Manipuler la racine cubique j

💡 Savoir simplifier des expressions faisant intervenir le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. L'étudiant en exercice observera que finalement, l'expression sous forme algébrique de j sert assez peu (et même jamais si l'on se débrouille bien) tant que l'on effectue des calculs à base de sommes, produits, quotients, exponentiations : en peu de mots, quand on fait de l'algèbre. Tout découle de l'identité : $1+j+j^2=0$, dont il faut connaître la provenance.

Exercice 1. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-3\,j^2+j}{-2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 9

Exercice 2. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-3}{12\,j^2-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 9

Exercice 3. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{12}{2\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 9

Exercice 4. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j+1}{-j^2+j+7}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 10

Exercice 5. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j^2-3\,j+2}{-j^2-32\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 10

Exercice 6. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{-2\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 11

Exercice 7. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j+1}{-j-6}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 11

Exercice 8. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-17\,j^2+7\,j+1}{j+7}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 12

Exercice 9. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j^2-j}{-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 12

Exercice 10. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j-1}{-14\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 12

Exercice 11. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{2\,j^2+2\,j}{-j^2+j+13}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. → page 13

Exercice 12. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{-j-2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 13

Exercice 13. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2}{-2\,j^2 + 3\,j + 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 14

Exercice 14. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-8}{-j-19}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 14

Exercice 15. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 15

Exercice 16. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{5}{-j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 15

Exercice 17. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j^2+2}{6\,j^2 + 4\,j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 15

Exercice 18. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j+1}{9\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 16

Exercice 19. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 17

Exercice 20. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-8\,j^2 + j - 1}{1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 17

Exercice 21. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{2\,j^2 - j - 3}{-j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 17

Exercice 22. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-3\,j^2 - 4\,j - 1}{-j^2 - j - 3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 18

Exercice 23. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{6\,j^2 - 3\,j}{14}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 18

Exercice 24. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-4\,j^2 - 5\,j + 4}{-j+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 18

Exercice 25. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{4}{-3\,j^2 - j + 2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 18

Exercice 26. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{2\,j^2 - j}{3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 19

Exercice 27. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-51\,j + 1}{-j + 9}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 19

Exercice 28. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2 + j + 3}{-j + 6}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 20

Exercice 29. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{2\,j^2}{-3\,j^2 + 2\,j + 4}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 20

Exercice 30. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2}{-2\,j - 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 21

Exercice 31. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j + 2}{-2\,j^2 + 7}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 21

Exercice 32. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{363}{-2\,j^2 - 4\,j + 2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 22

Exercice 33. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j^2 + 23\,j - 2}{2\,j^2 - 2\,j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 22

Exercice 34. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{2\,j^2 - 10\,j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 23

Exercice 35. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{8\,j^2 - j}{j + 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 23

Exercice 36. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2 - j - 1}{-2\,j^2 + j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 24

Exercice 37. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-7\,j^2 + 4}{j^2 - 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 25

Exercice 38. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2\,j}{7\,j^2+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 25

Exercice 39. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{7\,j^2+j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 26

Exercice 40. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2-7\,j-6}{2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 26

Exercice 41. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j^2+2\,j+1}{5\,j-4}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 26

Exercice 42. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-8\,j-1}{-j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 27

Exercice 43. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{13}{-j^2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 27

Exercice 44. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j+2}{2\,j-3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 28

Exercice 45. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-5\,j-11}{j^2+j-3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 28

Exercice 46. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j-1}{-92\,j^2-2\,j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 28

Exercice 47. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j+2}{-5\,j^2-7\,j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 29

Exercice 48. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2+8\,j-2}{-17\,j^2-j+5}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 29

Exercice 49. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-5}{-3\,j^2+j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 30

Exercice 50. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{4\,j^2+11}{1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 30

Exercice 51. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{56\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 31

Exercice 52. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{7\,j^2}{-4\,j^2+j-20}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 31

Exercice 53. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{22}{-j+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 32

Exercice 54. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{5\,j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j+\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 32

Exercice 55. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{-j+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 32

Exercice 56. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{7}{43\,j^2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 33

Exercice 57. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{3}{-j^2-j+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 33

Exercice 58. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2\,j^2+3\,j+1}{-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 33

Exercice 59. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{2}{j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 33

Exercice 60. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{-j^2+j+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 34

Exercice 61. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{12}{2\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 34

Exercice 62. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j+1}{j^2+j-4}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 35

Exercice 63. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-8}{-j+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 35

Exercice 64. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{-j-2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 35

Exercice 65. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-3}{8\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 36

Exercice 66. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j^2+j-1}{-10\,j+4}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 36

Exercice 67. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2\,j^2-43\,j+1}{-3\,j^2-j+3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 37

Exercice 68. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2-j+3}{-12}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 37

Exercice 69. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2}{j-6}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 37

Exercice 70. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{-j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 38

Exercice 71. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2-2\,j+1}{-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 38

Exercice 72. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2}{j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 39

Exercice 73. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{3}{-j-2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 39

Exercice 74. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{6}{3\,j-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 39

Exercice 75. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2+j-1}{3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 40

Exercice 76. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{2\,j+1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 40

Exercice 77. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-19\,j}{j-33}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 40

Exercice 78. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{2\,j}{-3\,j^2 - j + 3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 41

Exercice 79. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2 - 55\,j + 1}{-5}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 41

Exercice 80. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-3}{j^2 - j + 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 41

Exercice 81. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{2\,j^2 - 2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 42

Exercice 82. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{12}{6\,j + 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 43

Exercice 83. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{2\,j^2 + j + 2}{1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 43

Exercice 84. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{60\,j^2 + 3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 43

Exercice 85. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{7\,j^2 + 9}{-2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 44

Exercice 86. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2 + 122\,j + 1}{j + 3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 44

Exercice 87. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2\,j^2 + 3\,j - 1}{-1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 44

Exercice 88. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2}{-4\,j^2 + j - 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 45

Exercice 89. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-15\,j^2 + 3\,j}{2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 45

Exercice 90. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{-2\,j^2 + j - 3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 45

Exercice 91. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j^2 + 3\,j - 3}{j^2 + 2\,j - 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 46

Exercice 92. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{9\,j^2 - j}{-j + 5}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 47

Exercice 93. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2\,j}{j^2 - 2\,j + 3}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 47

Exercice 94. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-j^2 - 1}{j^2 + 2\,j - 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 48

Exercice 95. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2\,j^2 + j + 1}{2}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 48

Exercice 96. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{j + 2}{2\,j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 48

Exercice 97. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{-j}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 49

Exercice 98. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{1}{j^2 + j - 1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 49

Exercice 99. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-2\,j^2 - 4\,j}{1}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 49

Exercice 100. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier : $\dfrac{-1}{j - 5}$, en mettant cette quantité sous la forme : $\alpha j + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. → page 49

Corrigé 1. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 1

$$\frac{-3\,j^2+j}{-2} = -2\,j - \frac{3}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 2. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 1

$$\frac{-3}{12\,j^2-1} = \frac{-3}{-12\,j-13}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-12\,\overline{j}-13$. On obtient :

$$\frac{-3}{12\,j^2-1} = \frac{36\,\overline{j}+39}{(12\,j+13)\left(12\,\overline{j}+13\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(12\,j+13)\left(12\,\overline{j}+13\right) = 144\,j\overline{j} + 156\,j + 156\,\overline{j} + 169 = 157.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(12\,j+13)\left(12\,\overline{j}+13\right) = |-12\,j-13|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-3}{12\,j^2-1} = -\frac{36}{157}\,j + \frac{3}{157}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 3. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}-1$. On obtient : ← page 1

$$\frac{12}{2\,j-1} = \frac{24\,\overline{j}-12}{(2\,j-1)\left(2\,\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j-1)\left(2\,\overline{j}-1\right) = 4\,j\overline{j} - 2\,j - 2\,\overline{j} + 1 = 7.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j-1)\left(2\,\overline{j}-1\right) = |2\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à

l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{12}{2\,j-1} = -\frac{24}{7}\,j - \frac{36}{7}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 4. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \frac{j^3-1}{j-1} = \frac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 1

$$\frac{j+1}{-j^2+j+7} = \frac{j+1}{2\,j+8}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+8$. On obtient :

$$\frac{j+1}{-j^2+j+7} = \frac{2\,(j+1)\left(\overline{j}+4\right)}{4\,(j+4)\left(\overline{j}+4\right)} = \frac{2\,j\overline{j}+8\,j+2\,\overline{j}+8}{4\,(j+4)\left(\overline{j}+4\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j+4)\left(\overline{j}+4\right) = 4\,j\overline{j}+16\,j+16\,\overline{j}+64 = 52.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j+4)\left(\overline{j}+4\right) = |2\,j+8|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j+1}{-j^2+j+7} = \frac{3}{26}\,j + \frac{2}{13}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 5. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \frac{j^3-1}{j-1} = \frac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 1

$$\frac{j^2-3\,j+2}{-j^2-32\,j-1} = \frac{-4\,j+1}{-31\,j}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-31\,\overline{j}$. On obtient :

$$\frac{j^2-3\,j+2}{-j^2-32\,j-1} = \frac{31\,(4\,j-1)\overline{j}}{961\,j\overline{j}} = \frac{124\,j\overline{j}-31\,\overline{j}}{961\,j\overline{j}}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$961\, j\overline{j} = 961.$$

Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j^2 - 3\,j + 2}{-j^2 - 32\,j - 1} = \frac{1}{31}\,j + \frac{5}{31}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 6. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-2\,\overline{j} - 1$. On obtient : ← page 1

$$\frac{1}{-2\,j - 1} = \frac{-2\,\overline{j} - 1}{(2\,j + 1)\left(2\,\overline{j} + 1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(2\,j + 1)\left(2\,\overline{j} + 1\right) = 4\,j\overline{j} + 2\,j + 2\,\overline{j} + 1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j + 1)\left(2\,\overline{j} + 1\right) = |-2\,j - 1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{-2\,j - 1} = \frac{2}{3}\,j + \frac{1}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 7. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j} - 6$. On obtient : ← page 1

$$\frac{-j + 1}{-j - 6} = \frac{(j - 1)\left(\overline{j} + 6\right)}{(j + 6)\left(\overline{j} + 6\right)} = \frac{j\overline{j} + 6\,j - \overline{j} - 6}{(j + 6)\left(\overline{j} + 6\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(j + 6)\left(\overline{j} + 6\right) = j\overline{j} + 6\,j + 6\,\overline{j} + 36 = 31.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j + 6)\left(\overline{j} + 6\right) = |-j - 6|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j + 1}{-j - 6} = \frac{7}{31}\,j - \frac{4}{31}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 8. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 1

$$\frac{-17\,j^2+7\,j+1}{j+7} = \frac{24\,j+18}{j+7}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}+7$. On obtient :

$$\frac{-17\,j^2+7\,j+1}{j+7} = \frac{6\,(4\,j+3)\left(\overline{j}+7\right)}{(j+7)\left(\overline{j}+7\right)} = \frac{24\,j\overline{j}+168\,j+18\,\overline{j}+126}{(j+7)\left(\overline{j}+7\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+7)\left(\overline{j}+7\right) = j\overline{j}+7\,j+7\,\overline{j}+49 = 43.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+7)\left(\overline{j}+7\right) = |j+7|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-17\,j^2+7\,j+1}{j+7} = \frac{150}{43}\,j+\frac{132}{43}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 9. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 1

$$\frac{j^2-j}{-1} = 2\,j+1.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 10. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-14\,\overline{j}-1$. On obtient : ← page 1

$$\frac{j-1}{-14\,j-1} = \frac{-(j-1)\left(14\,\overline{j}+1\right)}{(14\,j+1)\left(14\,\overline{j}+1\right)} = \frac{-14\,j\overline{j}-j+14\,\overline{j}+1}{(14\,j+1)\left(14\,\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(14\,j+1)\left(14\,\overline{j}+1\right) = 196\,j\overline{j}+14\,j+14\,\overline{j}+1 = 183.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(14\,j+1)\left(14\,\overline{j}+1\right) = |-14\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j-1}{-14\,j-1} = -\frac{5}{61}\,j - \frac{9}{61}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 11. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 1

$$\frac{2\,j^2+2\,j}{-j^2+j+13} = \frac{-2}{2\,j+14}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+14$. On obtient :

$$\frac{2\,j^2+2\,j}{-j^2+j+13} = \frac{-4\,\overline{j}-28}{4\,(j+7)\left(\overline{j}+7\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j+7)\left(\overline{j}+7\right) = 4\,j\overline{j} + 28\,j + 28\,\overline{j} + 196 = 172.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j+7)\left(\overline{j}+7\right) = |2\,j+14|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{2\,j^2+2\,j}{-j^2+j+13} = \frac{1}{43}\,j - \frac{6}{43}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 12. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}-2$. On obtient : ← page 2

$$\frac{-1}{-j-2} = \frac{\overline{j}+2}{(j+2)\left(\overline{j}+2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+2)\left(\overline{j}+2\right) = j\overline{j} + 2\,j + 2\,\overline{j} + 4 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+2)\left(\overline{j}+2\right) = |-j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{-j-2} = -\frac{1}{3}\,j + \frac{1}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 13. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 2

$$\frac{-2}{-2\,j^2+3\,j+1} = \frac{-2}{5\,j+3}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $5\,\overline{j}+3$. On obtient :

$$\frac{-2}{-2\,j^2+3\,j+1} = \frac{-10\,\overline{j}-6}{(5\,j+3)\left(5\,\overline{j}+3\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(5\,j+3)\left(5\,\overline{j}+3\right) = 25\,j\overline{j}+15\,j+15\,\overline{j}+9 = 19.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(5\,j+3)\left(5\,\overline{j}+3\right) = |5\,j+3|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-2}{-2\,j^2+3\,j+1} = \frac{10}{19}\,j + \frac{4}{19}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 14. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}-19$. On obtient : ← page 2

$$\frac{-8}{-j-19} = \frac{8\,\overline{j}+152}{(j+19)\left(\overline{j}+19\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+19)\left(\overline{j}+19\right) = j\overline{j}+19\,j+19\,\overline{j}+361 = 343.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+19)\left(\overline{j}+19\right) = |-j-19|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-8}{-j-19} = -\frac{8}{343}\,j + \frac{144}{343}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 15. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}-1$. On obtient : ← page 2

$$\frac{-1}{j-1} = \frac{-\overline{j}+1}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = j\overline{j} - j - \overline{j} + 1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = |j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{j-1} = \frac{1}{3}\,j + \frac{2}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 16. On a : $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$, donc : $\dfrac{1}{j} = j^2$. On en déduit : ← page 2

$$\frac{5}{-j} = -5\,j^2.$$

Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi :

$$\frac{5}{-j} = 5\,j + 5.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 17. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs ← page 2

d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi :

$$\frac{j^2+2}{6\,j^2+4\,j}=\frac{-j+1}{-2\,j-6}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-2\,\overline{j}-6$. On obtient :

$$\frac{j^2+2}{6\,j^2+4\,j}=\frac{2\,(j-1)\left(\overline{j}+3\right)}{4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}=\frac{2\,j\overline{j}+6\,j-2\,\overline{j}-6}{4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=4\,j\overline{j}+12\,j+12\,\overline{j}+36=28.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=|-2\,j-6|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j^2+2}{6\,j^2+4\,j}=\frac{2}{7}\,j-\frac{1}{14}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 18. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $9\,\overline{j}-1$. On obtient : ← page 2

$$\frac{j+1}{9\,j-1}=\frac{(j+1)\left(9\,\overline{j}-1\right)}{(9\,j-1)\left(9\,\overline{j}-1\right)}=\frac{9\,j\overline{j}-j+9\,\overline{j}-1}{(9\,j-1)\left(9\,\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(9\,j-1)\left(9\,\overline{j}-1\right)=81\,j\overline{j}-9\,j-9\,\overline{j}+1=91.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(9\,j-1)\left(9\,\overline{j}-1\right)=|9\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j+1}{9\,j-1}=-\frac{10}{91}\,j-\frac{1}{91}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 19. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}-1$. On obtient : ← page 2

$$\frac{-1}{j-1}=\frac{-\overline{j}+1}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-1)\left(\overline{j}-1\right)=j\overline{j}-j-\overline{j}+1=3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-1)\left(\overline{j}-1\right)=|j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{j-1}=\frac{1}{3}\,j+\frac{2}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 20. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 2

$$\frac{-8\,j^2+j-1}{1}=9\,j+7.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 21. On a : $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$, donc : $\dfrac{1}{j}=j^2$. On en déduit : ← page 2

$$\frac{2\,j^2-j-3}{-j}=-2\,j^4+j^3+3\,j^2.$$

Ensuite, encore en utilisant le fait que $j^3=1$, on peut simplifier cette expression et obtenir :

$$\frac{2\,j^2-j-3}{-j}=3\,j^2-2\,j+1.$$

Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi :

$$\frac{2\,j^2-j-3}{-j}=-5\,j-2.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 22. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 2

$$\frac{-3\,j^2-4\,j-1}{-j^2-j-3} = \frac{1}{2}\,j-1.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 23. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 2

$$\frac{6\,j^2-3\,j}{14} = -\frac{9}{14}\,j-\frac{3}{7}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 24. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 2

$$\frac{-4\,j^2-5\,j+4}{-j+1} = \frac{-j+8}{-j+1}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}+1$. On obtient :

$$\frac{-4\,j^2-5\,j+4}{-j+1} = \frac{(j-8)\left(\overline{j}-1\right)}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)} = \frac{j\overline{j}-j-8\,\overline{j}+8}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = j\overline{j}-j-\overline{j}+1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = |-j+1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.) Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-4\,j^2-5\,j+4}{-j+1} = \frac{7}{3}\,j+\frac{17}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 25. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs ← page 3

d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi :

$$\frac{4}{-3\,j^2-j+2}=\frac{4}{2\,j+5}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+5$. On obtient :

$$\frac{4}{-3\,j^2-j+2}=\frac{8\,\overline{j}+20}{(2\,j+5)\left(2\,\overline{j}+5\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j+5)\left(2\,\overline{j}+5\right)=4\,j\overline{j}+10\,j+10\,\overline{j}+25=19.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j+5)\left(2\,\overline{j}+5\right)=|2\,j+5|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{4}{-3\,j^2-j+2}=-\frac{8}{19}\,j+\frac{12}{19}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 26. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{2\,j^2-j}{3}=-j-\frac{2}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 27. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}+9$. On obtient : ← page 3

$$\frac{-51\,j+1}{-j+9}=\frac{(51\,j-1)\left(\overline{j}-9\right)}{(j-9)\left(\overline{j}-9\right)}=\frac{51\,j\overline{j}-459\,j-\overline{j}+9}{(j-9)\left(\overline{j}-9\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-9)\left(\overline{j}-9\right)=j\overline{j}-9\,j-9\,\overline{j}+81=91.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-9)\left(\overline{j}-9\right)=|-j+9|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-51\,j+1}{-j+9}=-\frac{458}{91}\,j+\frac{61}{91}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 28. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{-j^2+j+3}{-j+6} = \frac{2\,j+4}{-j+6}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}+6$. On obtient :

$$\frac{-j^2+j+3}{-j+6} = \frac{-2\,(j+2)\left(\overline{j}-6\right)}{(j-6)\left(\overline{j}-6\right)} = \frac{-2\,j\overline{j}+12\,j-4\,\overline{j}+24}{(j-6)\left(\overline{j}-6\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-6)\left(\overline{j}-6\right) = j\overline{j}-6\,j-6\,\overline{j}+36 = 43.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-6)\left(\overline{j}-6\right) = |-j+6|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.) Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j^2+j+3}{-j+6} = \frac{16}{43}\,j + \frac{26}{43}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 29. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{2\,j^2}{-3\,j^2+2\,j+4} = \frac{-2\,j-2}{5\,j+7}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $5\,\overline{j}+7$. On obtient :

$$\frac{2\,j^2}{-3\,j^2+2\,j+4} = \frac{-2\,(j+1)\left(5\,\overline{j}+7\right)}{(5\,j+7)\left(5\,\overline{j}+7\right)} = \frac{-10\,j\overline{j}-14\,j-10\,\overline{j}-14}{(5\,j+7)\left(5\,\overline{j}+7\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(5\,j+7)\left(5\,\overline{j}+7\right) = 25\,j\overline{j}+35\,j+35\,\overline{j}+49 = 39.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(5\,j+7)\left(5\,\overline{j}+7\right) = |5\,j+7|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à

l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{2\,j^2}{-3\,j^2+2\,j+4} = -\frac{4}{39}\,j - \frac{14}{39}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 30. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-2\,\overline{j}-1$. On obtient : ← page 3

$$\frac{-2}{-2\,j-1} = \frac{4\,\overline{j}+2}{(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right) = 4\,j\overline{j} + 2\,j + 2\,\overline{j} + 1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right) = |-2\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-2}{-2\,j-1} = -\frac{4}{3}\,j - \frac{2}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 31. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{-j+2}{-2\,j^2+7} = \frac{-j+2}{2\,j+9}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+9$. On obtient :

$$\frac{-j+2}{-2\,j^2+7} = \frac{-(j-2)\left(2\,\overline{j}+9\right)}{(2\,j+9)\left(2\,\overline{j}+9\right)} = \frac{-2\,j\overline{j} - 9\,j + 4\,\overline{j} + 18}{(2\,j+9)\left(2\,\overline{j}+9\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j+9)\left(2\,\overline{j}+9\right) = 4\,j\overline{j} + 18\,j + 18\,\overline{j} + 81 = 67.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j+9)\left(2\,\overline{j}+9\right) = |2\,j+9|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à

l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j+2}{-2\,j^2+7} = -\frac{13}{67}\,j + \frac{12}{67}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 32. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{363}{-2\,j^2-4\,j+2} = \frac{363}{-2\,j+4}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-2\,\overline{j}+4$. On obtient :

$$\frac{363}{-2\,j^2-4\,j+2} = \frac{-726\,\overline{j}+1452}{4\,(j-2)\Big(\overline{j}-2\Big)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j-2)\Big(\overline{j}-2\Big) = 4\,j\overline{j} - 8\,j - 8\,\overline{j} + 16 = 28.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j-2)\Big(\overline{j}-2\Big) = |-2\,j+4|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{363}{-2\,j^2-4\,j+2} = \frac{363}{14}\,j + \frac{1089}{14}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 33. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{j^2+23\,j-2}{2\,j^2-2\,j} = \frac{22\,j-3}{-4\,j-2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-4\,\overline{j}-2$. On obtient :

$$\frac{j^2+23\,j-2}{2\,j^2-2\,j} = \frac{-2\,(22\,j-3)\Big(2\,\overline{j}+1\Big)}{4\,(2\,j+1)\Big(2\,\overline{j}+1\Big)} = \frac{-88\,j\overline{j} - 44\,j + 12\,\overline{j} + 6}{4\,(2\,j+1)\Big(2\,\overline{j}+1\Big)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$4\,(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right) = 16\,j\overline{j} + 8\,j + 8\,\overline{j} + 4 = 12.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right) = |-4\,j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j^2 + 23\,j - 2}{2\,j^2 - 2\,j} = -\frac{14}{3}\,j - \frac{47}{6}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 34. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = \dfrac{e^{2i\pi} - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{1}{2\,j^2 - 10\,j} = \frac{1}{-12\,j - 2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-12\,\overline{j} - 2$. On obtient :

$$\frac{1}{2\,j^2 - 10\,j} = \frac{-12\,\overline{j} - 2}{4\,(6\,j+1)\left(6\,\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$4\,(6\,j+1)\left(6\,\overline{j}+1\right) = 144\,j\overline{j} + 24\,j + 24\,\overline{j} + 4 = 124.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(6\,j+1)\left(6\,\overline{j}+1\right) = |-12\,j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{2\,j^2 - 10\,j} = \frac{3}{31}\,j + \frac{5}{62}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 35. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = \dfrac{e^{2i\pi} - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{8\,j^2 - j}{j+1} = \frac{-9\,j - 8}{j+1}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}+1$. On obtient :

$$\frac{8\,j^2-j}{j+1}=\frac{-(9\,j+8)\left(\overline{j}+1\right)}{(j+1)\left(\overline{j}+1\right)}=\frac{-9\,j\overline{j}-9\,j-8\,\overline{j}-8}{(j+1)\left(\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+1)\left(\overline{j}+1\right)=j\overline{j}+j+\overline{j}+1=1.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+1)\left(\overline{j}+1\right)=|j+1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{8\,j^2-j}{j+1}=-j-9.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 36. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{-j^2-j-1}{-2\,j^2+j}=\frac{0}{3\,j+2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $3\,\overline{j}+2$. On obtient :

$$\frac{-j^2-j-1}{-2\,j^2+j}=\frac{0}{(3\,j+2)\left(3\,\overline{j}+2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(3\,j+2)\left(3\,\overline{j}+2\right)=9\,j\overline{j}+6\,j+6\,\overline{j}+4=7.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(3\,j+2)\left(3\,\overline{j}+2\right)=|3\,j+2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j^2-j-1}{-2\,j^2+j}=0.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 37. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 3

$$\frac{-7\,j^2+4}{j^2-1}=\frac{7\,j+11}{-j-2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}-2$. On obtient :

$$\frac{-7\,j^2+4}{j^2-1}=\frac{-(7\,j+11)\left(\overline{j}+2\right)}{(j+2)\left(\overline{j}+2\right)}=\frac{-7\,j\overline{j}-14\,j-11\,\overline{j}-22}{(j+2)\left(\overline{j}+2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+2)\left(\overline{j}+2\right)=j\overline{j}+2\,j+2\,\overline{j}+4=3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+2)\left(\overline{j}+2\right)=|-j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.) Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-7\,j^2+4}{j^2-1}=-j-6.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 38. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{-2\,j}{7\,j^2+1}=\frac{-2\,j}{-7\,j-6}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-7\,\overline{j}-6$. On obtient :

$$\frac{-2\,j}{7\,j^2+1}=\frac{2\,j\left(7\,\overline{j}+6\right)}{(7\,j+6)\left(7\,\overline{j}+6\right)}=\frac{14\,j\overline{j}+12\,j}{(7\,j+6)\left(7\,\overline{j}+6\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(7\,j+6)\left(7\,\overline{j}+6\right)=49\,j\overline{j}+42\,j+42\,\overline{j}+36=43.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(7\,j+6)\left(7\,\overline{j}+6\right)=|-7\,j-6|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à

l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-2\,j}{7\,j^2+1} = \frac{12}{43}\,j + \frac{14}{43}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 39. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{1}{7\,j^2+j-1} = \frac{1}{-6\,j-8}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-6\,\overline{j}-8$. On obtient :

$$\frac{1}{7\,j^2+j-1} = \frac{-6\,\overline{j}-8}{4\,(3\,j+4)\left(3\,\overline{j}+4\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(3\,j+4)\left(3\,\overline{j}+4\right) = 36\,j\overline{j} + 48\,j + 48\,\overline{j} + 64 = 52.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(3\,j+4)\left(3\,\overline{j}+4\right) = |-6\,j-8|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{7\,j^2+j-1} = \frac{3}{26}\,j - \frac{1}{26}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 40. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{-j^2-7\,j-6}{2} = -3\,j - \frac{5}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 41. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{j^2+2\,j+1}{5\,j-4} = \frac{j}{5\,j-4}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $5\,\overline{j}-4$. On obtient :

$$\frac{j^2+2\,j+1}{5\,j-4}=\frac{j\left(5\,\overline{j}-4\right)}{(5\,j-4)\left(5\,\overline{j}-4\right)}=\frac{5\,j\overline{j}-4\,j}{(5\,j-4)\left(5\,\overline{j}-4\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(5\,j-4)\left(5\,\overline{j}-4\right)=25\,j\overline{j}-20\,j-20\,\overline{j}+16=61.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(5\,j-4)\left(5\,\overline{j}-4\right)=|5\,j-4|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j^2+2\,j+1}{5\,j-4}=-\frac{4}{61}\,j+\frac{5}{61}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 42. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}-1$. On obtient : ← page 4

$$\frac{-8\,j-1}{-j-1}=\frac{(8\,j+1)\left(\overline{j}+1\right)}{(j+1)\left(\overline{j}+1\right)}=\frac{8\,j\overline{j}+8\,j+\overline{j}+1}{(j+1)\left(\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+1)\left(\overline{j}+1\right)=j\overline{j}+j+\overline{j}+1=1.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+1)\left(\overline{j}+1\right)=|-j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-8\,j-1}{-j-1}=7\,j+8.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 43. On a : $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$, donc : $\dfrac{1}{j}=j^2$. On en déduit : ← page 4

$$\frac{13}{-j^2}=-13\,j^4.$$

Ensuite, encore en utilisant le fait que $j^3=1$, on peut simplifier cette expression et obtenir :

$$\frac{13}{-j^2}=-13\,j.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 44. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}-3$. On obtient : ← page 4

$$\frac{j+2}{2\,j-3}=\frac{(j+2)\left(2\,\overline{j}-3\right)}{(2\,j-3)\left(2\,\overline{j}-3\right)}=\frac{2\,j\overline{j}-3\,j+4\,\overline{j}-6}{(2\,j-3)\left(2\,\overline{j}-3\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j-3)\left(2\,\overline{j}-3\right)=4\,j\overline{j}-6\,j-6\,\overline{j}+9=19.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j-3)\left(2\,\overline{j}-3\right)=|2\,j-3|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j+2}{2\,j-3}=-\frac{7}{19}\,j-\frac{8}{19}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 45. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{-5\,j-11}{j^2+j-3}=\frac{5}{4}\,j+\frac{11}{4}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 46. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{j-1}{-92\,j^2-2\,j}=\frac{j-1}{90\,j+92}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $90\,\overline{j}+92$. On obtient :

$$\frac{j-1}{-92\,j^2-2\,j}=\frac{2\,(j-1)\left(45\,\overline{j}+46\right)}{4\,(45\,j+46)\left(45\,\overline{j}+46\right)}=\frac{90\,j\overline{j}+92\,j-90\,\overline{j}-92}{4\,(45\,j+46)\left(45\,\overline{j}+46\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(45\,j+46)\left(45\,\overline{j}+46\right)=8100\,j\overline{j}+8280\,j+8280\,\overline{j}+8464=8284.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(45\,j+46)\left(45\,\overline{j}+46\right) = |90\,j+92|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j-1}{-92\,j^2-2\,j} = \frac{91}{4142}\,j + \frac{22}{2071}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 47. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{-j+2}{-5\,j^2-7\,j} = \frac{-j+2}{-2\,j+5}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-2\,\overline{j}+5$. On obtient :

$$\frac{-j+2}{-5\,j^2-7\,j} = \frac{(j-2)\left(2\,\overline{j}-5\right)}{(2\,j-5)\left(2\,\overline{j}-5\right)} = \frac{2\,j\overline{j}-5\,j-4\,\overline{j}+10}{(2\,j-5)\left(2\,\overline{j}-5\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j-5)\left(2\,\overline{j}-5\right) = 4\,j\overline{j}-10\,j-10\,\overline{j}+25 = 39.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j-5)\left(2\,\overline{j}-5\right) = |-2\,j+5|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j+2}{-5\,j^2-7\,j} = -\frac{1}{39}\,j + \frac{16}{39}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 48. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{-j^2+8\,j-2}{-17\,j^2-j+5} = \frac{9\,j-1}{16\,j+22}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $16\,\overline{j}+22$. On obtient :

$$\frac{-j^2+8\,j-2}{-17\,j^2-j+5} = \frac{2\,(9\,j-1)\left(8\,\overline{j}+11\right)}{4\,(8\,j+11)\left(8\,\overline{j}+11\right)} = \frac{144\,j\overline{j}+198\,j-16\,\overline{j}-22}{4\,(8\,j+11)\left(8\,\overline{j}+11\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$4\,(8\,j + 11)\left(8\,\overline{j} + 11\right) = 256\,j\overline{j} + 352\,j + 352\,\overline{j} + 484 = 388.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(8\,j + 11)\left(8\,\overline{j} + 11\right) = |16\,j + 22|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j^2 + 8\,j - 2}{-17\,j^2 - j + 5} = \frac{107}{194}\,j + \frac{69}{194}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 49. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = \dfrac{e^{2i\pi} - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{-5}{-3\,j^2 + j - 1} = \frac{-5}{4\,j + 2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $4\,\overline{j} + 2$. On obtient :

$$\frac{-5}{-3\,j^2 + j - 1} = \frac{-20\,\overline{j} - 10}{4\,(2\,j + 1)\left(2\,\overline{j} + 1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$4\,(2\,j + 1)\left(2\,\overline{j} + 1\right) = 16\,j\overline{j} + 8\,j + 8\,\overline{j} + 4 = 12.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(2\,j + 1)\left(2\,\overline{j} + 1\right) = |4\,j + 2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-5}{-3\,j^2 + j - 1} = \frac{5}{3}\,j + \frac{5}{6}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 50. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = \dfrac{e^{2i\pi} - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 4

$$\frac{4\,j^2 + 11}{1} = -4\,j + 7.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 51. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $56\,\overline{j}-1$. On obtient : ← page 5

$$\frac{1}{56\,j-1}=\frac{56\,\overline{j}-1}{(56\,j-1)\left(56\,\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(56\,j-1)\left(56\,\overline{j}-1\right)=3136\,j\overline{j}-56\,j-56\,\overline{j}+1=3193.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(56\,j-1)\left(56\,\overline{j}-1\right)=|56\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{56\,j-1}=-\frac{56}{3193}\,j-\frac{57}{3193}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 52. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 5

$$\frac{7\,j^2}{-4\,j^2+j-20}=\frac{-7\,j-7}{5\,j-16}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $5\,\overline{j}-16$. On obtient :

$$\frac{7\,j^2}{-4\,j^2+j-20}=\frac{-7\,(j+1)\left(5\,\overline{j}-16\right)}{(5\,j-16)\left(5\,\overline{j}-16\right)}=\frac{-35\,j\overline{j}+112\,j-35\,\overline{j}+112}{(5\,j-16)\left(5\,\overline{j}-16\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(5\,j-16)\left(5\,\overline{j}-16\right)=25\,j\overline{j}-80\,j-80\,\overline{j}+256=361.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(5\,j-16)\left(5\,\overline{j}-16\right)=|5\,j-16|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{7\,j^2}{-4\,j^2+j-20}=\frac{147}{361}\,j+\frac{112}{361}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 53. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}+1$. On obtient : ← page 5

$$\frac{22}{-j+1} = \frac{-22\,\overline{j}+22}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = j\overline{j} - j - \overline{j} + 1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = |-j+1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.) Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{22}{-j+1} = \frac{22}{3}\,j + \frac{44}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 54. On a : $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$, donc : $\dfrac{1}{j} = j^2$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{1}{5\,j} = \frac{1}{5}\,j^2.$$

Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi :

$$\frac{1}{5\,j} = -\frac{1}{5}\,j - \frac{1}{5}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 55. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}+1$. On obtient : ← page 5

$$\frac{-1}{-j+1} = \frac{\overline{j}-1}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = j\overline{j} - j - \overline{j} + 1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-1)\left(\overline{j}-1\right)=\left|-j+1\right|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.) Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{-j+1}=-\frac{1}{3}\,j-\frac{2}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 56. On a : $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$, donc : $\frac{1}{j}=j^2$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{7}{43\,j^2}=\frac{7}{43}\,j^4.$$

Ensuite, encore en utilisant le fait que $j^3=1$, on peut simplifier cette expression et obtenir :

$$\frac{7}{43\,j^2}=\frac{7}{43}\,j.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 57. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\frac{j^3-1}{j-1}=\frac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 5

$$\frac{3}{-j^2-j+1}=\frac{3}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 58. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\frac{j^3-1}{j-1}=\frac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 5

$$\frac{-2\,j^2+3\,j+1}{-1}=-5\,j-3.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 59. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}-1$. On obtient : ← page 5

$$\frac{2}{j-1}=\frac{2\,\overline{j}-2}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-1)\left(\overline{j}-1\right)=j\overline{j}-j-\overline{j}+1=3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-1)\left(\overline{j}-1\right)=|j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{2}{j-1}=-\frac{2}{3}\,j-\frac{4}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 60. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 5

$$\frac{-1}{-j^2+j+1}=\frac{-1}{2\,j+2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+2$. On obtient :

$$\frac{-1}{-j^2+j+1}=\frac{-2\,\overline{j}-2}{4\,(j+1)\left(\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j+1)\left(\overline{j}+1\right)=4\,j\overline{j}+4\,j+4\,\overline{j}+4=4.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j+1)\left(\overline{j}+1\right)=|2\,j+2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{-j^2+j+1}=\frac{1}{2}\,j.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 61. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}-1$. On obtient : ← page 5

$$\frac{12}{2\,j-1}=\frac{24\,\overline{j}-12}{(2\,j-1)\left(2\,\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j-1)\left(2\,\overline{j}-1\right)=4\,j\overline{j}-2\,j-2\,\overline{j}+1=7.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j-1)\left(2\,\overline{j}-1\right)=|2\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à

l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{12}{2\,j-1} = -\frac{24}{7}\,j - \frac{36}{7}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 62. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 5

$$\frac{j+1}{j^2+j-4} = -\frac{1}{5}\,j - \frac{1}{5}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 63. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}+1$. On obtient : ← page 5

$$\frac{-8}{-j+1} = \frac{8\,\overline{j}-8}{(j-1)\left(\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = j\overline{j} - j - \overline{j} + 1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-1)\left(\overline{j}-1\right) = |-j+1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-8}{-j+1} = -\frac{8}{3}\,j - \frac{16}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 64. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j}-2$. On obtient : ← page 6

$$\frac{1}{-j-2} = \frac{-\overline{j}-2}{(j+2)\left(\overline{j}+2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+2)\left(\overline{j}+2\right) = j\overline{j} + 2\,j + 2\,\overline{j} + 4 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+2)\left(\overline{j}+2\right) = |-j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{-j-2} = \frac{1}{3}\,j - \frac{1}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 65. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $8\,\overline{j}-1$. On obtient : ← page 6

$$\frac{-3}{8\,j-1} = \frac{-24\,\overline{j}+3}{(8\,j-1)\left(8\,\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(8\,j-1)\left(8\,\overline{j}-1\right) = 64\,j\overline{j} - 8\,j - 8\,\overline{j} + 1 = 73.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(8\,j-1)\left(8\,\overline{j}-1\right) = |8\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-3}{8\,j-1} = \frac{24}{73}\,j + \frac{27}{73}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 66. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 6

$$\frac{j^2+j-1}{-10\,j+4} = \frac{-2}{-10\,j+4}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-10\,\overline{j}+4$. On obtient :

$$\frac{j^2+j-1}{-10\,j+4} = \frac{20\,\overline{j}-8}{4\,(5\,j-2)\left(5\,\overline{j}-2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(5\,j-2)\left(5\,\overline{j}-2\right) = 100\,j\overline{j} - 40\,j - 40\,\overline{j} + 16 = 156.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(5\,j-2)\left(5\,\overline{j}-2\right)=|-10\,j+4|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j^2+j-1}{-10\,j+4}=-\frac{5}{39}\,j-\frac{7}{39}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 67. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 6

$$\frac{-2\,j^2-43\,j+1}{-3\,j^2-j+3}=\frac{-41\,j+3}{2\,j+6}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+6$. On obtient :

$$\frac{-2\,j^2-43\,j+1}{-3\,j^2-j+3}=\frac{-2\,(41\,j-3)\left(\overline{j}+3\right)}{4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}=\frac{-82\,j\overline{j}-246\,j+6\,\overline{j}+18}{4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=4\,j\overline{j}+12\,j+12\,\overline{j}+36=28.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=|2\,j+6|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-2\,j^2-43\,j+1}{-3\,j^2-j+3}=-9\,j-\frac{5}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 68. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 6

$$\frac{-j^2-j+3}{-12}=-\frac{1}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 69. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du déno- ← page 6

minateur, c'est-à-dire $\overline{j} - 6$. On obtient :

$$\frac{-2}{j-6} = \frac{-2\,\overline{j} + 12}{(j-6)\left(\overline{j} - 6\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(j-6)\left(\overline{j} - 6\right) = j\overline{j} - 6\,j - 6\,\overline{j} + 36 = 43.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-6)\left(\overline{j} - 6\right) = |j-6|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-2}{j-6} = \frac{2}{43}\,j + \frac{14}{43}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 70. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j} - 1$. On obtient : ← page 6

$$\frac{-1}{-j-1} = \frac{\overline{j} + 1}{(j+1)\left(\overline{j} + 1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(j+1)\left(\overline{j} + 1\right) = j\overline{j} + j + \overline{j} + 1 = 1.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+1)\left(\overline{j} + 1\right) = |-j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{-j-1} = -j.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 71. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = \dfrac{e^{2i\pi} - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 6

$$\frac{-j^2 - 2\,j + 1}{-1} = j - 2.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 72. On a : $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$, donc : $\dfrac{1}{j} = j^2$. On en déduit : ← page 6

$$\frac{-2}{j} = -2\,j^2.$$

Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi :

$$\frac{-2}{j} = 2\,j + 2.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 73. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j} - 2$. On obtient : ← page 6

$$\frac{3}{-j-2} = \frac{-3\,\overline{j} - 6}{(j+2)\left(\overline{j}+2\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(j+2)\left(\overline{j}+2\right) = j\overline{j} + 2\,j + 2\,\overline{j} + 4 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+2)\left(\overline{j}+2\right) = |-j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.) Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{3}{-j-2} = j - 1.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 74. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $3\,\overline{j} - 1$. On obtient : ← page 6

$$\frac{6}{3\,j-1} = \frac{18\,\overline{j} - 6}{(3\,j-1)\left(3\,\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(3\,j-1)\left(3\,\overline{j}-1\right) = 9\,j\overline{j} - 3\,j - 3\,\overline{j} + 1 = 13.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(3\,j-1)\left(3\,\overline{j}-1\right) = |3\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à

l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{6}{3\,j-1} = -\frac{18}{13}\,j - \frac{24}{13}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 75. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 6

$$\frac{-j^2+j-1}{3} = \frac{2}{3}\,j.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 76. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+1$. On obtient : ← page 6

$$\frac{-1}{2\,j+1} = \frac{-2\,\overline{j}-1}{(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right) = 4\,j\overline{j} + 2\,j + 2\,\overline{j} + 1 = 3.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(2\,j+1)\left(2\,\overline{j}+1\right) = |2\,j+1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{2\,j+1} = \frac{2}{3}\,j + \frac{1}{3}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 77. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}-33$. On obtient : ← page 7

$$\frac{-19\,j}{j-33} = \frac{-19\,j\left(\overline{j}-33\right)}{(j-33)\left(\overline{j}-33\right)} = \frac{-19\,j\overline{j}+627\,j}{(j-33)\left(\overline{j}-33\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-33)\left(\overline{j}-33\right) = j\overline{j} - 33\,j - 33\,\overline{j} + 1089 = 1123.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-33)\left(\overline{j}-33\right)=|j-33|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-19\,j}{j-33}=\frac{627}{1123}\,j-\frac{19}{1123}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 78. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{2\,j}{-3\,j^2-j+3}=\frac{2\,j}{2\,j+6}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $2\,\overline{j}+6$. On obtient :

$$\frac{2\,j}{-3\,j^2-j+3}=\frac{4\,j\left(\overline{j}+3\right)}{4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}=\frac{4\,j\overline{j}+12\,j}{4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=4\,j\overline{j}+12\,j+12\,\overline{j}+36=28.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=|2\,j+6|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{2\,j}{-3\,j^2-j+3}=\frac{3}{7}\,j+\frac{1}{7}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 79. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{-j^2-55\,j+1}{-5}=\frac{54}{5}\,j-\frac{2}{5}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 80. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs ← page 7

d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi :

$$\frac{-3}{j^2-j+1}=\frac{-3}{-2\,j}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-2\,\overline{j}$. On obtient :

$$\frac{-3}{j^2-j+1}=\frac{6\,\overline{j}}{4\,j\overline{j}}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,j\overline{j}=4.$$

Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-3}{j^2-j+1}=-\frac{3}{2}\,j-\frac{3}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 81. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs ← page 7
d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi :

$$\frac{1}{2\,j^2-2}=\frac{1}{-2\,j-4}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-2\,\overline{j}-4$. On obtient :

$$\frac{1}{2\,j^2-2}=\frac{-2\,\overline{j}-4}{4\,(j+2)\left(\overline{j}+2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$4\,(j+2)\left(\overline{j}+2\right)=4\,j\overline{j}+8\,j+8\,\overline{j}+16=12.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $4\,(j+2)\left(\overline{j}+2\right)=|-2\,j-4|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{2\,j^2-2}=\frac{1}{6}\,j-\frac{1}{6}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 82. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $6\,\overline{j}+1$. On obtient : ← page 7

$$\frac{12}{6\,j+1} = \frac{72\,\overline{j}+12}{(6\,j+1)\left(6\,\overline{j}+1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(6\,j+1)\left(6\,\overline{j}+1\right) = 36\,j\overline{j}+6\,j+6\,\overline{j}+1 = 31.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(6\,j+1)\left(6\,\overline{j}+1\right) = |6\,j+1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{12}{6\,j+1} = -\frac{72}{31}\,j - \frac{60}{31}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 83. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{2\,j^2+j+2}{1} = -j.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 84. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{1}{60\,j^2+3} = \frac{1}{-60\,j-57}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-60\,\overline{j}-57$. On obtient :

$$\frac{1}{60\,j^2+3} = \frac{-60\,\overline{j}-57}{9\,(20\,j+19)\left(20\,\overline{j}+19\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$9\,(20\,j+19)\left(20\,\overline{j}+19\right) = 3600\,j\overline{j}+3420\,j+3420\,\overline{j}+3249 = 3429.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $9\,(20\,j+19)\left(20\,\overline{j}+19\right)=|-60\,j-57|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{60\,j^2+3}=\frac{20}{1143}\,j+\frac{1}{1143}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 85. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{7\,j^2+9}{-2}=\frac{7}{2}\,j-1.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 86. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{-j^2+122\,j+1}{j+3}=\frac{123\,j+2}{j+3}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}+3$. On obtient :

$$\frac{-j^2+122\,j+1}{j+3}=\frac{(123\,j+2)\left(\overline{j}+3\right)}{(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}=\frac{123\,j\overline{j}+369\,j+2\,\overline{j}+6}{(j+3)\left(\overline{j}+3\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=j\overline{j}+3\,j+3\,\overline{j}+9=7.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j+3)\left(\overline{j}+3\right)=|j+3|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j^2+122\,j+1}{j+3}=\frac{367}{7}\,j+\frac{127}{7}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 87. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs ← page 7

d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi :

$$\frac{-2\,j^2+3\,j-1}{-1}=-5\,j-1.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 88. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{-2}{-4\,j^2+j-1}=\frac{-2}{5\,j+3}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $5\,\overline{j}+3$. On obtient :

$$\frac{-2}{-4\,j^2+j-1}=\frac{-10\,\overline{j}-6}{(5\,j+3)\left(5\,\overline{j}+3\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(5\,j+3)\left(5\,\overline{j}+3\right)=25\,j\overline{j}+15\,j+15\,\overline{j}+9=19.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(5\,j+3)\left(5\,\overline{j}+3\right)=|5\,j+3|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-2}{-4\,j^2+j-1}=\frac{10}{19}\,j+\frac{4}{19}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 89. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 7

$$\frac{-15\,j^2+3\,j}{2}=9\,j+\frac{15}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 90. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{1}{-2\,j^2+j-3}=\frac{1}{3\,j-1}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $3\,\overline{j}-1$. On obtient :

$$\frac{1}{-2\,j^2+j-3}=\frac{3\,\overline{j}-1}{(3\,j-1)\left(3\,\overline{j}-1\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(3\,j-1)\left(3\,\overline{j}-1\right)=9\,j\overline{j}-3\,j-3\,\overline{j}+1=13.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(3\,j-1)\left(3\,\overline{j}-1\right)=|3\,j-1|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{1}{-2\,j^2+j-3}=-\frac{3}{13}\,j-\frac{4}{13}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 91. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=\dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1}=0$, donc : $j^2=-1-j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{j^2+3\,j-3}{j^2+2\,j-1}=\frac{2\,j-4}{j-2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}-2$. On obtient :

$$\frac{j^2+3\,j-3}{j^2+2\,j-1}=\frac{2\,(j-2)\left(\overline{j}-2\right)}{(j-2)\left(\overline{j}-2\right)}=\frac{2\,j\overline{j}-4\,j-4\,\overline{j}+8}{(j-2)\left(\overline{j}-2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j}=|j|^2=\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2=1$, et : $j+\overline{j}=2\mathrm{Re}(j)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=-1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-2)\left(\overline{j}-2\right)=j\overline{j}-2\,j-2\,\overline{j}+4=7.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-2)\left(\overline{j}-2\right)=|j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{j^2+3\,j-3}{j^2+2\,j-1}=2.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 92. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = \dfrac{e^{2i\pi} - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{9\,j^2 - j}{-j + 5} = \frac{-10\,j - 9}{-j + 5}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-\overline{j} + 5$. On obtient :

$$\frac{9\,j^2 - j}{-j + 5} = \frac{(10\,j + 9)\left(\overline{j} - 5\right)}{(j - 5)\left(\overline{j} - 5\right)} = \frac{10\,j\overline{j} - 50\,j + 9\,\overline{j} - 45}{(j - 5)\left(\overline{j} - 5\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(j - 5)\left(\overline{j} - 5\right) = j\overline{j} - 5\,j - 5\,\overline{j} + 25 = 31.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j - 5)\left(\overline{j} - 5\right) = |-j + 5|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{9\,j^2 - j}{-j + 5} = -\frac{59}{31}\,j - \frac{44}{31}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 93. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = \dfrac{e^{2i\pi} - 1}{j - 1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{-2\,j}{j^2 - 2\,j + 3} = \frac{-2\,j}{-3\,j + 2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $-3\,\overline{j} + 2$. On obtient :

$$\frac{-2\,j}{j^2 - 2\,j + 3} = \frac{2\,j\left(3\,\overline{j} - 2\right)}{(3\,j - 2)\left(3\,\overline{j} - 2\right)} = \frac{6\,j\overline{j} - 4\,j}{(3\,j - 2)\left(3\,\overline{j} - 2\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(3\,j - 2)\left(3\,\overline{j} - 2\right) = 9\,j\overline{j} - 6\,j - 6\,\overline{j} + 4 = 19.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(3\,j - 2)\left(3\,\overline{j} - 2\right) = |-3\,j + 2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à

l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-2\,j}{j^2-2\,j+3} = -\frac{4}{19}\,j + \frac{6}{19}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 94. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{-j^2-1}{j^2+2\,j-1} = \frac{j}{j-2}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j}-2$. On obtient :

$$\frac{-j^2-1}{j^2+2\,j-1} = \frac{j\left(\overline{j}-2\right)}{(j-2)\left(\overline{j}-2\right)} = \frac{j\overline{j}-2\,j}{(j-2)\left(\overline{j}-2\right)}.$$

Or : $j\cdot\overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j+\overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j+\overline{j}=-1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme X^2+X+1), donc :

$$(j-2)\left(\overline{j}-2\right) = j\overline{j}-2\,j-2\,\overline{j}+4 = 7.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-2)\left(\overline{j}-2\right) = |j-2|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.)
Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-j^2-1}{j^2+2\,j-1} = -\frac{2}{7}\,j + \frac{1}{7}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 95. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1+j+j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1-j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{-2\,j^2+j+1}{2} = \frac{3}{2}\,j + \frac{3}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 96. On a : $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$, donc : $\dfrac{1}{j} = j^2$. On en déduit : ← page 8

$$\frac{j+2}{2\,j} = \frac{1}{2}\,j^3 + j^2.$$

Ensuite, encore en utilisant le fait que $j^3 = 1$, on peut simplifier cette expression et obtenir :

$$\frac{j+2}{2\,j} = j^2 + \frac{1}{2}.$$

Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi :

$$\frac{j+2}{2\,j} = -j - \frac{1}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 97. On a : $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$, donc : $\dfrac{1}{j} = j^2$. On en déduit : ← page 8

$$\frac{1}{-j} = -j^2.$$

Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi :

$$\frac{1}{-j} = j + 1.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.

Corrigé 98. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{1}{j^2 + j - 1} = -\frac{1}{2}.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 99. Pour simplifier j^2, on remarque que, en tant que somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a : $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = \dfrac{e^{2i\pi}-1}{j-1} = 0$, donc : $j^2 = -1 - j$. Ainsi : ← page 8

$$\frac{-2\,j^2 - 4\,j}{1} = -2\,j + 2.$$

On obtient bien la forme attendue.

Corrigé 100. Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire $\overline{j} - 5$. On obtient : ← page 8

$$\frac{-1}{j-5} = \frac{-\overline{j} + 5}{(j-5)\left(\overline{j}-5\right)}.$$

Or : $j \cdot \overline{j} = |j|^2 = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}\right|^2 = 1$, et : $j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$ (l'identité $j + \overline{j} = -1$ peut aussi se démontrer à l'aide des relations coefficients-racines avec le polynôme $X^2 + X + 1$), donc :

$$(j-5)\left(\overline{j}-5\right) = j\overline{j} - 5\,j - 5\,\overline{j} + 25 = 31.$$

(Remarquez l'intérêt de ne pas avoir directement écrit : $(j-5)\left(\overline{j}-5\right) = |j-5|^2$. Nous voulions développer plus facilement l'expression par distributivité du produit par rapport à l'addition.) Ces mêmes identités permettent de simplifier le numérateur, et on obtient enfin :

$$\frac{-1}{j-5} = \frac{1}{31}\,j + \frac{6}{31}.$$

On obtient bien la forme attendue.

En général, la simplification proposée n'est pas la plus directe. Le moyen le plus efficace de simplifier une telle fraction est en effet en utilisant l'algorithme d'Euclide pour les polynômes.