Calcul de la somme d'une série entière (non guidé)

Calcul d'une somme de série entière, en se ramenant à des sommes usuelles. Mes documents *Méthodes* (section 2.2) sont prodigues en exemples.

Commentaire sur la programmation de certains corrigés. Parfois, le corrigé ne cherchera pas à regrouper naturellement certains produits de puissances de x, en laissant xx^n au lieu d'écrire x^{n+1}. C'est issu d'un défaut de programmation que je n'ai pas pris le temps de corriger... Un jour, peut-être ? En tous les cas, ne cherchez pas une vraie motivation mathématique à cela et n'imitez pas cette façon de faire.

Commentaire général sur le corrigé de ces exercices. Je ne montrerai pas que les sommes apparaissant dans les calculs existent bien pour tout x dans l'intervalle considéré, et ne justifierai pas la légitimité de mes dérivations ou intégrations terme à terme éventuelles ; et ce, afin de me concentrer sur la principale difficulté ici, à savoir : la réduction à des sommes de série entière usuelles. Mais dans une rédaction d'examen ou de concours, vous auriez à justifier en détail l'existence des sommes et la validité de vos opérations.

Exercice 1. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 12

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(14\,n+1)x^{2\,n}}{4\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 2. Calculer, pour tout $x \in \left]-2,2\right[$, la valeur de la somme : → page 12

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(4\,n^2+n+1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1}}{2\,(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 3. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 12

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(5\,n^2+1\right)x^n.$$

Exercice 4. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, la valeur de la somme : → page 13

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\cdot 2^n x^{n+1}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)}.$$

Exercice 5. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 14

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(11\,n^2-n+1\right)x^n.$$

Exercice 6. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$, la valeur de la somme : → page 14

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 7. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 15

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,n^2+61\right)\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 8. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$, la valeur de la somme : → page 16

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+2\right) (-9)^n \, x^{2\,n+1}.$$

Exercice 9. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{19}, \frac{1}{19}\right[$, la valeur de la somme : → page 16

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-19)^n \, (21\,n-1)x^n.$$

Exercice 10. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 17

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(41\,n-1)x^{2\,n+1}}{3\,(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 11. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, la valeur de la somme : → page 17

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16^n x^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+2)}.$$

Exercice 12. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 18

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+2)}.$$

Exercice 13. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 19

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3\,(-1)^n \,(n+8)x^{n+1}.$$

Exercice 14. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\right[$, la valeur de la somme : → page 19

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n^2-1\right)\left(-\frac{7}{3}\right)^n x^{2\,n+1}.$$

Exercice 15. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 20

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^n (n+1)x^n}{(n+3)!}.$$

Exercice 16. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$, la valeur de la somme : → page 20

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (n+3)x^{2\,n}.$$

Exercice 17. Calculer, pour tout $x \in \left]-3,3\right[$, la valeur de la somme : → page 21

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(5\,n^2-n+2\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n.$$

Exercice 18. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, la valeur de la somme : → page 21

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^{n+1}}{2(2n+1)(n+2)}.$$

Exercice 19. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme : → page 22

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n+1\right) x^{2n+1}.$$

Exercice 20. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$, la valeur de la somme : → page 22

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n (n-2) x^n}{(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 21. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 23

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n n^2 x^n}{(n+2)!}.$$

Exercice 22. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 23

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n-1) x^{n+1}}{(2n+3)!}.$$

Exercice 23. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$, la valeur de la somme : → page 24

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+7n\right)(-2)^n x^{2n}.$$

Exercice 24. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 25

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n (n+1) x^{2n}}{(n+3)!}.$$

Exercice 25. Calculer, pour tout $x \in]-19,19[$, la valeur de la somme : → page 25

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{19}\right)^n (2n+1) x^{n+1}.$$

Exercice 26. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme : → page 26

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(3n^2-n-1\right) x^{2n}.$$

Exercice 27. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 26

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-n-1\right) 2^n x^{2n+1}}{(2n+3)!}.$$

Exercice 28. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 27

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 + 3\,n - 1\right) (-1)^n \, x^{2\,n+1}.$$

Exercice 29. Calculer, pour tout $x \in \left]-3{,}3\right[$, la valeur de la somme : → page 28

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - n + 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n.$$

Exercice 30. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right[$, la valeur de la somme : → page 28

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{7}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+3)}.$$

Exercice 31. Calculer, pour tout $x \in \left]-3{,}3\right[$, la valeur de la somme : → page 29

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{61\,\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+3)}.$$

Exercice 32. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$, la valeur de la somme : → page 30

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 33. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 30

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^n.$$

Exercice 34. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$, la valeur de la somme : → page 30

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4\left(2\,n^2 + 3\,n\right) (-2)^n \, x^{2\,n}.$$

Exercice 35. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 31

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(3\,n+2)x^n}{(n+2)!}.$$

Exercice 36. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 32

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(6\,n^2 - n - 1\right) (-1)^n \, x^{n+1}.$$

Exercice 37. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 32

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{75}{2}\right)^n (n-1)x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}.$$

Exercice 38. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$, la valeur de la somme : → page 33

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n-20\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}.$$

Exercice 39. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 34

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2-3\,n+1\right)x^{2\,n+1}}{(n+3)!}.$$

Exercice 40. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 34

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 41. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$, la valeur de la somme : → page 35

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n\right)(-3)^n x^n.$$

Exercice 42. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$, la valeur de la somme : → page 36

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-2)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 43. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[$, la valeur de la somme : → page 36

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(-\frac{3}{5}\right)^n x^{2\,n}}{2\,(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 44. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, la valeur de la somme : → page 37

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 45. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 37

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{26}\right)^n n x^{n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Exercice 46. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 38

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,n^2 x^n}{(2\,n+1)!}.$$

Exercice 47. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 39

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+2\,n-3)2^n x^{n+1}}{n!}.$$

Exercice 48. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 39

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-24)^n\,(n-1)x^{2\,n}}{(2\,n)!}.$$

Exercice 49. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 40

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,(6\,n-1)x^{n+1}.$$

Exercice 50. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 40

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 51. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 41

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,(9\,n-5)x^{2\,n+1}.$$

Exercice 52. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 41

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n-1)x^n}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 53. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 42

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{17\,(-1)^n\,x^n}{(2\,n+1)(n+3)}.$$

Exercice 54. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 43

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 55. Calculer, pour tout $x \in \left]-7{,}7\right[$, la valeur de la somme : → page 43

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-n+57\right)\left(\frac{1}{49}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)}.$$

Exercice 56. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 44

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^n}{2\,(2\,n+1)(n+2)}.$$

Exercice 57. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 44

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (n+1)x^n.$$

Exercice 58. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 45

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+3)(n+3)}.$$

Exercice 59. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$, la valeur de la somme : → page 46

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-3)^n\,x^{2\,n}}{(n+3)(n+2)}.$$

Exercice 60. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, la valeur de la somme : → page 46

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,x^n}{2\,(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 61. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$, la valeur de la somme : → page 46

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 62. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 47

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-3)x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 63. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 48

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2-n)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+2)!}.$$

Exercice 64. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 49

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1}.$$

Exercice 65. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 49

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{30\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n n x^{2\,n+1}}{(n+3)!}.$$

Exercice 66. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{6}{5}}, \sqrt{\frac{6}{5}}\right[$, la valeur de la somme : → page 50

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+43\,n+9)\left(\frac{5}{6}\right)^n x^{2\,n}.$$

Exercice 67. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme : → page 51

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\,x^{2\,n+1}}{3\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 68. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 51

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-10)^n\,(n+2)x^n}{n!}.$$

Exercice 69. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme : → page 51

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-30)x^{2\,n}}{2\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 70. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 52

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(16\,n^2+2\,n-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 71. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 53

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+2\,n+5\right)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 72. Calculer, pour tout $x \in]-3,3[$, la valeur de la somme : → page 53

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n}{2\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 73. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 54

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^n (5\,n+1)x^n}{(2\,n)!}.$$

Exercice 74. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 54

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{31^n n x^{2\,n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 75. Calculer, pour tout $x \in \left]-2\,\sqrt{\frac{1}{3}},2\,\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$, la valeur de la somme : → page 55

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (n+1)x^{2\,n+1}.$$

Exercice 76. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 55

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+2\,n-1\right)(-1)^n x^n}{(n+1)!}.$$

Exercice 77. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 56

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n+4) x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 78. Calculer, pour tout $x \in]-2,2[$, la valeur de la somme : → page 57

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(3n^2 - n + 10\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n.$$

Exercice 79. Calculer, pour tout $x \in]-11,11[$, la valeur de la somme : → page 57

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{11}\right)^n x^{n+1}}{3(2n+3)(n+2)}.$$

Exercice 80. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme : → page 58

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 + 2n - 4\right) x^n.$$

Exercice 81. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, la valeur de la somme : → page 59

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n^2 - 3n + 1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2n+1}.$$

Exercice 82. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right[$, la valeur de la somme : → page 59

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n x^{n+1}}{4(2n+1)(n+1)}.$$

Exercice 83. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 60

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\,(-1)^n n x^{2n}}{(n+2)!}.$$

Exercice 84. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{39}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{39}{2}}\right[$, la valeur de la somme : → page 60

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - 2\right)\left(\frac{8}{39}\right)^n x^{2n+1}.$$

Exercice 85. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right[$, la valeur de la somme : → page 61

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 + n - 1\right)(-6)^n x^{2n}.$$

Exercice 86. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme : → page 62

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,x^{2\,n}}{(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 87. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 62

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 88. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$, la valeur de la somme : → page 63

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2-n-11\right)3^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 89. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 63

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(8\,n+1)x^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 90. Calculer, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme : → page 64

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^n.$$

Exercice 91. Calculer, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme : → page 64

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2\,n^2-n+21\right)(-1)^n\,x^{2\,n}.$$

Exercice 92. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right[$, la valeur de la somme : → page 65

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(3\,n^2-5\,n+1\right)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{2\,n}.$$

Exercice 93. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 66

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2+1\right)x^{2\,n}}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 94. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, la valeur de la somme : → page 66

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (n+1)x^{2\,n}.$$

Exercice 95. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme : → page 67

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 96. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 67

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big(n^2+1\big)x^{n+1}.$$

Exercice 97. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 68

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{n+1}}{(2\,n+3)(n+2)}.$$

Exercice 98. Calculer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right[$, la valeur de la somme : → page 69

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n(26\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 99. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme : → page 69

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-3)x^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 100. Calculer, pour tout $x \in \left]-\sqrt{11},\sqrt{11}\right[$, la valeur de la somme : → page 70

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{11}\right)^n x^{2\,n+1}}{2\,(n+2)(n+1)}.$$

Corrigé 1. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 1

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}, \quad \frac{14\,n+1}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{10}{2\,n+3} - \frac{13}{4\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(14\,n+1)x^{2\,n}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{13}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(x^2\right)^n}{n+1} + 10\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n}}{2\,n+3} \\ &= -\frac{13}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(x^2\right)^n}{n+1} + 10\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{2\,n-2}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(14\,n+1)x^{2\,n}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{13}{4\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{10}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{13}{4\,x^2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{10}{x^3}\arctan(x) + \left(\frac{10}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 2. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Le fait d'avoir un numérateur de degré 2 au numérateur ne change rien à la méthode. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 1

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2, -1\}, \quad \frac{4\,n^2+n+1}{2\,(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{17}{2\,(n+3)} - \frac{15}{2\,(n+2)} + \frac{1}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-2,2\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(4\,n^2+n+1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1}}{2\,(n+3)(n+2)(n+1)} &= \frac{17}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n x}{n+3} - \frac{15}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n x}{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n x}{n+1} \\ &= \frac{17}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-2} x}{n+1} - \frac{15}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(4\,n^2+n+1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1}}{2\,(n+3)(n+2)(n+1)} &= \frac{544}{x^5}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{120}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{4}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(\frac{4}{x} - \frac{120}{x^3} + \frac{544}{x^5}\right)\ln\left(-\frac{1}{4}\,x^2+1\right) + \left(\frac{13}{x} - \frac{136}{x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 3. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $5X^2 + 1 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $5X^2+1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $5X^2 + 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins ← page 1

calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $5 = c$. En conclusion, on a :

$$5X^2 + 1 = 1 + 5X + 5X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(5\,n^2+1\right)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 5\,x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + 5\,x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(5\,n^2+1\right)x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{5\,x}{\left(1-x\right)^2} + \frac{10\,x^2}{\left(1-x\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 4. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 1

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{7}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)} = -\frac{7}{2\,n+3} + \frac{7}{3\,(2\,n+1)} + \frac{7}{3\,(n+2)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\cdot 2^n x^{n+1}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)} &= \frac{7}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,x)^n\,x}{n+2} - 7\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,x)^n\,x}{2\,n+3} + \frac{7}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,x)^n\,x}{2\,n+1} \\ &= \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2\,x)^{n-1}\,x}{n+1} - 7\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2\,x)^{n-1}\,x}{2\,n+1} + \frac{7}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,x)^n\,x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\cdot 2^n x^{n+1}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)} &= \frac{7}{12\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{7\sqrt{2}}{4\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} + \frac{7}{6}\sqrt{2}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{7}{12\,x}\ln\left(-2\,x+1\right) + \left(\frac{7}{6}\sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{7\sqrt{2}}{4\sqrt{x}}\right)\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}+1}{\sqrt{2}\sqrt{x}-1}\right) + \left(\frac{7}{3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\cdot 2^n x^{n+1}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)} = -\frac{7}{12\,x}\ln\left(-2\,x+1\right) + \left(\frac{7\sqrt{2}x}{6\sqrt{-x}} - \frac{7\sqrt{2}}{4\sqrt{-x}}\right)\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{7}{3}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Corrigé 5. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $11X^2 - X + 1 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $11X^2 - X + 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $11X^2 - X + 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $11 = c$. En conclusion, on a : ← page 1

$$11X^2 - X + 1 = 1 + 10X + 11X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(11\,n^2 - n + 1\right) x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 10 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n + 11 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 10\,x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + 11\,x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(11\,n^2 - n + 1\right) x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{10\,x}{(1-x)^2} + \frac{22\,x^2}{(1-x)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 6. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 1

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -1 \right\}, \quad \frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+1)} = -\frac{1}{2\,n+3} + \frac{1}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3\,x)^n}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3\,x)^n}{2\,n+3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3\,x)^n}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\,x)^{n-1}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)} &= \frac{1}{6\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{9\,x^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\frac{1}{6\,x}\ln\left(-3\,x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{9\,x^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{3}\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}\sqrt{x}-1}\right) + \left(\frac{1}{3\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)} = -\frac{1}{6\,x}\ln\left(-3\,x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{9\,\sqrt{-x}x}\arctan\left(\sqrt{3}\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{1}{3\,x}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 7. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $3X^2+61 = a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+2), (2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $3X^2+61$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1, -\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $3X^2+61 = a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a = 64$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $3 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{3}{4}$. En conclusion, on a : ← page 1

$$3X^2 + 61 = 64 - \frac{9}{4}(2X+2) + \frac{3}{4}(2X+2)(2X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,n^2+61\right)\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!} &= 64\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1} - \frac{9}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}\\ &\quad + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}\\ &= 64\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!} - \frac{9}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\\ &= 64\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{30}\right)^{n-1} x^{2\,n-1}}{(2\,n)!} - \frac{9}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$

étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(3\,n^2+61\right)\left(-\frac{1}{30}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!} &= -\frac{1920}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{30}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}-\frac{135}{2}\sqrt{\frac{1}{30}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{30}}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\frac{3}{4}\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{30}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}\\ &= \left(-\frac{1920}{x}+\frac{3}{4}\,x\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{30}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}-\frac{135}{2}\sqrt{\frac{1}{30}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{30}}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\left(\frac{1920}{x}\right)\\ &= \left(-\frac{1920}{x}+\frac{3}{4}\,x\right)\cos\left(\sqrt{\frac{1}{30}}x\right)-\frac{135}{2}\sqrt{\frac{1}{30}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{30}}x\right)+\left(\frac{1920}{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+2=a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,X,X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+2, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+2=a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a : ← page 1

$$X^2+2=2+X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+2\right)(-9)^n\,x^{2\,n+1} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-9)^n\,x^{2\,n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(-9)^n\,x^{2\,n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\,(-9)^n\,x^{2\,n+1}\\ &= 2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-9\,x^2\right)^n+x\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-9\,x^2\right)^n+x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(-9\,x^2\right)^n\\ &= 2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-9\,x^2\right)^n-9\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-9\,x^2\right)^{n-1}+81\,x^5\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(-9\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-9\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x\in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\quad\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+2\right)(-9)^n\,x^{2\,n+1}=\frac{2\,x}{1+9x^2}-\frac{9\,x^3}{\left(1+9x^2\right)^2}+\frac{162\,x^5}{\left(1+9x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 9. Soit $x\in\left]-\frac{1}{19},\frac{1}{19}\right[$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-19)^n\,(21\,n-1)x^n &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-19)^n\,x^n+21\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(-19)^n\,x^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-19\,x)^n+21\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(-19\,x)^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-19\,x)^n-399\,x\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(-19\,x)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-19\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-19)^n\,(21\,n-1)x^n = -\frac{1}{1+19x} - \frac{399\,x}{(1+19x)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 2

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-1\}, \quad \frac{41\,n-1}{3\,(n+3)(n+1)} = \frac{62}{3\,(n+3)} - \frac{7}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(41\,n-1)x^{2\,n+1}}{3\,(n+3)(n+1)} &= \frac{62}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n x}{n+3} - 7\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n x}{n+1}\\ &= \frac{62}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n-2} x}{n+1} - 7\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(41\,n-1)x^{2\,n+1}}{3\,(n+3)(n+1)} &= \frac{62}{3\,x^5}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{7}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= -\left(-\frac{7}{x} + \frac{62}{3\,x^5}\right)\ln\left(-x^2+1\right) + \left(-\frac{31}{3\,x} - \frac{62}{3\,x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 11. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 2

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -2\right\}, \quad \frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+2)} = \frac{1}{2\,n+3} - \frac{1}{2\,(n+2)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16^n x^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+2)} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(16\,x^2\right)^n x}{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(4\,x\right)^{2\,n} x}{2\,n+3}\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(16\,x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(4\,x\right)^{2\,n-2} x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout

$x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16^n x^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+2)} &= -\frac{1}{512\,x^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(16\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{64\,x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\,x)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{1}{512\,x^3} \ln\left(-16\,x^2+1\right) + \frac{1}{64\,x^2}\frac{1}{2} \ln\left(-\frac{4\,x+1}{4\,x-1}\right) + \left(-\frac{1}{32\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 12. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 2

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -2\right\}, \quad \frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+2)} = \frac{1}{2\,n+3} - \frac{1}{2\,(n+2)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+2)} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{2\,n+3} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^{n}}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^{n}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+2)} &= \frac{1}{2\,x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, \sqrt{x}^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{1}{2\,x} \ln(x+1) - \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan\left(\sqrt{x}\right) + \left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+2)} = \frac{1}{2\,x} \ln(x+1) - \frac{1}{\sqrt{-x}}\frac{1}{2} \ln\left(-\frac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}-1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 13. Soit $x \in \left]-1{,}1\right[$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} 3\,(-1)^n\,(n+8)x^{n+1} &= 24\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-1)^n\,x^{n+1}\\
&= 24\,x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + 3\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^n\\
&= 24\,x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n - 3\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3\,(-1)^n\,(n+8)x^{n+1} = \frac{24\,x}{1+x} - \frac{3\,x^2}{(1+x)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 14. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2 - 2 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2-2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $2X^2 - 2 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = -2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2 = c$. En conclusion, on a : ← page 2

$$2X^2 - 2 = -2 + 2X + 2X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(n^2-1)\left(-\frac{7}{3}\right)^n x^{2\,n+1} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{7}{3}\right)^n x^{2\,n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{7}{3}\right)^n x^{2\,n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{7}{3}\right)^n x^{2\,n+1}\\
&= -2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{7}{3}\,x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{7}{3}\,x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{7}{3}\,x^2\right)^n\\
&= -2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{7}{3}\,x^2\right)^n - \frac{14}{3}\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{7}{3}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{98}{9}\,x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{7}{3}\,x^2\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{7}{3}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(n^2-1)\left(-\frac{7}{3}\right)^n x^{2\,n+1} = -\frac{2\,x}{1+\frac{7}{3}x^2} - \frac{\frac{14}{3}\,x^3}{\left(1+\frac{7}{3}x^2\right)^2} + \frac{\frac{196}{9}\,x^5}{\left(1+\frac{7}{3}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 15. Déterminons $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X+1 = a+b(X+3)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X+1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 1$, puis : $a = -2$. En conclusion, on a : ← page 2

$$X + 1 = -2 + (X+3).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^n (n+1)x^n}{(n+3)!} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}\left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}\left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n \\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n}{(n+3)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n}{(n+2)!} \\
&= -2\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-3} x^{n-3}}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-2} x^{n-2}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^n (n+1)x^n}{(n+3)!} &= \frac{27}{32\,x^3}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\,x\right)^n}{n!} + \frac{9}{16\,x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\,x\right)^n}{n!} \\
&= \left(\frac{27}{32\,x^3} + \frac{9}{16\,x^2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{3}\,x\right)^n}{n!} + \left(\frac{3\,(4\,x-3)}{16\,x^2} - \frac{3\left(8\,x^2 - 12\,x + 9\right)}{32\,x^3}\right) \\
&= \left(\frac{27}{32\,x^3} + \frac{9}{16\,x^2}\right)e^{\left(-\frac{4}{3}\,x\right)} + \left(\frac{9}{16\,x^2} - \frac{27}{32\,x^3}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 16. Soit $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (n+3)x^{2\,n} &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2\,n} \\
&= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^n \\
&= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^n + \frac{1}{3}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{3}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (n+3)x^{2\,n} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}x^2} + \frac{\frac{1}{3}\,x^2}{\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 17. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $5X^2 - X + 2 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $5X^2 - X + 2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $5X^2 - X + 2 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $5 = c$. En conclusion, on a :

← page 2

$$5X^2 - X + 2 = 2 + 4X + 5X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-3,3\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(5\,n^2 - n + 2\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n + 5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n + \frac{4}{3}\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n-1} + \frac{5}{9}\,x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{3}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(5\,n^2 - n + 2\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n = \frac{2}{1-\frac{1}{3}x} + \frac{\frac{4}{3}\,x}{\left(1-\frac{1}{3}x\right)^2} + \frac{\frac{10}{9}\,x^2}{\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 18. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

← page 3

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+2)} = \frac{1}{3\,(2\,n+1)} - \frac{1}{6\,(n+2)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+2)} &= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2\,x)^n\,x}{n+2} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2\,x)^n\,x}{2\,n+1} \\ &= -\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,(2\,x)^{n-1}\,x}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2\,x)^n\,x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+2)} &= \frac{1}{24\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2\,x)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{6}\,\sqrt{2}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{1}{24\,x}\ln\left(2\,x+1\right) + \frac{1}{6}\,\sqrt{2}\sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\, x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+2)} = \frac{1}{24\,x} \ln(2\,x+1) + \frac{\sqrt{2}x}{6\sqrt{-x}}\,\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{-x}+1}{\sqrt{2}\sqrt{-x}-1}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 19. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + X + 1 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X+1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 + X + 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 3

$$X^2 + X + 1 = 1 + 2X + X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n+1\right) x^{2\,n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{2\,n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^{2\,n+1} \\
&= x\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(x^2\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(x^2\right)^n \\
&= x\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n + 2\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(x^2\right)^{n-1} + x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(x^2\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en x^2. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n+1\right) x^{2\,n+1} = \frac{x}{1-x^2} + \frac{2\,x^3}{\left(1-x^2\right)^2} + \frac{2\,x^5}{\left(1-x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 20. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 3

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-1\}, \quad \frac{n-2}{(n+3)(n+1)} = \frac{5}{2\,(n+3)} - \frac{3}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n (n-2)x^n}{(n+3)(n+1)} &= \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\,x\right)^n}{n+3} - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\,x\right)^n}{n+1} \\ &= \frac{5}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2} \left(\frac{3}{2}\,x\right)^{n-2}}{n+1} - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\,x\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n (n-2)x^n}{(n+3)(n+1)} &= \frac{20}{27\,x^3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(-\frac{1}{x} + \frac{20}{27\,x^3}\right)\ln\left(\frac{3}{2}\,x+1\right) + \left(\frac{5}{6\,x} - \frac{10}{9\,x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 21. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 = a + b(X+2) + c(X+2)(X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (X+2), (X+2)(X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-2, -1$. Si l'on évalue l'égalité $X^2 = a + b(X+2) + c(X+2)(X+1)$ en -2, on obtient directement : $a = 4$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 3

$$X^2 = 4 - 3(X+2) + (X+2)(X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n n^2 x^n}{(n+2)!} &= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)}{(n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \\ &= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(n+2)!} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{n!} \\ &= 4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} x^{n-2}}{n!} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n n^2 x^n}{(n+2)!} &= \frac{16}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n!} - \frac{6}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{16}{x^2} - \frac{6}{x} + 1\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n!} + \left(-\frac{8\,(x+2)}{x^2} + \frac{6}{x}\right) \\ &= \left(\frac{16}{x^2} - \frac{6}{x} + 1\right)e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)} + \left(-\frac{2}{x} - \frac{16}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 22. Déterminons $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + b(2X+3)$. L'existence d'une telle dé- ← page 3

composition est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{1}{2}$, puis : $a = -\frac{5}{2}$. En conclusion, on a :

$$X - 1 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(2X+3).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,(n-1)x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= -\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+3)!}\,(-2)^n\,x^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+3)}{(2\,n+3)!}\,(-2)^n\,x^{n+1} \\
&= -\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+3)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+2)!} \\
&= -\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1}\,x^{n}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1}\,x^{n}}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,(n-1)x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= \frac{5\sqrt{2}}{8\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{5\sqrt{2}}{8\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + (-1) \\
&= -\frac{1}{4}\cos\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right) + \frac{5\sqrt{2}}{8\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right) + (-1)\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,(n-1)x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{5\sqrt{2}}{8\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + (-1) \\
&= -\frac{1}{4}\cosh\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right) + \frac{5\sqrt{2}}{8\sqrt{-x}}\sinh\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right) + (-1)\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 23. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + 7X = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+7X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 + 7X = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 3

$$X^2 + 7X = 8X + X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 + 7\,n\right)(-2)^n\,x^{2\,n} &= 8\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-2)^n\,x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,(-2)^n\,x^{2\,n} \\
&= 8\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-2\,x^2\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-2\,x^2\right)^n \\
&= -16\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-2\,x^2\right)^{n-1} + 4\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-2\,x^2\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 des dérivées de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ évaluée en $-2\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+7\,n\right)(-2)^n\,x^{2\,n} = -\frac{16\,x^2}{1+2x^2} + \frac{8\,x^4}{\left(1+2x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 24. Déterminons $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X+1 = a+b(X+3)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X+1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=1$, puis : $a=-2$. En conclusion, on a : ← page 3

$$X+1 = -2+(X+3).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n(n+1)x^{2\,n}}{(n+3)!} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}8^n x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}8^n x^{2\,n} \\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n x^{2\,n}}{(n+3)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n x^{2\,n}}{(n+2)!} \\
&= -2\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{8^{n-3} x^{2\,n-6}}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{8^{n-2} x^{2\,n-4}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n(n+1)x^{2\,n}}{(n+3)!} &= -\frac{1}{256\,x^6}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(8\,x^2\right)^n}{n!} + \frac{1}{64\,x^4}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(8\,x^2\right)^n}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{256\,x^6} + \frac{1}{64\,x^4}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(8\,x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{8\,x^2+1}{64\,x^4} + \frac{32\,x^4+8\,x^2+1}{256\,x^6}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{256\,x^6} + \frac{1}{64\,x^4}\right)e^{\left(8\,x^2\right)} + \left(\frac{1}{64\,x^4} + \frac{1}{256\,x^6}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 25. Soit $x \in]-19,19[$. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{19}\right)^n (2\,n+1)x^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{19}\right)^n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^{n+1} \\
&= x\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{19}\,x\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{19}\,x\right)^n \\
&= x\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{19}\,x\right)^n - \frac{2}{19}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{19}\,x\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{19}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{19}\right)^n(2\,n+1)x^{n+1}=\frac{x}{1+\frac{1}{19}x}-\frac{\frac{2}{19}\,x^2}{\left(1+\frac{1}{19}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 26. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $3X^2-X-1=a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,X,X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $3X^2-X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $3X^2-X-1=a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $3=c$. En conclusion, on a : ← page 3

$$3X^2-X-1=-1+2X+3X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\,]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(3\,n^2-n-1\right)x^{2\,n}&=-\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2\,n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{2\,n}+3\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)x^{2\,n}\\&=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^2\right)^n+2\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(x^2\right)^{n-1}+3\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en x^2. Plus précisément, pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\quad \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(3\,n^2-n-1\right)x^{2\,n}=-\frac{1}{1-x^2}+\frac{2\,x^2}{\left(1-x^2\right)^2}+\frac{6\,x^4}{\left(1-x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 27. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $X^2-X-1=a+b(2X+3)+c(2X+3)(2X+2)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(2X+3),(2X+3)(2X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2-X-1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-\frac{3}{2},-1$. Si l'on évalue l'égalité $X^2-X-1=a+b(2X+3)+c(2X+3)(2X+2)$ en $-\frac{3}{2}$, on obtient directement : $a=\frac{11}{4}$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=4\,c$, et on en déduit $c=\frac{1}{4}$. En conclusion, on a : ← page 3

$$X^2-X-1=\frac{11}{4}-\frac{7}{4}(2X+3)+\frac{1}{4}(2X+3)(2X+2).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2-n-1)2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)!} &= \frac{11}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+3)!}2^n x^{2\,n+1} - \frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+3)}{(2\,n+3)!}2^n x^{2\,n+1} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+3)(2\,n+2)}{(2\,n+3)!}2^n x^{2\,n+1} \\ &= \frac{11}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)!} - \frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \\ &= \frac{11}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1} x^{2\,n-1}}{(2\,n+1)!} - \frac{7}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1} x^{2\,n-1}}{(2\,n)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2-n-1)2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)!} &= \frac{11\sqrt{2}}{16\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} - \frac{7}{8\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{8}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \\ &= -\frac{7}{8\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(\frac{11\sqrt{2}}{16\,x^2}+\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(-\frac{1}{2\,x}\right) \\ &= -\frac{7}{8\,x}\cosh\left(\sqrt{2}x\right) + \left(\frac{11\sqrt{2}}{16\,x^2}+\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)\sinh\left(\sqrt{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 28. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+3X-1 = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+3X-1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+3X-1 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a : ← page 4

$$X^2+3X-1 = -1+4X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in\,]-1{,}1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3\,n-1\right)(-1)^n x^{2\,n+1} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-1)^n x^{2\,n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,(-1)^n x^{2\,n+1} \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n + 4\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^n \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n - 4\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^{n-1} + x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3\,n-1\right)(-1)^n x^{2\,n+1} = -\frac{x}{1+x^2} - \frac{4\,x^3}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{2\,x^5}{\left(1+x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 29. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - X + 1 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 - X + 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 - X + 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :
$$X^2 - X + 1 = 1 + X(X-1).$$

← page 4

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-3{,}3\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n + 1) \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\,x\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\,x\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\,x\right)^n + \frac{1}{9}\,x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{3}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n + 1) \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x} + \frac{\frac{2}{9}\,x^2}{\left(1 - \frac{1}{3}x\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 30. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

← page 4

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -3\right\}, \quad \frac{3}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+3)} = -\frac{1}{2\,n+3} + \frac{3}{5\,(2\,n+1)} + \frac{1}{5\,(n+3)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{7}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+3)} &= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x^2\right)^n}{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}x\right)^{2\,n}}{2\,n+3} + \frac{3}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}x\right)^{2\,n}}{2\,n+1} \\
&= \frac{1}{5} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x^2\right)^{n-2}}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}x\right)^{2\,n-2}}{2\,n+1} + \frac{3}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}x\right)^{2\,n}}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout

$x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{7}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+3)} = \frac{343}{5\,x^6} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{49\,\sqrt{\frac{1}{7}}}{x^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} + \frac{21\,\sqrt{\frac{1}{7}}}{5\,x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

$$= -\frac{343}{5\,x^6} \ln\left(-\frac{1}{7}\,x^2+1\right) + \left(\frac{21\,\sqrt{\frac{1}{7}}}{5\,x} - \frac{49\,\sqrt{\frac{1}{7}}}{x^3}\right) \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{7}}x+1}{\sqrt{\frac{1}{7}}x-1}\right) + \left(\frac{7\,\sqrt{7}\sqrt{\frac{1}{7}}}{x^2} - \frac{7}{10\,x^2} - \frac{49}{5\,x^4}\right)$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 31. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 4

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3\right\}, \qquad \frac{61}{2\,(2\,n+3)(n+3)} = \frac{61}{3\,(2\,n+3)} - \frac{61}{6\,(n+3)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-3{,}3[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{61\,\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+3)} = -\frac{61}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n}{n+3} + \frac{61}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n}{2\,n+3}$$

$$= -\frac{61}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n-2}}{n+1} + \frac{61}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n-1}}{2\,n+1}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{61\,\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+3)} = -\frac{549}{2\,x^3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{183\,\sqrt{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

$$= \frac{549}{2\,x^3}\ln\left(-\frac{1}{3}\,x+1\right) + \frac{183\,\sqrt{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{x}-1}\right) + \left(-\frac{61\,\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}{x} + \frac{61}{4\,x} + \frac{183}{2\,x^2}\right),$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{61\,\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+3)} = \frac{549}{2\,x^3}\ln\left(-\frac{1}{3}\,x+1\right) + \frac{183\,\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{-x}x}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-x}\right) + \left(-\frac{61\,\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}{x} + \frac{61}{4\,x} + \frac{183}{2\,x^2}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 32. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 4

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -1\}, \quad \frac{3}{(n+3)(n+1)} = -\frac{3}{2\,(n+3)} + \frac{3}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+3)(n+1)} &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^n x}{n+3} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^n x}{n+1}\\ &= -\frac{3}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^{n-2} x}{n+1} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+3)(n+1)} &= -\frac{81}{2\,x^5}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{9}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= \left(\frac{9}{2\,x}-\frac{81}{2\,x^5}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\,x^2+1\right) + \left(-\frac{9}{4\,x}+\frac{27}{2\,x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 33. Soit $x \in \left]-2{,}2\right[$. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^n &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n\\ &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n\\ &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\frac{1}{2}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^n = -\frac{2}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{x}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. Déterminons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $8X^2+12X = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une ← page 4

telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $8X^2+12X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $8X^2+12X = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $8=c$. En conclusion, on a :

$$8X^2+12X = 20X + 8X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} 4\left(2\,n^2+3\,n\right)(-2)^n\,x^{2\,n} &= 20\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-2)^n\,x^{2\,n} + 8\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,(-2)^n\,x^{2\,n}\\
&= 20\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-2\,x^2\right)^n + 8\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-2\,x^2\right)^n\\
&= -40\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-2\,x^2\right)^{n-1} + 32\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-2\,x^2\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 des dérivées de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ évaluée en $-2\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4\left(2\,n^2+3\,n\right)(-2)^n\,x^{2\,n} = -\frac{40\,x^2}{1+2x^2} + \frac{64\,x^4}{\left(1+2x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 35. Déterminons $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $3X+2 = a+b(X+2)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $3X+2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=3$, puis : $a=-4$. En conclusion, on a : ← page 4

$$3X+2 = -4+3(X+2).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(3\,n+2)x^n}{(n+2)!} &= -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}\,(-1)^n\,x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)}{(n+2)!}\,(-1)^n\,x^n\\
&= -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^n}{(n+2)!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^n}{(n+1)!}\\
&= -4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}\,x^{n-2}}{n!} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^{n-1}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(3\,n+2)x^n}{(n+2)!} &= -\frac{4}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} - \frac{3}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \left(-\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} + \left(-\frac{4\,(x-1)}{x^2}+\frac{3}{x}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}\right)e^{(-x)} + \left(-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 36. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $6X^2-X-1=a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,X,X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $6X^2-X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $6X^2-X-1=a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $6=c$. En conclusion, on a : ← page 4

$$6X^2-X-1=-1+5X+6X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\,]-1{,}1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(6\,n^2-n-1\right)(-1)^n\,x^{n+1} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{n+1}+5\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(-1)^n\,x^{n+1}+6\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\,(-1)^n\,x^{n+1} \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n+5\,x\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(-x)^n+6\,x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\,(-x)^n \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n-5\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(-x)^{n-1}+6\,x^3\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\,(-x)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x$. Plus précisément, pour tout $x\in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\quad \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(6\,n^2-n-1\right)(-1)^n\,x^{n+1}=-\frac{x}{1+x}-\frac{5\,x^2}{(1+x)^2}+\frac{12\,x^3}{(1+x)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 37. Déterminons $(a,\,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $X-1=a+b(2X)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(2X))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=\frac{1}{2}$, puis : $a=-1$. En conclusion, on a : ← page 4

$$X-1=-1+\frac{1}{2}(2X).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{75}{2}\right)^n (n-1)x^{2n+1}}{(2n)!} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{75}{2}\right)^n x^{2n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)}{(2n)!}\left(-\frac{75}{2}\right)^n x^{2n+1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{75}{2}\right)^n x^{2n+1}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{75}{2}\right)^n x^{2n+1}}{(2n-1)!} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{75}{2}\right)^n x^{2n+1}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{75}{2}\right)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{75}{2}\right)^n (n-1)x^{2n+1}}{(2n)!} &= -x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(5\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^{2n}}{(2n)!} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(5\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -x\cos\left(5\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}x^2 \sin\left(5\sqrt{\frac{3}{2}}x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 38. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+X-20 = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X-20, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+X-20 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = -20$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 5

$$X^2+X-20 = -20+2X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n-20\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2n+1} &= -20\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2n+1} \\ &= -20\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}x^2\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}x^2\right)^n \\ &= -20\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}x^2\right)^n + \frac{4}{3}x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}x^2\right)^{n-1} + \frac{4}{9}x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{2}{3}x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n-20\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2n+1} = -\frac{20\,x}{1-\frac{2}{3}x^2} + \frac{\frac{4}{3}x^3}{\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)^2} + \frac{\frac{8}{9}x^5}{\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 39. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2-3X+1=a+b(X+3)+c(X+3)(X+2)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(X+3),(X+3)(X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2-3X+1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-3,-2$. Si l'on évalue l'égalité $2X^2-3X+1=a+b(X+3)+c(X+3)(X+2)$ en -3, on obtient directement : $a=28$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2=c$. En conclusion, on a :

← page 5

$$2X^2-3X+1=28-13(X+3)+2(X+3)(X+2).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n^2-3\,n+1)x^{2\,n+1}}{(n+3)!} &= 28\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)!}x^{2\,n+1}-13\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+3)}{(n+3)!}x^{2\,n+1}\\ &\quad+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)!}x^{2\,n+1}\\ &=28\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{(n+3)!}-13\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{(n+2)!}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{(n+1)!}\\ &=28\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^{2\,n-5}}{n!}-13\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{2\,n-3}}{n!}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2\,n-1}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n^2-3\,n+1)x^{2\,n+1}}{(n+3)!} &= \frac{28}{x^5}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}-\frac{13}{x^3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}+\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\\ &=\left(\frac{28}{x^5}-\frac{13}{x^3}+\frac{2}{x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}+\left(-\frac{2}{x}+\frac{13\,(x^2+1)}{x^3}-\frac{14\,(x^4+2\,x^2+2)}{x^5}\right)\\ &=\left(\frac{28}{x^5}-\frac{13}{x^3}+\frac{2}{x}\right)e^{(x^2)}+\left(-\frac{3}{x}-\frac{15}{x^3}-\frac{28}{x^5}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 40. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+1=a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(2X+2),(2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1,-\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $X^2+1=a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a=2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=4\,c$, et on en déduit $c=\frac{1}{4}$. En conclusion, on a :

← page 5

$$X^2+1=2-\frac{3}{4}(2X+2)+\frac{1}{4}(2X+2)(2X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n)!} \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{19}\right)^{n-1} x^{n-1}}{(2\,n)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part), où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} &= -\frac{38}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{57\sqrt{\frac{1}{19}}}{4\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\
&= \left(-\frac{38}{x}+\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{57\sqrt{\frac{1}{19}}}{4\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{38}{x}\right) \\
&= \left(-\frac{38}{x}+\frac{1}{4}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{x}\right) - \frac{57\sqrt{\frac{1}{19}}}{4\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{x}\right) + \left(\frac{38}{x}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)\left(-\frac{1}{19}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} &= \left(-\frac{38}{x}+\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{57\sqrt{\frac{1}{19}}}{4\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{38}{x}\right) \\
&= \left(-\frac{38}{x}+\frac{1}{4}\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{-x}\right) - \frac{57\sqrt{\frac{1}{19}}}{4\sqrt{-x}}\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{19}}\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{38}{x}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 41. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + X = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 + X = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 5

$$X^2 + X = 2X + X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n\right)(-3)^n x^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-3)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,(-3)^n x^n \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-3\,x)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,(-3\,x)^n \\
&= -6\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-3\,x)^{n-1} + 9\,x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,(-3\,x)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 des dérivées de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ évaluée en $-3\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n\right)(-3)^n\, x^n = -\frac{6\,x}{1+3x} + \frac{18\,x^2}{(1+3x)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 42. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 5

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2, -1\right\}, \quad \frac{2}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} = \frac{8}{3\,(2\,n+1)} + \frac{2}{3\,(n+2)} - \frac{2}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-2)^n\, x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\,x^2\right)^n x}{n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\,x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+1} \\ &= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(2\,x^2\right)^{n-1} x}{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\,x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-2)^n\, x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} &= -\frac{1}{6\,x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{6\,x^3}\right)\ln\left(2\,x^2+1\right) + \frac{4}{3}\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\right) + \left(\frac{1}{3\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 43. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 5

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{3}{2\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{3}{2\,n+1} - \frac{3}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(-\frac{3}{5}\right)^n x^{2\,n}}{2\,(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{5}\,x^2\right)^n}{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^{2\,n}}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(-\frac{3}{5}\right)^n x^{2\,n}}{2\,(2\,n+1)(n+1)} &= -\frac{5}{2\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{5}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{5\sqrt{\frac{3}{5}}}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{5}{2\,x^2}\ln\left(\frac{3}{5}\,x^2+1\right) + \frac{5\sqrt{\frac{3}{5}}}{x}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 44. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 5

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}, \quad \frac{n}{(2\,n+3)(n+1)} = \frac{3}{2\,n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+1)} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(4\,x^2\right)^n x}{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^{2\,n} x}{2\,n+3} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(4\,x^2\right)^n x}{n+1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,x)^{2\,n-2} x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{1}{4\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(4\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{3}{8\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,x)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{1}{4\,x}\ln\left(-4\,x^2+1\right) + \frac{3}{8\,x^2}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{2\,x+1}{2\,x-1}\right) + \left(-\frac{3}{4\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 45. Déterminons $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X = a + b(2X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{1}{2}$, puis : $a = -\frac{1}{2}$. En conclusion, on a : ← page 5

$$X = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{26}\right)^n n x^{n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)!}\left(\frac{3}{26}\right)^n x^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)}{(2\,n+1)!}\left(\frac{3}{26}\right)^n x^{n+1} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{26}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{26}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{26}\right)^n n x^{n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{13}{3}\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}\\ &= \frac{1}{2}\,x\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{x}\right) - \frac{13}{3}\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{x}\sinh\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{26}\right)^n n x^{n+1}}{(2\,n+1)!} &= \frac{1}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{13\sqrt{\frac{3}{26}}x}{3\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}\,x\cos\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{-x}\right) - \frac{13\sqrt{\frac{3}{26}}x}{3\sqrt{-x}}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{26}}\sqrt{-x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 46. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $3X^2 = a + b(2X+1) + c(2X+1)(2X)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+1), (2X+1)(2X))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $3X^2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-\frac{1}{2}$,0. Si l'on évalue l'égalité $3X^2 = a + b(2X+1) + c(2X+1)(2X)$ en $-\frac{1}{2}$, on obtient directement : $a = \frac{3}{4}$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $3 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{3}{4}$. En conclusion, on a : ← page 5

$$3X^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(2X+1) + \frac{3}{4}(2X+1)(2X).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3\,n^2x^n}{(2\,n+1)!} &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+1)!}x^n - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+1)}{(2\,n+1)!}x^n\\ &\quad + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+1)(2\,n)}{(2\,n+1)!}x^n\\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2\,n+1)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2\,n)!} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(2\,n-1)!}\\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2\,n+1)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2\,n)!} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3\,n^2x^n}{(2\,n+1)!} &= \frac{3}{4\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{3}{4}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= -\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{4}\sqrt{x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= -\frac{3}{4}\cosh\left(\sqrt{x}\right) + \left(\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{4}\sqrt{x}\right)\sinh\left(\sqrt{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,n^2 x^n}{(2\,n+1)!} &= -\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\sqrt{-x}^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(\frac{3}{4\,\sqrt{-x}} + \frac{3\,x}{4\,\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\sqrt{-x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= -\frac{3}{4}\cos\left(\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{3}{4\,\sqrt{-x}} + \frac{3\,x}{4\,\sqrt{-x}}\right)\sin\left(\sqrt{-x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 47. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+2X-3 = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+2X-3, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+2X-3 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = -3$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 5

$$X^2+2X-3 = -3+3X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+2\,n-3\right)2^n x^{n+1}}{n!} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}2^n x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}2^n x^{n+1}\\ &\quad+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}2^n x^{n+1}\\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{(n-2)!}\\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} x^{n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+2} x^{n+3}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+2\,n-3\right)2^n x^{n+1}}{n!} &= -3\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!} + 6\,x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!} + 4\,x^3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!}\\ &= \left(-3\,x+6\,x^2+4\,x^3\right)e^{(2\,x)},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 48. Déterminons $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X-1 = a+b(2X)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(2X))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{1}{2}$, puis : $a = -1$. En conclusion, on a : ← page 6

$$X-1 = -1+\frac{1}{2}(2X).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-24)^n\,(n-1)x^{2\,n}}{(2\,n)!} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n)!}\,(-24)^n\,x^{2\,n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)}{(2\,n)!}\,(-24)^n\,x^{2\,n}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-24)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-24)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n-1)!}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-24)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-24)^{n+1}\,x^{2\,n+2}}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-24)^n\,(n-1)x^{2\,n}}{(2\,n)!} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\left(2\,\sqrt{6}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \sqrt{6}x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\left(2\,\sqrt{6}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \\ &= -1\cos\left(2\,\sqrt{6}x\right) - \sqrt{6}x\sin\left(2\,\sqrt{6}x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 49. Soit $x \in \,]-1{,}1[$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,(6\,n-1)x^{n+1} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-1)^n\,x^{n+1} \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + 6\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^n \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - 6\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,(6\,n-1)x^{n+1} = -\frac{x}{1+x} - \frac{6\,x^2}{(1+x)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 50. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 6

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2, -1\right\}, \qquad \frac{3}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} = \frac{4}{2\,n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \,]-2{,}2[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n}{n+2} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n}{n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n}}{2\,n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-1}}{n+1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n}{n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} &= \frac{16}{x^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{12}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{8}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\left(-\frac{12}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right)\ln\left(-\frac{1}{4}\,x^2 + 1\right) + \frac{8}{x}\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{x+2}{x-2}\right) + \left(-\frac{4}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 51. Soit $x \in]-1,1[$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,(9\,n-5)x^{2\,n+1} &= -5\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,x^{2\,n+1} + 9\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-1)^n\,x^{2\,n+1} \\ &= -5\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n + 9\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^n \\ &= -5\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n - 9\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,(9\,n-5)x^{2\,n+1} = -\frac{5\,x}{1+x^2} - \frac{9\,x^3}{\left(1+x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 52. Déterminons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $2X-1 = a + b(2X+2)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(2X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $2X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 1$, puis : $a = -3$. En conclusion, on a : ← page 6

$$2X-1 = -3 + (2X+2).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n-1)x^n}{(2\,n+2)!} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}x^n \\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2\,n+2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2\,n+1)!} \\ &= -3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(2\,n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part), où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$

et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n-1)x^n}{(2\,n+2)!} &= -\frac{3}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n}}{(2\,n)!}+\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= -\frac{3}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n}}{(2\,n)!}+\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\left(\frac{3}{x}\right)\\ &= -\frac{3}{x}\cosh\left(\sqrt{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}\sinh\left(\sqrt{x}\right)+\left(\frac{3}{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n-1)x^n}{(2\,n+2)!} &= -\frac{3}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2\,n}}{(2\,n)!}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\left(\frac{3}{x}\right)\\ &= -\frac{3}{x}\cos\left(\sqrt{-x}\right)+\frac{1}{\sqrt{-x}}\sin\left(\sqrt{-x}\right)+\left(\frac{3}{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 6

$$\forall n\in\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{2},-3\right\},\qquad \frac{17}{(2\,n+1)(n+3)}=\frac{34}{5\,(2\,n+1)}-\frac{17}{5\,(n+3)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\,]-1{,}1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{17\,(-1)^n\,x^n}{(2\,n+1)(n+3)} &= -\frac{17}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n+3}+\frac{34}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{2\,n+1}\\ &= -\frac{17}{5}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}\,x^{n-2}}{n+1}+\frac{34}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x=(\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{17\,(-1)^n\,x^n}{(2\,n+1)(n+3)} &= -\frac{17}{5\,x^3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1}+\frac{34}{5\,\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\sqrt{x}^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\frac{17}{5\,x^3}\ln(x+1)+\frac{34}{5\,\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{x}\right)+\left(-\frac{17}{10\,x}+\frac{17}{5\,x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{17\,(-1)^n\,x^n}{(2\,n+1)(n+3)}=-\frac{17}{5\,x^3}\ln(x+1)+\frac{34}{5\,\sqrt{-x}}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}-1}\right)+\left(-\frac{17}{10\,x}+\frac{17}{5\,x^2}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x\in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 54. Déterminons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X-1 = a+b(X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 1$, puis : $a = -2$. En conclusion, on a : ← page 6

$$X - 1 = -2 + (X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+1)!} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,(-6)^n\,x^{2\,n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!}\,(-6)^n\,x^{2\,n+1} \\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6)^n\,x^{2\,n+1}}{n!} \\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-6)^{n-1}\,x^{2\,n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6)^n\,x^{2\,n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+1)!} &= \frac{1}{3\,x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-6\,x^2\right)^n}{n!} + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-6\,x^2\right)^n}{n!} \\
&= \left(\frac{1}{3\,x} + x\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-6\,x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{1}{3\,x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3\,x} + x\right) e^{\left(-6\,x^2\right)} + \left(-\frac{1}{3\,x}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 55. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Le fait d'avoir un numérateur de degré 2 au numérateur ne change rien à la méthode. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 6

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{n^2 - n + 57}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)} = -\frac{243}{4\,(2\,n+3)} + \frac{77}{4\,(2\,n+1)} + \frac{21}{n+2}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-7,7\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2 - n + 57\right)\left(\frac{1}{49}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)} &= 21\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{49}\,x^2\right)^n}{n+2} - \frac{243}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n}}{2\,n+3} + \frac{77}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n}}{2\,n+1} \\
&= 21\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{49}\,x^2\right)^{n-1}}{n+1} - \frac{243}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n-2}}{2\,n+1} + \frac{77}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n}}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2 - n + 57\right)\left(\frac{1}{49}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+2)} &= \frac{50421}{x^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{49}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{83349}{4\,x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} + \frac{539}{4\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\
&= -\frac{50421}{x^4}\ln\left(-\frac{1}{49}\,x^2 + 1\right) + \left(\frac{539}{4\,x} - \frac{83349}{4\,x^3}\right)\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{x+7}{x-7}\right) + \left(\frac{7791}{4\,x^2}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x\in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 56. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 6

$$\forall n\in\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{2},-2\right\},\qquad\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+2)}=\frac{1}{3\,(2\,n+1)}-\frac{1}{6\,(n+2)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\,]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{2\,(2\,n+1)(n+2)}&=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n+2}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{2\,n+1}\\&=-\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{n-1}}{n+1}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x=(\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{2\,(2\,n+1)(n+2)}&=\frac{1}{6\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\sqrt{x}^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\&=\frac{1}{6\,x^2}\ln(x+1)+\frac{1}{3\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{x}\right)+\left(-\frac{1}{6\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{2\,(2\,n+1)(n+2)}=\frac{1}{6\,x^2}\ln(x+1)+\frac{1}{3\sqrt{-x}}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}-1}\right)+\left(-\frac{1}{6\,x}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x\in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 57. Soit $x\in\,]-2,2[$. On a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(n+1)x^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^n-\frac{1}{2}\,x\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{2}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (n+1)x^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}\,x}{\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 58. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 7

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3\right\}, \quad \frac{1}{(2\,n+3)(n+3)} = \frac{2}{3\,(2\,n+3)} - \frac{1}{3\,(n+3)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-2,2[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+3)(n+3)} &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n+3} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{2\,n+3} \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-2}}{n+1} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+3)(n+3)} &= -\frac{8}{3\,x^3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\,x^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{8}{3\,x^3}\ln\left(-\frac{1}{2}\,x+1\right) + \frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\,x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}-1}\right) + \left(-\frac{4\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\,x} + \frac{1}{3\,x} + \frac{4}{3\,x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+3)(n+3)} = \frac{8}{3\,x^3}\ln\left(-\frac{1}{2}\,x+1\right) + \frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{-x}x}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right) + \left(-\frac{4\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\,x} + \frac{1}{3\,x} + \frac{4}{3\,x^2}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 59. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 7

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-2\}, \quad \frac{2}{(n+3)(n+2)} = -\frac{2}{n+3} + \frac{2}{n+2}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-3)^n\,x^{2n}}{(n+3)(n+2)} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(3\,x^2)^n}{n+3} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(3\,x^2)^n}{n+2} \\ &= -2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}\,(3\,x^2)^{n-2}}{n+1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(3\,x^2)^{n-1}}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-3)^n\,x^{2n}}{(n+3)(n+2)} &= -\frac{2}{27\,x^6}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(3\,x^2)^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{9\,x^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(3\,x^2)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(-\frac{2}{9\,x^4} - \frac{2}{27\,x^6}\right)\ln\left(3\,x^2+1\right) + \left(\frac{1}{3\,x^2} + \frac{2}{9\,x^4}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 60. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 7

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-1\}, \quad \frac{1}{2\,(n+3)(n+1)} = -\frac{1}{4\,(n+3)} + \frac{1}{4\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,x^n}{2\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,x)^n}{n+3} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,x)^n}{n+1} \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}\,(2\,x)^{n-2}}{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,x)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\,x^n}{2\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{1}{32\,x^3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,x)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{8\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,x)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{8\,x} - \frac{1}{32\,x^3}\right)\ln(2\,x+1) + \left(-\frac{1}{16\,x} + \frac{1}{16\,x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 61. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 7

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}, \quad \frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+1)} = -\frac{1}{2\,n+3} + \frac{1}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3\,x)^n}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3\,x)^n}{2\,n+3} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3\,x)^n}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3\,x)^{n-1}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)} &= \frac{1}{6\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{9\,x^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{1}{6\,x}\ln\left(-3\,x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{9\,x^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{3}\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}\sqrt{x}-1}\right) + \left(\frac{1}{3\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{2\,(2\,n+3)(n+1)} = -\frac{1}{6\,x}\ln\left(-3\,x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{9\,\sqrt{-x}x}\arctan\left(\sqrt{3}\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{1}{3\,x}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 62. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 7

$$\forall n \in \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{3}{2}, -1\right\},\quad \frac{n-3}{2\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{9}{2\,(2\,n+3)} - \frac{2}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-2{,}2[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n(n-3)x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+1)} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1} + \frac{9}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{2\,n+3} \\ &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1} + \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1} x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-3)x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+1)} = -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{18\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

$$= 4\ln\left(-\frac{1}{2}\,x+1\right) + \frac{18\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}-1}\right) + \left(-9\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-3)x^{n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+1)} = 4\ln\left(-\frac{1}{2}\,x+1\right) + \frac{18\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-x}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right) + \left(-9\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 63. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - X = a + b(X+2) + c(X+2)(X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (X+2), (X+2)(X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 - X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-2, -1$. Si l'on évalue l'égalité $X^2 - X = a + b(X+2) + c(X+2)(X+1)$ en -2, on obtient directement : $a = 6$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 7

$$X^2 - X = 6 - 4(X+2) + (X+2)(X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+2)!} = 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)}{(n+2)!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}$$

$$= 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+2)!} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{n!}$$

$$= 6\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} x^{2\,n-3}}{n!} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x^{2\,n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{n!}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+2)!} &= \frac{27}{2\,x^3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\,x^2\right)^n}{n!} - \frac{6}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\,x^2\right)^n}{n!} + x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\,x^2\right)^n}{n!}\\ &= \left(\frac{27}{2\,x^3}-\frac{6}{x}+x\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\,x^2\right)^n}{n!} + \left(\frac{6}{x}-\frac{9\left(2\,x^2+3\right)}{2\,x^3}\right)\\ &= \left(\frac{27}{2\,x^3}-\frac{6}{x}+x\right)e^{\left(\frac{2}{3}\,x^2\right)} + \left(-\frac{3}{x}-\frac{27}{2\,x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 64. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+X = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+X = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a : ← page 7

$$X^2+X = 2X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-2,2\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1}\\ &= 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n\\ &= \frac{1}{2}\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{1}{16}\,x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 des dérivées de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ évaluée en $\dfrac{1}{4}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1} = \frac{\frac{1}{2}\,x^3}{1-\frac{1}{4}x^2} + \frac{\frac{1}{8}\,x^5}{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 65. Déterminons $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $30X = a+b(X+3)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $30X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=30$, puis : $a=-90$. En conclusion, on a : ← page 7

$$30X = -90+30(X+3).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{30\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n n x^{2\,n+1}}{(n+3)!} &= -90 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1} + 30 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1}\\ &= -90 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+3)!} + 30 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(n+2)!}\\ &= -90 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} x^{2\,n-5}}{n!} + 30 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} x^{2\,n-3}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{30\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n n x^{2\,n+1}}{(n+3)!} &= \frac{720}{x^5} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n!} + \frac{120}{x^3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n!}\\ &= \left(\frac{720}{x^5} + \frac{120}{x^3}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n!} + \left(\frac{60\,(x^2-2)}{x^3} - \frac{90\,(x^4 - 4\,x^2 + 8)}{x^5}\right)\\ &= \left(\frac{720}{x^5} + \frac{120}{x^3}\right) e^{\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)} + \left(-\frac{30}{x} + \frac{240}{x^3} - \frac{720}{x^5}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 66. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+43X+9 = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2+43X+9$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+43X+9 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=9$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a : ← page 7

$$X^2+43X+9 = 9+44X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{6}{5}}, \sqrt{\frac{6}{5}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+43\,n+9)\left(\frac{5}{6}\right)^n x^{2\,n} &= 9\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n x^{2\,n} + 44\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^n x^{2\,n}\\ &= 9\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\,x^2\right)^n + 44\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\,x^2\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\,x^2\right)^n\\ &= 9\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\,x^2\right)^n + \frac{110}{3}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{25}{36}\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{5}{6}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+43\,n+9)\left(\frac{5}{6}\right)^n x^{2\,n} = \frac{9}{1-\frac{5}{6}x^2} + \frac{\frac{110}{3}\,x^2}{\left(1-\frac{5}{6}x^2\right)^2} + \frac{\frac{25}{18}\,x^4}{\left(1-\frac{5}{6}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 8

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}, \quad \frac{7}{3\,(n+2)(n+1)} = -\frac{7}{3\,(n+2)} + \frac{7}{3\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\,x^{2\,n+1}}{3\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{7}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n x}{n+2} + \frac{7}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n x}{n+1}\\ &= -\frac{7}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{7}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\,x^{2\,n+1}}{3\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{7}{3\,x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{7}{3\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= -\left(\frac{7}{3\,x} - \frac{7}{3\,x^3}\right)\ln\left(-x^2+1\right) + \left(\frac{7}{3\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 68. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-10\right)^n (n+2)x^n}{n!} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(-10\right)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}\left(-10\right)^n x^n\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-10\right)^n x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-10\right)^n x^n}{(n-1)!}\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-10\right)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-10\right)^{n+1} x^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-10\right)^n (n+2)x^n}{n!} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-10\,x\right)^n}{n!} - 10\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-10\,x\right)^n}{n!}\\ &= (2-10\,x)\,e^{(-10\,x)},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 69. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 8

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}, \quad \frac{n-30}{2\,(n+2)(n+1)} = \frac{16}{n+2} - \frac{31}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-30)x^{2\,n}}{2\,(n+2)(n+1)} &= 16\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n+2} - \frac{31}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n+1}\\ &= 16\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n-1}}{n+1} - \frac{31}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-30)x^{2\,n}}{2\,(n+2)(n+1)} &= \frac{16}{x^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{31}{2\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(-\frac{31}{2\,x^2} + \frac{16}{x^4}\right)\ln\left(-x^2+1\right) + \left(-\frac{16}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $16X^2 + 2X - 1 = a + b(2X+2) + c(2X+2)(2X+1)$. ← page 8
L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+2), (2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $16X^2 + 2X - 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1, -\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $16X^2+2X-1 = a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a = 13$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $16 = 4\,c$, et on en déduit $c = 4$. En conclusion, on a :

$$16X^2 + 2X - 1 = 13 - 11(2X+2) + 4(2X+2)(2X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(16\,n^2+2\,n-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} &= 13\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n - 11\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n \\ &\quad + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n \\ &= 13\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} - 11\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+1)!} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n)!} \\ &= 13\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^{n-1}}{(2\,n)!} - 11\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+1)!} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part), où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(16\,n^2+2\,n-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} &= -\frac{26}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{22\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= \left(-\frac{26}{x}+4\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{22\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{26}{x}\right) \\ &= \left(-\frac{26}{x}+4\right)\cos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right) - \frac{22\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right) + \left(\frac{26}{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(16\,n^2+2\,n-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} &= \left(-\frac{26}{x}+4\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{22\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{26}{x}\right) \\ &= \left(-\frac{26}{x}+4\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right) - \frac{22\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-x}}\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{26}{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 71. Déterminons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + 2X + 5 = a + b(2X+2) + c(2X+2)(2X+1)$. ← page 8 L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+2), (2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+2X+5, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1, -\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $X^2+2X+5 = a + b(2X+2) + c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a = 4$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{1}{4}$. En conclusion, on a :

$$X^2 + 2X + 5 = 4 + \frac{1}{4}(2X+2) + \frac{1}{4}(2X+2)(2X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+2\,n+5)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+2)!} &= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1} \\
&= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+2)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n)!} \\
&= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} x^{n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+2\,n+5)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+2)!} &= -40\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\
&= \left(-40 + \frac{1}{4}\,x\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + (40) \\
&= \left(-40 + \frac{1}{4}\,x\right)\cos\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\right) + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{x}\right) + (40)\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+2\,n+5)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+2)!} &= \left(-40 + \frac{1}{4}\,x\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{5\sqrt{\frac{1}{10}}x}{2\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + (40) \\
&= \left(-40 + \frac{1}{4}\,x\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{-x}\right) + \frac{5\sqrt{\frac{1}{10}}x}{2\sqrt{-x}}\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{-x}\right) + (40)\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 72. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. ← page 8 Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}\,, \quad \frac{1}{2\,(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{2\,(n+2)} + \frac{1}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in\,]-3{,}3[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n}{2\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n}{n+1}\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n-1}}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n}{2\,(n+2)(n+1)} &= \frac{9}{2\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{3}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{3}\,x\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= \left(\frac{3}{2\,x} + \frac{9}{2\,x^2}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\,x+1\right) + \left(-\frac{3}{2\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 73. Déterminons $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $5X+1 = a+b(2X)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (2X))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $5X+1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{5}{2}$, puis : $a = 1$. En conclusion, on a : ← page 8

$$5X+1 = 1 + \frac{5}{2}(2X).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^n (5\,n+1)x^n}{(2\,n)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n)!}\left(-\frac{1}{6}\right)^n x^n + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)}{(2\,n)!}\left(-\frac{1}{6}\right)^n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^n x^n}{(2\,n)!} + \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^n x^n}{(2\,n-1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^n x^n}{(2\,n)!} + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} x^{n+1}}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^n (5\,n+1)x^n}{(2\,n)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= 1\cos\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{x}\right) - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^n (5\,n+1)x^n}{(2\,n)!} &= 1\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{5\sqrt{\frac{1}{6}}x}{2\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= 1\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{-x}\right) - \frac{5\sqrt{\frac{1}{6}}x}{2\sqrt{-x}}\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{-x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 74. Déterminons $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X = a+b(X+1)$. L'existence d'une telle décomposition ← page 8

est assurée par le fait que la famille $(1,(X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=1$, puis : $a=-1$. En conclusion, on a :

$$X = -1 + (X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{31^n n x^{2n+1}}{(n+1)!} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} 31^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} 31^n x^{2n+1} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{31^n x^{2n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{31^n x^{2n+1}}{n!} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{31^{n-1} x^{2n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{31^n x^{2n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{31^n n x^{2n+1}}{(n+1)!} &= -\frac{1}{31\,x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(31\,x^2\right)^n}{n!} + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(31\,x^2\right)^n}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{31\,x} + x\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(31\,x^2\right)^n}{n!} + \left(\frac{1}{31\,x}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{31\,x} + x\right) e^{\left(31\,x^2\right)} + \left(\frac{1}{31\,x}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 75. Soit $x \in \left]-2\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$. On a : ← page 8

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (n+1) x^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n x^{2n+1} \\
&= x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\,x^2\right)^n + x \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{3}{4}\,x^2\right)^n \\
&= x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\,x^2\right)^n + \frac{3}{4}\,x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{3}{4}\,x^2\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{3}{4}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (n+1) x^{2n+1} = \frac{x}{1-\frac{3}{4}x^2} + \frac{\frac{3}{4}\,x^3}{\left(1-\frac{3}{4}x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 76. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+2X-1 = a + b(X+1) + c(X+1)X$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(X+1),(X+1)X)$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+2X-1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison ← page 8

linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1,0$. Si l'on évalue l'égalité $X^2+2X-1=a+b(X+1)+c(X+1)X$ en -1, on obtient directement : $a=-2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a :

$$X^2+2X-1=-2+(X+1)+(X+1)X.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(n^2+2\,n-1\right)(-1)^n\,x^n}{(n+1)!}&=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-1)^n\,x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)!}(-1)^n\,x^n\\&\quad+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)n}{(n+1)!}(-1)^n\,x^n\\&=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{(n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{(n-1)!}\\&=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{n-1}}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,x^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(n^2+2\,n-1\right)(-1)^n\,x^n}{(n+1)!}&=\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\\&=\left(\frac{2}{x}+1-x\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\left(-\frac{2}{x}\right)\\&=\left(\frac{2}{x}+1-x\right)e^{(-x)}+\left(-\frac{2}{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 77. Déterminons $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $X+4=a+b(2X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X+4$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=\frac{1}{2}$, puis : $a=\frac{7}{2}$. En conclusion, on a : ← page 9

$$X+4=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(2X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(n+4)x^{2\,n}}{(2\,n+1)!}&=\frac{7}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+1)!}2^nx^{2\,n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+1)}{(2\,n+1)!}2^nx^{2\,n}\\&=\frac{7}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^nx^{2\,n}}{(2\,n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^nx^{2\,n}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(n+4)x^{2\,n}}{(2\,n+1)!}&=\frac{7\sqrt{2}}{4\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}\\&=\frac{1}{2}\cosh\left(\sqrt{2}x\right)+\frac{7\sqrt{2}}{4\,x}\sinh\left(\sqrt{2}x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. Déterminons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $6X^2 - 2X + 20 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $6X^2 - 2X + 20$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $6X^2 - 2X + 20 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 20$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $6 = c$. En conclusion, on a : ← page 9

$$6X^2 - 2X + 20 = 20 + 4X + 6X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-2,2[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(3n^2 - n + 10\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n &= 20\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n \\ &= 20\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x\right)^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}x\right)^n + 6\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}x\right)^n \\ &= 20\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x\right)^n - 2x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}x\right)^{n-1} + \frac{3}{2}x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}x\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{2}x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(3n^2 - n + 10\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n = \frac{20}{1 + \frac{1}{2}x} - \frac{2x}{\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2} + \frac{3x^2}{\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 79. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 9

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -2\right\}, \qquad \frac{1}{3(2n+3)(n+2)} = \frac{2}{3(2n+3)} - \frac{1}{3(n+2)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-11,11[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{11}\right)^n x^{n+1}}{3(2n+3)(n+2)} &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{11}x\right)^n x}{n+2} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{11}x\right)^n x}{2n+3} \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{11}x\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{11}x\right)^{n-1} x}{2n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{11}\right)^n x^{n+1}}{3\,(2\,n+3)(n+2)}=\frac{121}{3\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{11}\,x\right)^{n+1}}{n+1}-\frac{242\sqrt{\frac{1}{11}}}{3\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{11}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

$$=\frac{121}{3\,x}\ln\left(\frac{1}{11}\,x+1\right)-\frac{242\sqrt{\frac{1}{11}}}{3\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{11}}\sqrt{x}\right)+\left(\frac{22}{3}\sqrt{11}\sqrt{\frac{1}{11}}-\frac{11}{3}\right),$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{11}\right)^n x^{n+1}}{3\,(2\,n+3)(n+2)}=\frac{121}{3\,x}\ln\left(\frac{1}{11}\,x+1\right)-\frac{242\sqrt{\frac{1}{11}}}{3\sqrt{-x}}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{11}}\sqrt{-x}+1}{\sqrt{\frac{1}{11}}\sqrt{-x}-1}\right)+\left(\frac{22}{3}\sqrt{11}\sqrt{\frac{1}{11}}-\frac{11}{3}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x\in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 80. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+2X-4=a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,X,X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+2X-4, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+2X-4=a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-4$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a : ← page 9

$$X^2+2X-4=-4+3X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\,]-1{,}1[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+2\,n-4\right)x^n=-4\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)x^n$$

$$=-4\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+3\,x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, qu'on a dérivée terme à terme. Plus précisément, pour tout $x\in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\quad\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+2\,n-4\right)x^n=-\frac{4}{1-x}+\frac{3\,x}{(1-x)^2}+\frac{2\,x^2}{(1-x)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 81. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2-6X+2 = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2-6X+2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $2X^2-6X+2 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2=c$. En conclusion, on a : ← page 9

$$2X^2-6X+2 = 2-4X+2X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n^2-3\,n+1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1} \\
&= 2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n - 4\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n \\
&= 2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n + 2\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\,x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{2}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n^2-3\,n+1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1} = \frac{2\,x}{1+\frac{1}{2}x^2} + \frac{2\,x^3}{\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^2} + \frac{x^5}{\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 82. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 9

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \qquad \frac{1}{4\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{2\,(2\,n+1)} - \frac{1}{4\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n x^{n+1}}{4\,(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(10\,x)^n\,x}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(10\,x)^n\,x}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n x^{n+1}}{4\,(2\,n+1)(n+1)} &= -\frac{1}{40}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(10\,x)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{20}\,\sqrt{10}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{10}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\
&= \frac{1}{40}\ln\left(-10\,x+1\right) + \frac{1}{20}\,\sqrt{10}\sqrt{x}\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{10}\sqrt{x}+1}{\sqrt{10}\sqrt{x}-1}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n x^{n+1}}{4\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{40} \ln\left(-10\,x+1\right) + \frac{\sqrt{10}x}{20\,\sqrt{-x}} \arctan\left(\sqrt{10}\sqrt{-x}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 83. Déterminons $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $7X = a + b(X+2)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, (X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $7X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 7$, puis : $a = -14$. En conclusion, on a : ← page 9

$$7X = -14 + 7(X+2).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\,(-1)^n\,nx^{2\,n}}{(n+2)!} &= -14 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} \left(-1\right)^n x^{2\,n} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)}{(n+2)!} \left(-1\right)^n x^{2\,n} \\
&= -14 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^n x^{2\,n}}{(n+2)!} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^n x^{2\,n}}{(n+1)!} \\
&= -14 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^{n-2} x^{2\,n-4}}{n!} + 7 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^{n-1} x^{2\,n-2}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\,(-1)^n\,nx^{2\,n}}{(n+2)!} &= -\frac{14}{x^4} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} - \frac{7}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} \\
&= \left(-\frac{14}{x^4} - \frac{7}{x^2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} + \left(\frac{7}{x^2} - \frac{14\left(x^2-1\right)}{x^4}\right) \\
&= \left(-\frac{14}{x^4} - \frac{7}{x^2}\right) e^{\left(-x^2\right)} + \left(-\frac{7}{x^2} + \frac{14}{x^4}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 84. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - 2 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 - 2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 - 2 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = -2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a : ← page 9

$$X^2 - 2 = -2 + X + X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{39}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{39}{2}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2-2\right)\left(\frac{8}{39}\right)^n x^{2n+1} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{39}\right)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{8}{39}\right)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{8}{39}\right)^n x^{2n+1}\\ &= -2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{39}\,x^2\right)^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{8}{39}\,x^2\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{8}{39}\,x^2\right)^n\\ &= -2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{39}\,x^2\right)^n + \frac{8}{39}\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{8}{39}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{64}{1521}\,x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{8}{39}\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{8}{39}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2-2\right)\left(\frac{8}{39}\right)^n x^{2n+1} = -\frac{2\,x}{1-\frac{8}{39}x^2} + \frac{\frac{8}{39}\,x^3}{\left(1-\frac{8}{39}x^2\right)^2} + \frac{\frac{128}{1521}\,x^5}{\left(1-\frac{8}{39}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 85. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+X-1 = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X-1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+X-1 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a : ← page 9

$$X^2+X-1 = -1+2X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n-1\right)(-6)^n x^{2n} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-6)^n x^{2n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-6)^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,(-6)^n x^{2n}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-6\,x^2\right)^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-6\,x^2\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-6\,x^2\right)^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-6\,x^2\right)^n - 12\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-6\,x^2\right)^{n-1} + 36\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-6\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-6\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n-1\right)(-6)^n x^{2n} = -\frac{1}{1+6x^2} - \frac{12\,x^2}{\left(1+6x^2\right)^2} + \frac{72\,x^4}{\left(1+6x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 86. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 9

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}, \quad \frac{3}{(n+2)(n+1)} = -\frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,x^{2\,n}}{(n+2)(n+1)} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\left(x^2\right)^n}{n+2} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\left(x^2\right)^n}{n+1}\\ &= -3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,\left(x^2\right)^{n-1}}{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\left(x^2\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,x^{2\,n}}{(n+2)(n+1)} &= \frac{3}{x^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{3}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= \left(\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)\ln\left(x^2+1\right) + \left(-\frac{3}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 87. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 10

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2},-3,-1\right\}, \quad \frac{n}{2\,(2\,n+1)(n+3)(n+1)} = -\frac{1}{5\,(2\,n+1)} - \frac{3}{20\,(n+3)} + \frac{1}{4\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-2,2[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+3)(n+1)} &= -\frac{3}{20}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+3} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{2\,n+1}\\ &= -\frac{3}{20}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-2} x}{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x=(\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+3)(n+1)} &= -\frac{6}{5\,x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= \left(-\frac{6}{5\,x^2}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\,x+1\right) - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right) + \left(\frac{3}{5\,x}-\frac{3}{20}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+3)(n+1)} = \left(-\frac{6}{5\,x^2}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\,x+1\right) - \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}x}{5\sqrt{-x}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}-1}\right) + \left(\frac{3}{5\,x}-\frac{3}{20}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 88. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Le fait d'avoir un numérateur de degré 2 au numérateur ne change rien à la méthode. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 10

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -3, -1\right\}, \quad \frac{2\,n^2 - n - 11}{(2\,n+1)(n+3)(n+1)} = -\frac{8}{2\,n+1} + \frac{1}{n+3} + \frac{4}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n^2 - n - 11)3^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+3)(n+1)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,x^2\right)^n}{n+3} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,x^2\right)^n}{n+1} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}x\right)^{2\,n}}{2\,n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(3\,x^2\right)^{n-2}}{n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,x^2\right)^n}{n+1} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}x\right)^{2\,n}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n^2 - n - 11)3^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+3)(n+1)} &= \frac{1}{27\,x^6} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(3\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{4}{3\,x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{8\,\sqrt{3}}{3\,x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\left(\frac{4}{3\,x^2} + \frac{1}{27\,x^6}\right) \ln\left(-3\,x^2 + 1\right) - \frac{8\,\sqrt{3}}{3\,x} \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{3}x - 1}\right) + \left(-\frac{1}{6\,x^2} - \frac{1}{9\,x^4}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 89. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 10

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}, \quad \frac{8\,n+1}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{11}{2\,(2\,n+3)} - \frac{7}{4\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(8\,n+1)x^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{11}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{xx^{2\,n}}{2\,n+3} \\ &= -\frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{11}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{xx^{2\,n-2}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(8\,n+1)x^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{7}{4\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{11}{2\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{7}{4\,x}\ln\left(-x^2+1\right) + \frac{11}{2\,x^2}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) + \left(-\frac{11}{2\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 90. Soit $x \in]-2,2[$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^n &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \\ &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}x\right)^n \\ &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{2}x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^n = -\frac{2}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{x}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 91. Déterminons $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2 - X + 21 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une ← page 10

base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2 - X + 21$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $2X^2 - X + 21 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 21$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2 = c$. En conclusion, on a :

$$2X^2 - X + 21 = 21 + X + 2X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2\,n^2 - n + 21\right)(-1)^n\, x^{2\,n} &= 21 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-1)^n\, x^{2\,n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,(-1)^n\, x^{2\,n}\\ &= 21\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^n + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^n\\ &= 21\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n - x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^{n-1} + 2\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\,n^2 - n + 21\right)(-1)^n\, x^{2\,n} = \frac{21}{1+x^2} - \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{4\,x^4}{\left(1+x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 92. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $3X^2 - 5X + 1 = a + bX + cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $3X^2 - 5X + 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $3X^2 - 5X + 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $3 = c$. En conclusion, on a : ← page 10

$$3X^2 - 5X + 1 = 1 - 2X + 3X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(3\,n^2 - 5\,n + 1\right)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{2\,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{2\,n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{2\,n} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{2\,n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{10}\,x^2\right)^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{10}\,x^2\right)^n + 3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{10}\,x^2\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{10}\,x^2\right)^n + \frac{1}{5}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{10}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{3}{100}\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{10}\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{10}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,n^2-5\,n+1)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^{2\,n}=\frac{1}{1+\frac{1}{10}x^2}+\frac{\frac{1}{5}\,x^2}{\left(1+\frac{1}{10}x^2\right)^2}+\frac{\frac{3}{50}\,x^4}{\left(1+\frac{1}{10}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. Déterminons $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2+1=a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(2X+2),(2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2+1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1,-\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $2X^2+1=a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a=3$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2=4\,c$, et on en déduit $c=\frac{1}{2}$. En conclusion, on a : ← page 10

$$2X^2+1=3-\frac{3}{2}(2X+2)+\frac{1}{2}(2X+2)(2X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n^2+1)x^{2\,n}}{(2\,n+2)!}&=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+2)!}x^{2\,n}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}x^{2\,n}\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}x^{2\,n}\\&=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n+2)!}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}\\&=3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2\,n-2}}{(2\,n)!}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n^2+1)x^{2\,n}}{(2\,n+2)!}&=\frac{3}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}-\frac{3}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}\\&=\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}-\frac{3}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\left(-\frac{3}{x^2}\right)\\&=\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}\right)\cosh(x)-\frac{3}{2\,x}\sinh(x)+\left(-\frac{3}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 94. Soit $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$. On a : ← page 10

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(n+1)x^{2\,n}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}+\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^n-\frac{1}{2}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{2}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (n+1) x^{2\,n} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2} - \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 95. Déterminons $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X-1 = a+b(X+1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1,(X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=1$, puis : $a=-2$. En conclusion, on a : ← page 10

$$X-1 = -2 + (X+1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+1)!} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,(-1)^n\,x^{2\,n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!}\,(-1)^n\,x^{2\,n+1} \\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{n!} \\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^{2\,n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+1)!} &= \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} \\
&= \left(\frac{2}{x}+x\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{2}{x}\right) \\
&= \left(\frac{2}{x}+x\right) e^{\left(-x^2\right)} + \left(-\frac{2}{x}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 96. Déterminons $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+1 = a+bX+cX(X-1)$. L'existence d'une telle décomposition est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+1 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a : ← page 11

$$X^2+1 = 1+X+X(X-1).$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)x^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)x^{n+1}\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n}+x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n}+x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n}\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n}+x^2\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+x^3\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\quad \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)x^{n+1}=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{2\,x^3}{(1-x)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 97. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. ← page 11 Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{3}{2},-2\right\},\quad \frac{n}{(2\,n+3)(n+2)}=-\frac{3}{2\,n+3}+\frac{2}{n+2}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx^{n+1}}{(2\,n+3)(n+2)} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+2}-3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2\,n+3}\\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n+1}-3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx^{n+1}}{(2\,n+3)(n+2)} &= \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{3}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\frac{2}{x}\ln(-x+1)-\frac{3}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+(1)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx^{n+1}}{(2\,n+3)(n+2)}=-\frac{2}{x}\ln(-x+1)-\frac{3}{\sqrt{-x}}\arctan\left(\sqrt{-x}\right)+(1)\,,$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Corrigé 98. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 11

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, -1 \right\}, \qquad \frac{26\,n+1}{(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{24}{2\,n+1} + \frac{25}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n(26\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} = 25 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(6\,x)^n\,x}{n+1} - 24 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(6\,x)^n\,x}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n(26\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} &= \frac{25}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(6\,x)^{n+1}}{n+1} - 4\,\sqrt{6}\sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{6}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{25}{6} \ln(-6\,x+1) - 4\,\sqrt{6}\sqrt{x}\frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\sqrt{6}\sqrt{x}+1}{\sqrt{6}\sqrt{x}-1} \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n(26\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{25}{6} \ln(-6\,x+1) - \frac{4\,\sqrt{6}x}{\sqrt{-x}} \arctan \left(\sqrt{6}\sqrt{-x} \right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Corrigé 99. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 11

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -1 \right\}, \qquad \frac{n-3}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{9}{4\,(2\,n+3)} - \frac{1}{n+1}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-3)x^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\left(x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{9}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x x^{2\,n}}{2\,n+3} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\left(x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x x^{2\,n-2}}{2\,n+1} \end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-3)x^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{9}{4\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{9}{4\,x^2}\arctan(x) + \left(\frac{9}{4\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 100. Effectuons d'abord une décomposition en éléments simples. La méthode est classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors : ← page 11

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}\,, \qquad \frac{1}{2\,(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{2\,(n+2)} + \frac{1}{2\,(n+1)}.$$

On peut alors calculer la somme. Soit $x \in \left]-\sqrt{11}, \sqrt{11}\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\right)^n x^{2\,n+1}}{2\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\,x^2\right)^n x}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\,x^2\right)^n x}{n+1} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\,x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\,x^2\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\right)^n x^{2\,n+1}}{2\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{121}{2\,x^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{11}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{11}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(\frac{11}{2\,x} - \frac{121}{2\,x^3}\right)\ln\left(-\frac{1}{11}\,x^2+1\right) + \left(\frac{11}{2\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.