(u, v) = (1, -24)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 92. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 15 & = & 11 \times 1 + 4 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ 11 & = & 4 \times 2 + 3 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 4 & = & 3 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 3 & = & 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 15 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $15u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $15u + 11v = 1$, avec : $(u, v) = (3, -4)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 93. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 65 & = & 12 \times 5 + 5 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 65 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ 12 & = & 5 \times 2 + 2 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ 5 & = & 2 \times 2 + 1 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 2 & = & 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 65 et 12 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $65u + 12v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique

en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -27 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 5 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 \\ 12 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $65u + 12v = 1$, avec : $(u, v) = (5, -27)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 94. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 21 = 14 \times 1 + 7 \\ 14 = 7 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 7. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 21 et 14 est 7. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $21u + 14v = 7$, avec : $(u, v) = (1, -1)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 95. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 14 = 8 \times 1 + 6 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\ 8 = 6 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 6 = 2 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 2. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 14 et 8 est 2. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $14u + 8v = 2$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $14u + 8v = 2$, avec : $(u, v) = (-1{,}2)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 96. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 36 = 7 \times 5 + 1 \\ 7 = 1 \times 7 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 36 et 7 est 1. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $36u + 7v = 1$, avec : $(u, v) = (1, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 97. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 105 = 11 \times 9 + 6 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 105 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \\ 11 = 6 \times 1 + 5 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ 6 = 5 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 5 = 1 \times 5 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 105 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $105u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 105 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -19 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 2 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 105 \\ 11 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $105u + 11v = 1$, avec : $(u, v) = (2, -19)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 98. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu. On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 77 = 14 \times 5 + 7 \\ 14 = 7 \times 2 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 7. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 77 et 14 est 7. De plus la première division euclidienne implique immédiatement : $77u + 14v = 7$, avec : $(u, v) = (1, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 99. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 18 = 7 \times 2 + 4 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ 7 = 4 \times 1 + 3 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ 4 = 3 \times 1 + 1 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 3 = 1 \times 3 + 0 & \left(\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 18 et 7 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $18u + 7v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique

en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $18u + 7v = 1$, avec : $(u, v) = (2, -5)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.

Corrigé 100. Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu (vu la taille des entiers, on pourrait éventuellement trouver une telle relation à l'œil nu ou rapidement à tâtons ; mais pour s'exercer à la pratique de l'algorithme je prétendrai que je n'ai rien vu). On trouve successivement : ← page 6

$$\begin{cases} 13 = 11 \times 1 + 2 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ 11 = 2 \times 5 + 1 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 2 = 1 \times 2 + 0 & \left(\text{matriciellement :} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est 1. On en déduit que le plus grand commun diviseur de 13 et 11 est 1. À présent, pour trouver des entiers u et v tels que : $13u + 11v = 1$, on suit la méthode exposée en entête des énoncés (j'indique en-dessous le résultat des multiplications successives du vecteur ligne tout à gauche par la matrice carrée en facteur, de proche en proche). Les relations matricielles ci-dessus impliquent :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 6 \end{pmatrix}$$

En résumé on a : $1 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $13u + 11v = 1$, avec : $(u, v) = (-5{,}6)$. On a trouvé la relation de Bézout demandée.