Calcul de la somme d'une série entière (guidé)

Calcul d'une somme de série entière, en se ramenant à des sommes usuelles : la première question vous aide en cela (mais vous pouvez avoir à y penser spontanément dans un exercice, et il est donc important que vous compreniez, après avoir fait le calcul, pourquoi l'on vous a demandé de faire cette décomposition). Mes documents *Méthodes* (section 2.2) sont prodigues en exemples.

Commentaire sur la programmation de certains corrigés. Parfois, le corrigé ne cherchera pas à regrouper naturellement certains produits de puissances de x, en laissant xx^n au lieu d'écrire x^{n+1}. C'est issu d'un défaut de programmation que je n'ai pas pris le temps de corriger... Un jour, peut-être ? En tous les cas, ne cherchez pas une vraie motivation mathématique à cela et n'imitez pas cette façon de faire.

Commentaire général sur le corrigé de ces exercices. Je ne montrerai pas que les sommes apparaissant dans les calculs existent bien pour tout x dans l'intervalle considéré, et ne justifierai pas la légitimité de mes dérivations ou intégrations terme à terme éventuelles ; et ce, afin de me concentrer sur la principale difficulté ici, à savoir : la réduction à des sommes de série entière usuelles. Mais dans une rédaction d'examen ou de concours, vous auriez à justifier en détail l'existence des sommes et la validité de vos opérations.

Exercice 1. → page 18

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \qquad \frac{7\,n+2}{(2\,n+1)(n+2)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-66{,}66\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{66}\right)^n (7\,n+2)x^n}{(2\,n+1)(n+2)}.$$

Exercice 2. → page 18

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \qquad \frac{1}{(2\,n+1)(n+2)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)(n+2)}.$$

Exercice 3. → page 19

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - X - 1 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - n - 1\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}.$$

Exercice 4. → page 19

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3, -1\right\}, \qquad \frac{3}{(2\,n+3)(n+3)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{n+3} + \frac{c}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 \cdot 2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 5. → page 20

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{1}{4\,(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{4\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 6. → page 21

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $31X^2 + 9X - 44 = a + b(X+2) + c(X+2)(X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(31\,n^2 + 9\,n - 44\right)(-1)^n\, x^{2\,n+1}}{(n+2)!}.$$

Exercice 7. → page 21

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $4X + 2 = a + b(2X)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(2\,n+1)x^{2\,n}}{(2\,n)!}.$$

Exercice 8. → page 22

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2, -1\right\}, \quad \frac{n-1}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 9. → page 22

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{1}{3\,(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n}{3\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 10. → page 23

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -2\right\}, \quad \frac{n-1}{2\,(2\,n+3)(n+2)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n}}{2\,(2\,n+3)(n+2)}.$$

Exercice 11. → page 24

1. Déterminer $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2 + X + 41 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{39}, \sqrt{39}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2\,n^2 + n + 41\right) \left(-\frac{1}{39}\right)^n x^{2\,n}.$$

Exercice 12. → page 24

1. Déterminer $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X = a + b(X+3)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)^n n x^{2\,n+1}}{(n+3)!}.$$

Exercice 13. → page 25

1. Déterminer $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}, \quad \frac{5}{3\,(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1}}{3\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 14. → page 25

1. Déterminer $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}, \quad \frac{933}{2\,(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{933\,\left(\frac{4}{3}\right)^n x^{n+1}}{2\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 15. → page 26

1. Déterminer $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3, -2\right\}, \quad \frac{3\,(n+5)}{(2\,n+3)(n+3)(n+2)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{n+3} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-7)^n\,(n+5)x^{n+1}}{(2\,n+3)(n+3)(n+2)}.$$

Exercice 16. → page 27

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $3X = a + b(X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,nx^n}{(n+1)!}.$$

Exercice 17. → page 27

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{n}{6\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \,]-1,1[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{2\,n}}{6\,(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 18. → page 28

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $11X - 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \,]-1,1[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (11\,n-1)x^{2\,n+1}.$$

Exercice 19. → page 28

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2\}, \quad \frac{1}{(n+3)(n+2)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2\sqrt{\frac{38}{3}}, 2\sqrt{\frac{38}{3}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{152}\right)^n x^{2\,n}}{(n+3)(n+2)}.$$

Exercice 20. → page 29

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - 70X + 2 = a + b(2X+3) + c(2X+3)(2X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2 - 70\,n + 2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+3)!}.$$

Exercice 21. → page 29

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + 10X + 1 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2 + 10\,n + 1\right)4^n x^{2\,n}}{(n+3)!}.$$

Exercice 22. → page 30

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2\}, \quad \frac{n+12}{3\,(n+3)(n+2)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (n+12)x^{2\,n}}{3\,(n+3)(n+2)}.$$

Exercice 23. → page 31

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $4X - 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\right)^n (4\,n-1)x^{n+1}}{n!}.$$

Exercice 24. → page 31

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $4X^2 - 6X + 1 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in]-10{,}10[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (4\,n^2 - 6\,n + 1)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^n.$$

Exercice 25. → page 32

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + b(X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+2)!}.$$

Exercice 26. → page 32

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in]-2{,}2[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 27. → page 32

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $5X - 7 = a + b(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)^n (5\,n-7)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Exercice 28. → page 33

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{1}{6\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{6\,(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 29. → page 33

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $24X^2 + 2X - 1 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(24\,n^2 + 2\,n - 1\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n x^{2\,n}.$$

Exercice 30. → page 34

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{3}{(2\,n+1)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\, x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 31. → page 35

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + b(X+3)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n}}{(n+3)!}.$$

Exercice 32. → page 35

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $5X^2 + 5X = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(n^2 + n\right)x^{2\,n}.$$

Exercice 33. → page 36

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2, -1\}, \quad \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 34. → page 36

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{3\,n+1}{2\,(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{15}, \frac{1}{15}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-15)^n\,(3\,n+1)x^{n+1}}{2\,(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 35. → page 37

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2 - 89X - 1 = a + b(2X+3) + c(2X+3)(2X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2 - 89\,n - 1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+3)!}.$$

Exercice 36. → page 37

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{2\,n^2 + 2\,n - 1}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{2\,n+1} + \frac{c}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2 + 2\,n - 1\right)(-4)^n\,x^n}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 37. → page 38

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2, -1\}, \quad \frac{n^2 + 2\,n - 1}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2 + 2\,n - 1\right)(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 38. → page 39

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $5X^2 + 4X + 1 = a + b(X+1) + c(X+1)X$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5\,n^2 + 4\,n + 1)x^{2\,n}}{(n+1)!}.$$

Exercice 39. → page 39

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{7}{(2\,n+1)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)}.$$

Exercice 40. → page 40

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $2X - 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2,2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (2n-1)x^n.$$

Exercice 41. → page 40

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{4n}{3(2n+1)(n+1)} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n n x^{2n}}{3(2n+1)(n+1)}.$$

Exercice 42. → page 41

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2\}, \quad \frac{n-4}{3(n+3)(n+2)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{1161}, \frac{1}{1161}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1161^n (n-4) x^{n+1}}{3(n+3)(n+2)}.$$

Exercice 43. → page 41

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $10X^2 + 30X - 1 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(10n^2 + 30n - 1\right)(-3)^n x^{2n+1}.$$

Exercice 44. → page 42

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $13X^2 - 2X - 3 = a + b(2X) + c(2X)(2X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(13n^2 - 2n - 3\right)(-2)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Exercice 45. → page 43

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $2X - 3 = a + bX$.

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{7}}, \sqrt{\frac{1}{7}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 7^n (2\,n-3) x^{2\,n+1}.$$

Exercice 46. → page 43

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -3, -2\right\}, \quad \frac{2}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+3} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)}.$$

Exercice 47. → page 44

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}, \quad \frac{5\,n}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in]-2,2[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,\left(\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 48. → page 45

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $3X = a + b(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Exercice 49. → page 45

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $2X + 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in]-2,2[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (2\,n+1) x^{2\,n+1}.$$

Exercice 50. → page 45

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + X + 3 = a + b(2X+2) + c(2X+2)(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+n+3\right) 2^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 51. → page 46

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$.

2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2\,n+1}}{(n+3)!}.$$

Exercice 52. → page 47

1. Déterminer $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2+1 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)6^n x^n}{(n+3)!}.$$

Exercice 53. → page 47

1. Déterminer $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2-2X-1 = a + b(2X+2) + c(2X+2)(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-2\,n-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 54. → page 48

1. Déterminer $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2-385X = a + b(2X+2) + c(2X+2)(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-385\,n\right)5^n x^n}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 55. → page 49

1. Déterminer $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $5X^2-X-3 = a + b(X+1) + c(X+1)X$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(5\,n^2-n-3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(n+1)!}.$$

Exercice 56. → page 50

1. Déterminer $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X-2 = a + b(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-2)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Exercice 57. → page 50

1. Déterminer $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $3X^2-X+2 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,n^2-n+2\right)(-1)^n\,x^{2\,n}}{(n+3)!}.$$

Exercice 58. → page 51

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{22}{(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{22\left(\frac{3}{2}\right)^n x^{n+1}}{(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 59. → page 52

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^{2\,n}.$$

Exercice 60. → page 52

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $4X^2 - 2 = a + b(2X+3) + c(2X+3)(2X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(2\,n^2 - 1\right)x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)!}.$$

Exercice 61. → page 53

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - 2X + 1 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2 - 2\,n + 1\right)(-1)^n x^{n+1}}{n!}.$$

Exercice 62. → page 53

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 3 = a + b(2X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n-3)x^{n+1}}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 63. → page 54

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + X = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 + n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{n+1}.$$

Exercice 64. → page 55

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{n+1}{3\,(2\,n+1)(n+2)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^n (n+1)x^{2n+1}}{3(2n+1)(n+2)}.$$

Exercice 65. → page 55

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -1\}, \quad \frac{n-1}{2(n+3)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2\sqrt{\frac{1}{5}}, 2\sqrt{\frac{1}{5}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n (n-1)x^{2n}}{2(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 66. → page 56

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -1\}, \quad \frac{4}{3(n+3)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4x^{2n}}{3(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 67. → page 56

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + b(X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n-1)x^{2n}}{(n+1)!}.$$

Exercice 68. → page 56

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $2X + 2 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)x^{2n}.$$

Exercice 69. → page 57

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n (n-1)x^n.$$

Exercice 70. → page 57

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $6X + 3 = a + b(2X+3)$.

2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{7}\right)^n (2\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+3)!}.$$

Exercice 71. → page 58

1. Déterminer $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}, \quad \frac{1}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4\,(2\,n+3)(n+1)}.$$

Exercice 72. → page 59

1. Déterminer $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -1\}, \quad \frac{n}{6\,(n+3)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{86}, \sqrt{86}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{86}\right)^n n x^{2\,n+1}}{6\,(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 73. → page 59

1. Déterminer $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $9X - 3 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3\,(-1)^n\,(3\,n-1)x^{2\,n}.$$

Exercice 74. → page 60

1. Déterminer $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - 2 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - 2\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n}.$$

Exercice 75. → page 60

1. Déterminer $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -1\}, \quad \frac{1}{2\,(n+3)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{2\,(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 76. → page 61

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2 + 2X = a + b(2X) + c(2X)(2X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(n^2+n\right)3^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}.$$

Exercice 77. → page 61

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - X = a + b(2X) + c(2X)(2X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-n\right)2^n x^n}{(2\,n)!}.$$

Exercice 78. → page 62

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \qquad \frac{4\,n+1}{(2\,n+1)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(4\,n+1)x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 79. → page 63

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3, -1\right\}, \qquad \frac{2\,n-1}{2\,(2\,n+3)(n+3)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{n+3} + \frac{c}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n (2\,n-1)x^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 80. → page 64

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $4X^2 - X + 1 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(4\,n^2 - n + 1\right)(-12)^n\, x^{2\,n+1}.$$

Exercice 81. → page 64

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $3X + 2 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n (3\,n+2)x^n.$$

Exercice 82. → page 65

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $8X^2 + 2X = a + b(2X+2) + c(2X+2)(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(4\,n^2+n\right)\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!}.$$

Exercice 83. → page 65

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $9X + 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-2{,}2\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (9\,n+1)x^{n+1}.$$

Exercice 84. → page 66

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -2, -1\right\}, \quad \frac{n+11}{(2\,n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+3} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{29}, \sqrt{29}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{29}\right)^n (n+11)x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+2)(n+1)}.$$

Exercice 85. → page 66

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n (n-1)x^n.$$

Exercice 86. → page 67

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 3 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-7{,}7\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^n (n-3)x^n.$$

Exercice 87. → page 67

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 - X - 7 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-1{,}1\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - n - 7\right)(-1)^n x^{2\,n+1}.$$

Exercice 88. → page 68

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + b(2X+3)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n (n-1)x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)!}.$$

Exercice 89. → page 68

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + X + 27 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in]-3,3[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 27) \left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{n+1}.$$

Exercice 90. → page 69

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + b(2X+1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n-1)x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 91. → page 70

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + X + 2 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2 + n + 2\right) (-2)^n x^{n+1}}{(n+3)!}.$$

Exercice 92. → page 70

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X^2 + X + 1 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 + n + 1\right) (-1)^n x^{2n+1}.$$

Exercice 93. → page 71

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X - 1 = a + b(X+3)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n-1)x^n}{(n+3)!}.$$

Exercice 94. → page 71

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2 + 186 = a + bX + cX(X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n^2 + 93\right) \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^{2n+1}.$$

Exercice 95. → page 72

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{5}{2(2n+1)(n+2)} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in]-2,2[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+2)}.$$

Exercice 96. → page 73

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $2X^2 - X - 1 = a + b(2X) + c(2X)(2X-1)$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2 - n - 1\right)(-1)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}.$$

Exercice 97. → page 74

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2\}, \quad \frac{n}{(n+3)(n+2)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n n x^{2\,n+1}}{(n+3)(n+2)}.$$

Exercice 98. → page 74

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{n-1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{a}{2\,n+1} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n-1) x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+1)}.$$

Exercice 99. → page 75

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -1\}, \quad \frac{5}{6\,(n+3)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+1}.$$

2. En déduire, pour tout $x \in]-1,1[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,(-1)^n x^{n+1}}{6\,(n+3)(n+1)}.$$

Exercice 100. → page 75

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $7X + 25 = a + bX$.
2. En déduire, pour tout $x \in \left]-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right[$, la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n (7\,n+25) x^{2\,n+1}.$$

Corrigé 1. ← page 1

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{7\,n+2}{(2\,n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2\,n+1} + \frac{4}{n+2}.$$

2. Soit $x \in \left]-66{,}66\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{66}\right)^n (7\,n+2)x^n}{(2\,n+1)(n+2)} = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{66}\,x\right)^n}{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{66}\,x\right)^n}{2\,n+1}$$
$$= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{66}\,x\right)^{n-1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{66}\,x\right)^n}{2\,n+1}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{66}\right)^n (7\,n+2)x^n}{(2\,n+1)(n+2)} = -\frac{17424}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{66}\,x\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{66\sqrt{\frac{1}{66}}}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{66}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$
$$= -\frac{17424}{x^2}\ln\left(\frac{1}{66}\,x+1\right) - \frac{66\sqrt{\frac{1}{66}}}{\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{66}}\sqrt{x}\right) + \left(\frac{264}{x}\right),$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{66}\right)^n (7\,n+2)x^n}{(2\,n+1)(n+2)} = -\frac{17424}{x^2}\ln\left(\frac{1}{66}\,x+1\right) - \frac{66\sqrt{\frac{1}{66}}}{\sqrt{-x}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{66}}\sqrt{-x}+1}{\sqrt{\frac{1}{66}}\sqrt{-x}-1}\right) + \left(\frac{264}{x}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 2. ← page 1

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{1}{(2\,n+1)(n+2)} = \frac{2}{3\,(2\,n+1)} - \frac{1}{3\,(n+2)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)(n+2)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n x}{n+2} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+1}$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+1}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(n+2)} &= \frac{4}{3x^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{4}{3x^3} \ln\left(\frac{1}{2}x^2+1\right) + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right) + \left(-\frac{2}{3x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 3. ← page 1

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2-X-1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 - X - 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = -1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2 - X - 1 = -1 + X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-2{,}2\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2-n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}x\right)^n \\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n + \frac{1}{4}x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{2}x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2-n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} = -\frac{x}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{\frac{1}{2}x^3}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 4. ← page 1

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3, -1\right\}, \quad \frac{3}{(2n+3)(n+3)(n+1)} = -\frac{4}{2n+3} + \frac{1}{2(n+3)} + \frac{3}{2(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 \cdot 2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+3)(n+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^n x}{n+3} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^n x}{n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+3}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^{n-2} x}{n+1} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^n x}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n-2} x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 \cdot 2^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+3)(n+1)} &= \frac{1}{16\,x^5}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{3}{4\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\left(\frac{3}{4\,x} + \frac{1}{16\,x^5}\right)\ln\left(-2\,x^2+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}\right) + \left(\frac{15}{8\,x} - \frac{1}{8\,x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 5. ← page 2

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}, \quad \frac{1}{4\,(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{4\,(n+2)} + \frac{1}{4\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in]-2,2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{4\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+2} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1}\\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{4\,(n+2)(n+1)} &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\,x+1\right) + \left(-\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 6. ← page 2

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+2), (X+2)(X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $31X^2+9X-44$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-2, -1$. Si l'on évalue l'égalité $31X^2+9X-44 = a+b(X+2)+c(X+2)(X+1)$ en -2, on obtient directement : $a = 62$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $31 = c$. En conclusion, on a :
$$31X^2+9X-44 = 62 - 84(X+2) + 31(X+2)(X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(31\,n^2+9\,n-44\right)(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+2)!} &= 62\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}(-1)^n\,x^{2\,n+1} - 84\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)}{(n+2)!}(-1)^n\,x^{2\,n+1}\\ &\quad + 31\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!}(-1)^n\,x^{2\,n+1}\\ &= 62\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+2)!} - 84\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+1)!} + 31\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{n!}\\ &= 62\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}\,x^{2\,n-3}}{n!} - 84\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{2\,n-1}}{n!} + 31\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{n!}\end{aligned}$$
après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(31\,n^2+9\,n-44\right)(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+2)!} &= \frac{62}{x^3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} + \frac{84}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} + 31\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}\\ &= \left(\frac{62}{x^3}+\frac{84}{x}+31\,x\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{84}{x}+\frac{62\left(x^2-1\right)}{x^3}\right)\\ &= \left(\frac{62}{x^3}+\frac{84}{x}+31\,x\right)e^{\left(-x^2\right)} + \left(-\frac{22}{x}-\frac{62}{x^3}\right),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 7. ← page 2

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $4X+2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 2$, puis : $a = 2$. En conclusion, on a :
$$4X+2 = 2+2(2X).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(2\,n+1)x^{2\,n}}{(2\,n)!} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n)!}x^{2\,n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n)}{(2\,n)!}x^{2\,n}\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n-1)!}\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+2}}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(2\,n+1)x^{2\,n}}{(2\,n)!} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}+2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= 2\cosh(x)+2\,x\sinh(x)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. ← page 2

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n\in\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{2},-2,-1\right\},\qquad \frac{n-1}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)}=-\frac{2}{2\,n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n+1}.$$

2. Soit $x\in\,]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n-1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+2}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n+1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x\in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n-1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)} &= -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-2\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\left(-\frac{1}{x}+2\right)\ln(-x+1)-2\sqrt{x}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+(1)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n-1)x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+2)(n+1)}=-\left(-\frac{1}{x}+2\right)\ln(-x+1)-\frac{2\,x}{\sqrt{-x}}\arctan\left(\sqrt{-x}\right)+(1)\,,$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x\in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 9. ← page 2

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}, \quad \frac{1}{3\,(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{3\,(n+2)} + \frac{1}{3\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n}{3\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\,x\right)^n}{n+2} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\,x\right)^n}{n+1}\\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\,x\right)^{n-1}}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\,x\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n}{3\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{3}{4\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\,x\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= -\left(\frac{1}{2\,x} - \frac{3}{4\,x^2}\right)\ln\left(-\frac{2}{3}\,x+1\right) + \left(\frac{1}{2\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. ← page 2

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -2\right\}, \quad \frac{n-1}{2\,(2\,n+3)(n+2)} = -\frac{5}{2\,(2\,n+3)} + \frac{3}{2\,(n+2)}.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n}}{2\,(2\,n+3)(n+2)} &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n+2} - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{2\,n+3}\\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n-1}}{n+1} - \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-2}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n}}{2\,(2\,n+3)(n+2)} &= \frac{3}{2\,x^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{5}{2\,x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\frac{3}{2\,x^4}\ln\left(-x^2+1\right) - \frac{5}{2\,x^3}\,\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Corrigé 11. ← page 3

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2 + X + 41$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $2X^2 + X + 41 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 41$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2 = c$. En conclusion, on a :
$$2X^2 + X + 41 = 41 + 3X + 2X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{39}, \sqrt{39}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,n^2+n+41) \left(-\frac{1}{39}\right)^n x^{2\,n} &= 41 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{39}\right)^n x^{2\,n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{39}\right)^n x^{2\,n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{39}\right)^n x^{2\,n} \\
&= 41 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{39}\,x^2\right)^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{39}\,x^2\right)^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{39}\,x^2\right)^n \\
&= 41 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{39}\,x^2\right)^n - \frac{1}{13}\,x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{39}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{2}{1521}\,x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{39}\,x^2\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\frac{1}{39}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,n^2+n+41) \left(-\frac{1}{39}\right)^n x^{2\,n} = \frac{41}{1+\frac{1}{39}x^2} - \frac{\frac{1}{13}\,x^2}{\left(1+\frac{1}{39}x^2\right)^2} + \frac{\frac{4}{1521}\,x^4}{\left(1+\frac{1}{39}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 12. ← page 3

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 1$, puis : $a = -3$. En conclusion, on a :
$$X = -3 + (X+3).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)^n n x^{2n+1}}{(n+3)!} &= -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!} \left(-\frac{3}{52}\right)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!} \left(-\frac{3}{52}\right)^n x^{2n+1} \\ &= -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)^n x^{2n+1}}{(n+3)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)^n x^{2n+1}}{(n+2)!} \\ &= -3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)^{n-3} x^{2n-5}}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)^{n-2} x^{2n-3}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)^n n x^{2n+1}}{(n+3)!} &= \frac{140608}{9\,x^5} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\,x^2\right)^n}{n!} + \frac{2704}{9\,x^3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\,x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{140608}{9\,x^5} + \frac{2704}{9\,x^3}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{52}\,x^2\right)^n}{n!} + \left(\frac{52\left(3\,x^2 - 52\right)}{9\,x^3} - \frac{26\left(9\,x^4 - 312\,x^2 + 5408\right)}{9\,x^5}\right) \\ &= \left(\frac{140608}{9\,x^5} + \frac{2704}{9\,x^3}\right) e^{\left(-\frac{3}{52}\,x^2\right)} + \left(-\frac{26}{3\,x} + \frac{5408}{9\,x^3} - \frac{140608}{9\,x^5}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 13. ← page 3

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{5}{3\,(n+2)(n+1)} = -\frac{5}{3\,(n+2)} + \frac{5}{3\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \,]-2{,}2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2n+1}}{3\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{5}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n x}{n+2} + \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n x}{n+1} \\ &= -\frac{5}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2n+1}}{3\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{80}{3\,x^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{20}{3\,x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(\frac{20}{3\,x} - \frac{80}{3\,x^3}\right) \ln\left(-\frac{1}{4}\,x^2 + 1\right) + \left(\frac{20}{3\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 14. ← page 3

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{933}{2\,(n+2)(n+1)} = -\frac{933}{2\,(n+2)} + \frac{933}{2\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{933\,\left(\frac{4}{3}\right)^n x^{n+1}}{2\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{933}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\,x\right)^n x}{n+2} + \frac{933}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\,x\right)^n x}{n+1} \\ &= -\frac{933}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\,x\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{933}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\,x\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{933\,\left(\frac{4}{3}\right)^n x^{n+1}}{2\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{8397}{32\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{2799}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\,x\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(-\frac{8397}{32\,x} + \frac{2799}{8}\right)\ln\left(-\frac{4}{3}\,x+1\right) + \left(\frac{2799}{8}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 15. ← page 3

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3, -2\right\}, \qquad \frac{3\,(n+5)}{(2\,n+3)(n+3)(n+2)} = \frac{14}{2\,n+3} + \frac{2}{n+3} - \frac{9}{n+2}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-7)^n\,(n+5)x^{n+1}}{(2\,n+3)(n+3)(n+2)} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(7\,x)^n\,x}{n+3} - 9\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(7\,x)^n\,x}{n+2} + 14\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(7\,x)^n\,x}{2\,n+3} \\ &= 2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}\,(7\,x)^{n-2}\,x}{n+1} - 9\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,(7\,x)^{n-1}\,x}{n+1} + 14\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,(7\,x)^{n-1}\,x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-7)^n\,(n+5)x^{n+1}}{(2\,n+3)(n+3)(n+2)} &= \frac{2}{343\,x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(7\,x)^{n+1}}{n+1} + \frac{9}{49\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(7\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{2\,\sqrt{7}}{7\,\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{7}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \left(\frac{9}{49\,x} + \frac{2}{343\,x^2}\right)\ln(7\,x+1) - \frac{2\,\sqrt{7}}{7\,\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{7}\sqrt{x}\right) + \left(-\frac{2}{49\,x} + \frac{6}{7}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-7)^n\,(n+5)x^{n+1}}{(2\,n+3)(n+3)(n+2)} = \left(\frac{9}{49\,x} + \frac{2}{343\,x^2}\right)\ln(7\,x+1) - \frac{2\,\sqrt{7}}{7\,\sqrt{-x}}\,\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{7}\sqrt{-x}+1}{\sqrt{7}\sqrt{-x}-1}\right) + \left(-\frac{2}{49\,x} + \frac{6}{7}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 16. ← page 3

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1,(X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $3X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 3$, puis : $a = -3$. En conclusion, on a :
$$3X = -3 + 3(X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,nx^n}{(n+1)!} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!}x^n \\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= -3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$
après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,nx^n}{(n+1)!} &= -\frac{3}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \left(-\frac{3}{x}+3\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \left(\frac{3}{x}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{x}+3\right)e^x + \left(\frac{3}{x}\right),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 17. ← page 4

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :
$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{n}{6\,(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{1}{6\,(2\,n+1)} + \frac{1}{6\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in\,]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{2\,n}}{6\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n+1} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{2\,n+1}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{2\,n}}{6\,(2\,n+1)(n+1)} &= \frac{1}{6\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{6\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{1}{6\,x^2}\ln\left(-x^2+1\right) - \frac{1}{6\,x}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{x+1}{x-1}\right),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Corrigé 18. ← page 4

1. On a trivialement $a = -1$ et $b = 11$.
2. Soit $x \in]-1,1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (11\,n-1)x^{2\,n+1} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n+1} + 11 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{2\,n+1} \\ &= -x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n + 11\,x \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(x^2\right)^n \\ &= -x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n + 11\,x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en x^2. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (11\,n-1)x^{2\,n+1} = -\frac{x}{1-x^2} + \frac{11\,x^3}{\left(1-x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 19. ← page 4

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-2\}, \quad \frac{1}{(n+3)(n+2)} = -\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2}.$$

2. Soit $x \in \left]-2\sqrt{\frac{38}{3}}, 2\sqrt{\frac{38}{3}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{152}\right)^n x^{2\,n}}{(n+3)(n+2)} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{152}\,x^2\right)^n}{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{152}\,x^2\right)^n}{n+2} \\ &= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2} \left(\frac{3}{152}\,x^2\right)^{n-2}}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{3}{152}\,x^2\right)^{n-1}}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{152}\right)^n x^{2\,n}}{(n+3)(n+2)} &= -\frac{3511808}{27\,x^6} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{152}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{23104}{9\,x^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{152}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(-\frac{23104}{9\,x^4} - \frac{3511808}{27\,x^6}\right) \ln\left(\frac{3}{152}\,x^2 + 1\right) + \left(\frac{76}{3\,x^2} + \frac{23104}{9\,x^4}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 20. ← page 4

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+3), (2X+3)(2X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 - 70X + 2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-\frac{3}{2}, -1$. Si l'on évalue l'égalité $X^2 - 70X + 2 = a + b(2X+3) + c(2X+3)(2X+2)$ en $-\frac{3}{2}$, on obtient directement : $a = \frac{437}{4}$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{1}{4}$. En conclusion, on a :

$$X^2 - 70X + 2 = \frac{437}{4} - \frac{145}{4}(2X+3) + \frac{1}{4}(2X+3)(2X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - 70\,n + 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= \frac{437}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+3)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} - \frac{145}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+3)}{(2\,n+3)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+3)(2\,n+2)}{(2\,n+3)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} \\ &= \frac{437}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+3)!} - \frac{145}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+2)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+1)!} \\ &= \frac{437}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^{n}}{(2\,n+1)!} - \frac{145}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^{n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - 70\,n + 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= -\frac{437\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{145}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)}{} \\ &= \frac{145}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(-\frac{437\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \Bigg(\\ &= \frac{145}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right) + \left(-\frac{437\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right) + \left(\frac{437}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{145}{2}\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - 70\,n + 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= \frac{145}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(-\frac{437\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-x}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x}{2\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{437}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right. \\ &= \frac{145}{2}\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right) + \left(-\frac{437\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-x}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x}{2\sqrt{-x}}\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{437}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{14}{2}\right.\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 21. ← page 4

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3), (X+3)(X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 + 10X + 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le

déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-3, -2$. Si l'on évalue l'égalité $X^2+10X+1 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$ en -3, on obtient directement : $a = -20$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2+10X+1 = -20 + 5(X+3) + (X+3)(X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+10\,n+1)4^n x^{2\,n}}{(n+3)!} &= -20\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}4^n x^{2\,n} + 5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+3)}{(n+3)!}4^n x^{2\,n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)!}4^n x^{2\,n} \\ &= -20\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n x^{2\,n}}{(n+3)!} + 5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n x^{2\,n}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n x^{2\,n}}{(n+1)!} \\ &= -20\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4^{n-3}x^{2\,n-6}}{n!} + 5\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4^{n-2}x^{2\,n-4}}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{n-1}x^{2\,n-2}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+10\,n+1)4^n x^{2\,n}}{(n+3)!} &= -\frac{5}{16\,x^6}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\left(4\,x^2\right)^n}{n!} + \frac{5}{16\,x^4}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(4\,x^2\right)^n}{n!} + \frac{1}{4\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(4\,x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(-\frac{5}{16\,x^6}+\frac{5}{16\,x^4}+\frac{1}{4\,x^2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(4\,x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{1}{4\,x^2} - \frac{5\left(4\,x^2+1\right)}{16\,x^4} + \frac{5\left(8\,x^4+4\,x^2+1\right)}{16\,x^6}\right) \\ &= \left(-\frac{5}{16\,x^6}+\frac{5}{16\,x^4}+\frac{1}{4\,x^2}\right)e^{\left(4\,x^2\right)} + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{15}{16\,x^4}+\frac{5}{16\,x^6}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 22. ← page 4

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C}\setminus\{-3,-2\}\,,\qquad \frac{n+12}{3\,(n+3)(n+2)} = -\frac{3}{n+3} + \frac{10}{3\,(n+2)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n(n+12)x^{2\,n}}{3\,(n+3)(n+2)} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n+3} + \frac{10}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n+2} \\ &= -3\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n-2}}{n+1} + \frac{10}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n-1}}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n(n+12)x^{2\,n}}{3\,(n+3)(n+2)} &= -\frac{24}{x^6}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{40}{3\,x^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(-\frac{40}{3\,x^4}-\frac{24}{x^6}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\,x^2+1\right) + \left(\frac{11}{3\,x^2}+\frac{12}{x^4}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 23. ← page 5

1. On a trivialement $a = -1$ et $b = 4$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\right)^n (4\,n-1)x^{n+1}}{n!} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{31}{2}\right)^n x^{n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}\left(-\frac{31}{2}\right)^n x^{n+1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\right)^n x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\right)^n x^{n+1}}{(n-1)!} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\right)^n x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\right)^{n+1} x^{n+2}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\right)^n (4\,n-1)x^{n+1}}{n!} &= -x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\,x\right)^n}{n!} - 62\,x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{31}{2}\,x\right)^n}{n!} \\ &= \left(-x - 62\,x^2\right) e^{\left(-\frac{31}{2}\,x\right)},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 24. ← page 5

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $4X^2 - 6X + 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $4X^2 - 6X + 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $4 = c$. En conclusion, on a :

$$4X^2 - 6X + 1 = 1 - 2X + 4X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-10,10\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (4\,n^2 - 6\,n + 1)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{10}\,x\right)^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{10}\,x\right)^n + 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{10}\,x\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{10}\,x\right)^n + \frac{1}{5}\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{10}\,x\right)^{n-1} + \frac{1}{25}\,x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{10}\,x\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{10}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (4\,n^2 - 6\,n + 1)\left(-\frac{1}{10}\right)^n x^n = \frac{1}{1+\frac{1}{10}x} + \frac{\frac{1}{5}\,x}{\left(1+\frac{1}{10}x\right)^2} + \frac{\frac{2}{25}\,x^2}{\left(1+\frac{1}{10}x\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 25. ← page 5

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 1$, puis : $a = -3$. En conclusion, on a :
$$X - 1 = -3 + (X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+2)!} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{2\,n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)}{(n+2)!} x^{2\,n+1} \\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(n+1)!} \\ &= -3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-3}}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-1}}{n!}\end{aligned}$$
après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n+1}}{(n+2)!} &= -\frac{3}{x^3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{3\left(x^2+1\right)}{x^3}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x}\right) e^{\left(x^2\right)} + \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 26. ← page 5

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :
$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{2}{(n+2)(n+1)} = -\frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-2{,}2\right[$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(n+2)(n+1)} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n+1} \\ &= -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1}}{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$
après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}{(n+2)(n+1)} &= \frac{8}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{4}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(\frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\,x + 1\right) + \left(-\frac{4}{x}\right),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 27. ← page 5

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $5X-7$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{5}{2}$, puis : $a = -\frac{19}{2}$. En conclusion, on a :

$$5X - 7 = -\frac{19}{2} + \frac{5}{2}(2X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)^n (5\,n-7)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{19}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)!}\left(-\frac{7}{2}\right)^n x^{2\,n+1} + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)}{(2\,n+1)!}\left(-\frac{7}{2}\right)^n x^{2\,n+1} \\ &= -\frac{19}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)^n (5\,n-7)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{19}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{5}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= \frac{5}{2}\,x\cos\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right) - \frac{19}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\sin\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 28. ← page 5

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{1}{6\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{3\,(2\,n+1)} - \frac{1}{6\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \left]-1{,}1\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2\,n}}{6\,(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(x^2\right)^n}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2\,n}}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2\,n}}{6\,(2\,n+1)(n+1)} &= -\frac{1}{6\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{3\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= -\frac{1}{6\,x^2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{3\,x}\arctan\left(x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 29. ← page 6

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $24X^2 + 2X - 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $24X^2 + 2X - 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = -1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $24 = c$. En conclusion, on a :

$$24X^2 + 2X - 1 = -1 + 26X + 24X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (24\,n^2+2\,n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n x^{2\,n} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n x^{2\,n} + 26\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{6}\right)^n x^{2\,n} + 24\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n x^{2\,n}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)^n + 26\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)^n + 24\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)^n + \frac{13}{3}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{6}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (24\,n^2+2\,n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n x^{2\,n} = -\frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2} + \frac{\frac{13}{3}\,x^2}{\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^2} + \frac{\frac{4}{3}\,x^4}{\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 30. ← page 6

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \qquad \frac{3}{(2\,n+1)(n+1)} = \frac{6}{2\,n+1} - \frac{3}{n+1}.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} = -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1} + 6\,\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\sqrt{x}^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -3\ln(x+1) + 6\,\sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} = -3\ln(x+1) + \frac{6\,x}{\sqrt{-x}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}-1}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 31. ← page 6

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 1$, puis : $a = -4$. En conclusion, on a :
$$X - 1 = -4 + (X+3).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n}}{(n+3)!} &= -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}x^{2\,n} \\ &= -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(n+3)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(n+2)!} \\ &= -4\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-6}}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-4}}{n!}\end{aligned}$$
après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{2\,n}}{(n+3)!} &= -\frac{4}{x^6}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} + \frac{1}{x^4}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(-\frac{4}{x^6} + \frac{1}{x^4}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{x^2+1}{x^4} + \frac{2\left(x^4+2\,x^2+2\right)}{x^6}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{x^6} + \frac{1}{x^4}\right)e^{\left(x^2\right)} + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 32. ← page 6

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $5X^2+5X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $5X^2 + 5X = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $5 = c$. En conclusion, on a :
$$5X^2 + 5X = 10X + 5X(X-1).$$

2. Soit $x \in \,]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(n^2+n\right)x^{2\,n} &= 10\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{2\,n} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{2\,n} \\ &= 10\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(x^2\right)^{n-1} + 5\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 des dérivées de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ évaluée en x^2. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(n^2+n\right)x^{2\,n} = \frac{10\,x^2}{1-x^2} + \frac{10\,x^4}{\left(1-x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 33. ← page 6

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-2,-1\}\,, \qquad \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{1}{2\,(n+3)} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in\,]-2,2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-2} x}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)} &= \frac{4}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{4}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(-\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + 1\right)\ln\left(-\frac{1}{2}\,x+1\right) + \left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. ← page 7

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2,-1\}\,, \qquad \frac{3\,n+1}{2\,(n+2)(n+1)} = \frac{5}{2\,(n+2)} - \frac{1}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{15}, \frac{1}{15}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-15)^n\,(3\,n+1)x^{n+1}}{2\,(n+2)(n+1)} &= \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(15\,x)^n\,x}{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(15\,x)^n\,x}{n+1} \\ &= \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(15\,x)^{n-1}\,x}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(15\,x)^n\,x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-15)^n\,(3\,n+1)x^{n+1}}{2\,(n+2)(n+1)} &= -\frac{1}{90\,x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(15\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(15\,x)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(-\frac{1}{90\,x} - \frac{1}{15}\right)\ln(15\,x+1) + \left(\frac{1}{6}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 35. ← page 7

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+3), (2X+3)(2X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2 - 89X - 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-\frac{3}{2}, -1$. Si l'on évalue l'égalité $2X^2-89X-1 = a+b(2X+3)+c(2X+3)(2X+2)$ en $-\frac{3}{2}$, on obtient directement : $a = 137$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{1}{2}$. En conclusion, on a :

$$2X^2 - 89X - 1 = 137 - 47(2X+3) + \frac{1}{2}(2X+3)(2X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2 - 89\,n - 1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+3)!} &= 137 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+3)!}\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n - 47 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+3)}{(2\,n+3)!}\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+3)(2\,n+2)}{(2\,n+3)!}\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n \\
&= 137 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+3)!} - 47 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+2)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+1)!} \\
&= 137 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} x^{n-1}}{(2\,n+1)!} - 47 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} x^{n-1}}{(2\,n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+1)!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part), où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2 - 89\,n - 1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+3)!} &= -\frac{1096}{x^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{188}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \\
&= \frac{188}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(-\frac{1096}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{360}{x}\right) \\
&= \frac{188}{x}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) + \left(-\frac{1096}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) + \left(\frac{360}{x}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2 - 89\,n - 1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^n}{(2\,n+3)!} &= \frac{188}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(-\frac{1096}{\sqrt{-x}x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{360}{x}\right) \\
&= \frac{188}{x}\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-x}\right) + \left(-\frac{1096}{\sqrt{-x}x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{360}{x}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 36. ← page 7

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Le fait d'avoir un numérateur de degré 2 au numérateur ne change rien à la méthode. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{2\,n^2 + 2\,n - 1}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{2\,(2\,n+3)} - \frac{3}{2\,(2\,n+1)} + \frac{1}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2+2\,n-1\right)(-4)^n\,x^n}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(4\,x)^n}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(4\,x)^n}{2\,n+3} - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(4\,x)^n}{2\,n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(4\,x)^n}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(4\,x)^{n-1}}{2\,n+1} - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(4\,x)^n}{2\,n+1}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2+2\,n-1\right)(-4)^n\,x^n}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{4\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(4\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{16\,x^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,\sqrt{x})^{2\,n+1}}{2\,n+1} - \frac{3}{4\,\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2\,\sqrt{x})^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$
$$= \frac{1}{4\,x}\ln(4\,x+1) + \left(-\frac{3}{4\,\sqrt{x}} - \frac{1}{16\,x^{\frac{3}{2}}}\right)\arctan\left(2\,\sqrt{x}\right) + \left(\frac{1}{8\,x}\right),$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,n^2+2\,n-1\right)(-4)^n\,x^n}{(2\,n+3)(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{4\,x}\ln(4\,x+1) + \left(-\frac{3}{4\,\sqrt{-x}} - \frac{1}{16\,\sqrt{-x}x}\right)\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{2\,\sqrt{-x}+1}{2\,\sqrt{-x}-1}\right) + \left(\frac{1}{8\,x}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 37. ← page 7

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Le fait d'avoir un numérateur de degré 2 au numérateur ne change rien à la méthode. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2, -1\}, \quad \frac{n^2+2\,n-1}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+2\,n-1\right)(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(x^2\right)^n x}{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(x^2\right)^n x}{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(x^2\right)^n x}{n+1}$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}\left(x^2\right)^{n-2} x}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(x^2\right)^{n-1} x}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(x^2\right)^n x}{n+1}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+2\,n-1\right)(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{1}{x^5}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1}$$
$$= \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)\ln\left(x^2+1\right) + \left(\frac{3}{2\,x} - \frac{1}{x^3}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 38. ← page 7

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+1), (X+1)X)$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $5X^2+4X+1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1,0$. Si l'on évalue l'égalité $5X^2+4X+1 = a+b(X+1)+c(X+1)X$ en -1, on obtient directement : $a=2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $5=c$. En conclusion, on a :
$$5X^2+4X+1 = 2-(X+1)+5(X+1)X.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5\,n^2+4\,n+1)x^{2\,n}}{(n+1)!} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^{2\,n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!}x^{2\,n} \\ &\quad + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)n}{(n+1)!}x^{2\,n} \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{n!} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(n-1)!} \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-2}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{n!} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+2}}{n!}\end{aligned}$$
après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5\,n^2+4\,n+1)x^{2\,n}}{(n+1)!} &= \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} + 5\,x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{2}{x^2}-1+5\,x^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} + \left(-\frac{2}{x^2}\right) \\ &= \left(\frac{2}{x^2}-1+5\,x^2\right)e^{(x^2)} + \left(-\frac{2}{x^2}\right),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 39. ← page 7

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :
$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \qquad \frac{7}{(2\,n+1)(n+1)} = \frac{14}{2\,n+1} - \frac{7}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$. On a, d'après la question précédente :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} = -7\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^n x}{n+1} + 14\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+1}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{21}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + 42\sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$
$$= \frac{21}{x}\ln\left(-\frac{1}{3}\,x^2+1\right) + 42\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}x+1}{\sqrt{\frac{1}{3}}x-1}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 40. ← page 8

1. On a trivialement $a=-1$ et $b=2$.
2. Soit $x \in\,]-2{,}2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(2\,n-1)x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{2}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(2\,n-1)x^n = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{x}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 41. ← page 8

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \qquad \frac{4\,n}{3\,(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{4}{3\,(2\,n+1)} + \frac{4}{3\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^n\,nx^{2\,n}}{3\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(x^2\right)^n}{n+1} - \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n}}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^n\,nx^{2\,n}}{3\,(2\,n+1)(n+1)} &= \frac{4}{3\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{4}{3\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= \frac{4}{3\,x^2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{4}{3\,x}\arctan(x)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 42. ← page 8

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-2\}\,,\qquad \frac{n-4}{3\,(n+3)(n+2)} = \frac{7}{3\,(n+3)} - \frac{2}{n+2}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{1161}, \frac{1}{1161}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1161^n(n-4)x^{n+1}}{3\,(n+3)(n+2)} &= \frac{7}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1161\,x)^n\,x}{n+3} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1161\,x)^n\,x}{n+2}\\ &= \frac{7}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1161\,x)^{n-2}\,x}{n+1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1161\,x)^{n-1}\,x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1161^n(n-4)x^{n+1}}{3\,(n+3)(n+2)} &= \frac{7}{4694808843\,x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1161\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{1347921\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1161\,x)^{n+1}}{n+1}\\ &= -\left(-\frac{2}{1347921\,x} + \frac{7}{4694808843\,x^2}\right)\ln(-1161\,x+1) + \left(-\frac{7}{4043763\,x} + \frac{5}{6966}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 43. ← page 8

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $10X^2+30X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $10X^2+30X-1 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $10=c$. En conclusion, on a :

$$10X^2+30X-1 = -1+40X+10X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(10\,n^2+30\,n-1\right)(-3)^n\,x^{2\,n+1} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^n\,x^{2\,n+1}+40\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(-3)^n\,x^{2\,n+1}+10\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\,(-3)^n\,x^{2\,n+1}\\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-3\,x^2\right)^n+40\,x\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-3\,x^2\right)^n+10\,x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(-3\,x^2\right)^n\\ &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-3\,x^2\right)^n-120\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-3\,x^2\right)^{n-1}+90\,x^5\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(-3\,x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-3\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\qquad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\qquad \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(10\,n^2+30\,n-1\right)(-3)^n\,x^{2\,n+1}=-\frac{x}{1+3x^2}-\frac{120\,x^3}{\left(1+3x^2\right)^2}+\frac{180\,x^5}{\left(1+3x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 44. ← page 8

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X), (2X)(2X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $13X^2-2X-3$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $0, \frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $13X^2-2X-3 = a+b(2X)+c(2X)(2X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-3$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $13 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{13}{4}$. En conclusion, on a :

$$13X^2-2X-3=-3+\frac{9}{4}(2X)+\frac{13}{4}(2X)(2X-1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(13\,n^2-2\,n-3\right)(-2)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n)!}(-2)^n\,x^{2\,n}+\frac{9}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n)}{(2\,n)!}(-2)^n\,x^{2\,n}\\ &\quad+\frac{13}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n)(2\,n-1)}{(2\,n)!}(-2)^n\,x^{2\,n}\\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!}+\frac{9}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n-1)!}+\frac{13}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n-2)!}\\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!}+\frac{9}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^{n+1}\,x^{2\,n+2}}{(2\,n+1)!}+\frac{13}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^{n+1}\,x^{2\,n+2}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(13\,n^2-2\,n-3\right)(-2)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}-\frac{9}{4}\sqrt{2}x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}-\frac{13}{2}x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}\\ &= \left(-3-\frac{13}{2}x^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}-\frac{9}{4}\sqrt{2}x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= \left(-3-\frac{13}{2}x^2\right)\cos\left(\sqrt{2}x\right)-\frac{9}{4}\sqrt{2}x\sin\left(\sqrt{2}x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 45. ← page 8

1. On a trivialement $a = -3$ et $b = 2$.
2. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{7}}, \sqrt{\frac{1}{7}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 7^n(2\,n-3)x^{2\,n+1} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} 7^n x^{2\,n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n7^n x^{2\,n+1}\\ &= -3\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(7\,x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(7\,x^2\right)^n\\ &= -3\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(7\,x^2\right)^n + 14\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(7\,x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $7\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 7^n(2\,n-3)x^{2\,n+1} = -\frac{3\,x}{1-7x^2} + \frac{14\,x^3}{\left(1-7x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 46. ← page 9

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{2}, -3, -2\right\}, \qquad \frac{2}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)} = \frac{8}{15\,(2\,n+1)} + \frac{2}{5\,(n+3)} - \frac{2}{3\,(n+2)}.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)} &= \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n+3} - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n+2} + \frac{8}{15}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{2\,n+1}\\ &= \frac{2}{5}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n-2}}{n+1} - \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n-1}}{n+1} + \frac{8}{15}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+3)(n+2)} &= \frac{2}{5\,x^6}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{3\,x^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{8}{15\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\left(-\frac{2}{3\,x^4} + \frac{2}{5\,x^6}\right)\ln\left(-x^2+1\right) + \frac{8}{15\,x}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) + \left(\frac{7}{15\,x^2} - \frac{2}{5\,x^4}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Corrigé 47. ← page 9

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -1 \right\}, \quad \frac{5\,n}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{15}{4\,(2\,n+3)} - \frac{5}{4\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in]-2,2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,\left(\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{5}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1} + \frac{15}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{2\,n+3} \\ &= -\frac{5}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+1} + \frac{15}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1} x}{2\,n+1} \end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,\left(\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= -\frac{5}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{15\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{5}{2} \ln \left(-\frac{1}{2}\,x + 1 \right) + \frac{15\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}-1} \right) + \left(-\frac{15}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,\left(\frac{1}{2}\right)^n n x^{n+1}}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = \frac{5}{2} \ln \left(-\frac{1}{2}\,x + 1 \right) + \frac{15\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-x}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x} \right) + \left(-\frac{15}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Corrigé 48. ← page 9

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $3X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{3}{2}$, puis : $a = -\frac{3}{2}$. En conclusion, on a :
$$3X = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(2X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\, n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)!}\,(-1)^n\, x^{2\,n+1} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)}{(2\,n+1)!}\,(-1)^n\, x^{2\,n+1}\\ &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n\, n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{3}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(2\,n)!}\\ &= \frac{3}{2}\,x\cos(x) - \frac{3}{2}\sin(x)\,,\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 49. ← page 9

1. On a trivialement $a = 1$ et $b = 2$.
2. Soit $x \in]-2{,}2[$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (2\,n+1)x^{2\,n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n+1}\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\,x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{4}\,x^2\right)^n\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\,x^2\right)^n - \frac{1}{2}\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{4}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$
On en déduit :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (2\,n+1)x^{2\,n+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{4}x^2} - \frac{\frac{1}{2}\,x^3}{\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)^2},$$
d'où le résultat.

Corrigé 50. ← page 9

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+2), (2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 + X + 3$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le

déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1, -\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $X^2+X+3 = a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a=3$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{1}{4}$. En conclusion, on a :

$$X^2+X+3 = 3 - \frac{1}{4}(2X+2) + \frac{1}{4}(2X+2)(2X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+n+3)2^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!} &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}2^n x^{2\,n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}2^n x^{2\,n} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}2^n x^{2\,n} \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1} x^{2\,n-2}}{(2\,n)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2\,n}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+n+3)2^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!} &= \frac{3}{2\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{\sqrt{2}}{8\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= \left(\frac{3}{2\,x^2} + \frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{\sqrt{2}}{8\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(-\frac{3}{2\,x^2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2\,x^2} + \frac{1}{4}\right)\cosh\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{\sqrt{2}}{8\,x}\sinh\left(\sqrt{2}x\right) + \left(-\frac{3}{2\,x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 51. ← page 9

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3), (X+3)(X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-3, -2$. Si l'on évalue l'égalité $X^2 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$ en -3, on obtient directement : $a = 9$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2 = 9 - 5(X+3) + (X+3)(X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2\,n+1}}{(n+3)!} &= 9\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}x^{2\,n+1} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}x^{2\,n+1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)!}x^{2\,n+1} \\ &= 9\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(n+3)!} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(n+1)!} \\ &= 9\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-5}}{n!} - 5\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-3}}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n-1}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2\,n+1}}{(n+3)!} &= \frac{9}{x^5}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} - \frac{5}{x^3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{9}{x^5} - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{5\left(x^2+1\right)}{x^3} - \frac{9\left(x^4+2\,x^2+2\right)}{2\,x^5}\right) \\ &= \left(\frac{9}{x^5} - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x}\right) e^{\left(x^2\right)} + \left(-\frac{1}{2\,x} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^5}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 52. ← page 10

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3), (X+3)(X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-3, -2$. Si l'on évalue l'égalité $X^2 + 1 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$ en -3, on obtient directement : $a = 10$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2 + 1 = 10 - 5(X+3) + (X+3)(X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)6^n x^n}{(n+3)!} &= 10\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}6^n x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}6^n x^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)!}6^n x^n \\ &= 10\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n x^n}{(n+3)!} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n x^n}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n x^n}{(n+1)!} \\ &= 10\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{6^{n-3} x^{n-3}}{n!} - 5\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{6^{n-2} x^{n-2}}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^{n-1} x^{n-1}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)6^n x^n}{(n+3)!} &= \frac{5}{108\,x^3}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(6\,x)^n}{n!} - \frac{5}{36\,x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(6\,x)^n}{n!} + \frac{1}{6\,x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(6\,x)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{5}{108\,x^3} - \frac{5}{36\,x^2} + \frac{1}{6\,x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(6\,x)^n}{n!} + \left(\frac{5\,(6\,x+1)}{36\,x^2} - \frac{1}{6\,x} - \frac{5\left(18\,x^2+6\,x+1\right)}{108\,x^3}\right) \\ &= \left(\frac{5}{108\,x^3} - \frac{5}{36\,x^2} + \frac{1}{6\,x}\right) e^{(6\,x)} + \left(-\frac{1}{6\,x} - \frac{5}{36\,x^2} - \frac{5}{108\,x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. ← page 10

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+2), (2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 - 2X - 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes

de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1, -\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $X^2-2X-1 = a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a = 2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{1}{4}$. En conclusion, on a :

$$X^2 - 2X - 1 = 2 - \frac{7}{4}(2X+2) + \frac{1}{4}(2X+2)(2X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-2\,n-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n} - \frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n} \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!} - \frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n)!} \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^{2\,n-2}}{(2\,n)!} - \frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-2\,n-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(2\,n+2)!} &= \frac{4}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{7\sqrt{\frac{1}{2}}}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\
&= \left(\frac{4}{x^2}+\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{7\sqrt{\frac{1}{2}}}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(-\frac{4}{x^2}\right) \\
&= \left(\frac{4}{x^2}+\frac{1}{4}\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right) - \frac{7\sqrt{\frac{1}{2}}}{2\,x}\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right) + \left(-\frac{4}{x^2}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 54. ← page 10

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+2), (2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $X^2 - 385X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1, -\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $X^2-385X = a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a = 386$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{1}{4}$. En conclusion, on a :

$$X^2 - 385X = 386 - \frac{773}{4}(2X+2) + \frac{1}{4}(2X+2)(2X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - 385\,n)5^n x^n}{(2\,n+2)!} &= 386 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!} 5^n x^n - \frac{773}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!} 5^n x^n \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!} 5^n x^n \\ &= 386 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^n}{(2\,n+2)!} - \frac{773}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^n}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^n}{(2\,n)!} \\ &= 386 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1} x^{n-1}}{(2\,n)!} - \frac{773}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^n}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^n}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part), où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - 385\,n)5^n x^n}{(2\,n+2)!} &= \frac{386}{5\,x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{773\sqrt{5}}{20\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= \left(\frac{386}{5\,x} + \frac{1}{4}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{773\sqrt{5}}{20\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(-\frac{386}{5\,x}\right) \\ &= \left(\frac{386}{5\,x} + \frac{1}{4}\right) \cosh\left(\sqrt{5}\sqrt{x}\right) - \frac{773\sqrt{5}}{20\sqrt{x}} \sinh\left(\sqrt{5}\sqrt{x}\right) + \left(-\frac{386}{5\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - 385\,n)5^n x^n}{(2\,n+2)!} &= \left(\frac{386}{5\,x} + \frac{1}{4}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{5}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{773\sqrt{5}}{20\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{5}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(-\frac{386}{5\,x}\right) \\ &= \left(\frac{386}{5\,x} + \frac{1}{4}\right) \cos\left(\sqrt{5}\sqrt{-x}\right) - \frac{773\sqrt{5}}{20\sqrt{-x}} \sin\left(\sqrt{5}\sqrt{-x}\right) + \left(-\frac{386}{5\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 55. ← page 10

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+1), (X+1)X)$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $5X^2 - X - 3$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1,0$. Si l'on évalue l'égalité $5X^2 - X - 3 = a + b(X+1) + c(X+1)X$ en -1, on obtient directement : $a = 3$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $5 = c$. En conclusion, on a :

$$5X^2 - X - 3 = 3 - 6(X+1) + 5(X+1)X.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(5\,n^2-n-3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(n+1)!} &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n} \\ &+ 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)n}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n} \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(n+1)!} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{n!} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(n-1)!} \\ &= 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^{2\,n-2}}{n!} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{n!} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^{2\,n+2}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(5\,n^2-n-3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2\,n}}{(n+1)!} &= \frac{6}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n!} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n!} + \frac{5}{2}\,x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{6}{x^2} - 6 + \frac{5}{2}\,x^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{6}{x^2}\right) \\ &= \left(\frac{6}{x^2} - 6 + \frac{5}{2}\,x^2\right) e^{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)} + \left(-\frac{6}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 56. ← page 10

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{1}{2}$, puis : $a = -\frac{5}{2}$. En conclusion, on a :

$$X - 2 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(2X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-2)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)!}(-1)^n\,x^{2\,n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)}{(2\,n+1)!}(-1)^n\,x^{2\,n+1} \\ &= -\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-2)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= \frac{1}{2}\,x\cos(x) - \frac{5}{2}\sin(x),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 57. ← page 10

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3), (X+3)(X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $3X^2 - X + 2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le

déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-3, -2$. Si l'on évalue l'égalité $3X^2 - X + 2 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$ en -3, on obtient directement : $a = 32$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $3 = c$. En conclusion, on a :

$$3X^2 - X + 2 = 32 - 16(X+3) + 3(X+3)(X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,n^2 - n + 2\right)(-1)^n\, x^{2\,n}}{(n+3)!} &= 32 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}\,(-1)^n\, x^{2\,n} - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}\,(-1)^n\, x^{2\,n} \\ &\quad + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)!}\,(-1)^n\, x^{2\,n} \\ &= 32 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(n+3)!} - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(n+2)!} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(n+1)!} \\ &= 32 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-3}\, x^{2\,n-6}}{n!} - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}\, x^{2\,n-4}}{n!} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^{2\,n-2}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(3\,n^2 - n + 2\right)(-1)^n\, x^{2\,n}}{(n+3)!} &= -\frac{32}{x^6} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} - \frac{16}{x^4} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} - \frac{3}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(-\frac{32}{x^6} - \frac{16}{x^4} - \frac{3}{x^2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} + \left(\frac{3}{x^2} - \frac{16\left(x^2 - 1\right)}{x^4} + \frac{16\left(x^4 - 2\,x^2 + 2\right)}{x^6}\right) \\ &= \left(-\frac{32}{x^6} - \frac{16}{x^4} - \frac{3}{x^2}\right) e^{\left(-x^2\right)} + \left(\frac{3}{x^2} - \frac{16}{x^4} + \frac{32}{x^6}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 58. ← page 10

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\}, \quad \frac{22}{(n+2)(n+1)} = -\frac{22}{n+2} + \frac{22}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{22\,\left(\frac{3}{2}\right)^n x^{n+1}}{(n+2)(n+1)} &= -22 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\,x\right)^n x}{n+2} + 22 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\,x\right)^n x}{n+1} \\ &= -22 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\,x\right)^{n-1} x}{n+1} + 22 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\,x\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{22\,\left(\frac{3}{2}\right)^n x^{n+1}}{(n+2)(n+1)} &= -\frac{88}{9\,x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{44}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(-\frac{88}{9\,x} + \frac{44}{3}\right) \ln\left(-\frac{3}{2}\,x + 1\right) + \left(\frac{44}{3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 59. ← page 11

1. On a trivialement $a = -1$ et $b = 1$.
2. Soit $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^{2n} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}x^2\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}x^2\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}x^2\right)^n + \frac{1}{2}x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{2}x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)x^{2n} = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2} + \frac{\frac{1}{2}x^2}{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 60. ← page 11

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+3), (2X+3)(2X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $4X^2-2$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-\frac{3}{2}, -1$. Si l'on évalue l'égalité $4X^2-2 = a + b(2X+3) + c(2X+3)(2X+2)$ en $-\frac{3}{2}$, on obtient directement : $a = 7$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $4 = 4c$, et on en déduit $c = 1$. En conclusion, on a :

$$4X^2 - 2 = 7 - 5(2X+3) + (2X+3)(2X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(2n^2-1\right)x^{2n+1}}{(2n+3)!} &= 7\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+3)!}x^{2n+1} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+3)}{(2n+3)!}x^{2n+1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{(2n+3)!}x^{2n+1} \\ &= 7\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+3)!} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 7\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ;

le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(2\,n^2-1\right)x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)!} = \frac{7}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} - \frac{5}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$$
$$= -\frac{5}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} + \left(\frac{7}{x^2}+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(-\frac{2}{x}\right)$$
$$= -\frac{5}{x}\cosh(x) + \left(\frac{7}{x^2}+1\right)\sinh(x) + \left(-\frac{2}{x}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 61. ← page 11

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2-2X+1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2-2X+1 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2-2X+1 = 1-X+X(X-1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-2\,n+1\right)(-1)^n\,x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n\,x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}(-1)^n\,x^{n+1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}(-1)^n\,x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{(n-2)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,x^{n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}\,x^{n+3}}{n!}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2-2\,n+1\right)(-1)^n\,x^{n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + x^3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$
$$= \left(x+x^2+x^3\right)e^{(-x)},$$

d'où le résultat.

Corrigé 62. ← page 11

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-3$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{1}{2}$, puis : $a = -4$. En conclusion, on a :

$$X-3 = -4+\frac{1}{2}(2X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-3)x^{n+1}}{(2\,n+2)!} &= -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+2)!}\,(-1)^n\,x^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}\,(-1)^n\,x^{n+1}\\ &= -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+2)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= -4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^{n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{(2\,n+1)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-3)x^{n+1}}{(2\,n+2)!} &= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\sqrt{x}^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\sqrt{x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\\ &= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\sqrt{x}^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\sqrt{x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + (-4)\\ &= 4\cos\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right) + (-4)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(n-3)x^{n+1}}{(2\,n+2)!} &= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{-x}^{2\,n}}{(2\,n)!} + \frac{x}{2\,\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{-x}^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + (-4)\\ &= 4\cosh\left(\sqrt{-x}\right) + \frac{x}{2\,\sqrt{-x}}\sinh\left(\sqrt{-x}\right) + (-4)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 63. ← page 11

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 + X = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :
$$X^2 + X = 2X + X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{n+1} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{n+1}\\ &= 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\,x\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\,x\right)^n\\ &= \frac{4}{3}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\,x\right)^{n-1} + \frac{4}{9}\,x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\,x\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 des dérivées de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ évaluée en $\dfrac{2}{3}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{n+1} = \frac{\frac{4}{3}x^2}{1-\frac{2}{3}x} + \frac{\frac{8}{9}x^3}{\left(1-\frac{2}{3}x\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 64. ← page 11

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{n+1}{3\,(2\,n+1)(n+2)} = \frac{1}{9\,(2\,n+1)} + \frac{1}{9\,(n+2)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^n (n+1)x^{2\,n+1}}{3\,(2\,n+1)(n+2)} &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{4}{5}x^2\right)^n x}{n+2} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\sqrt{\frac{1}{5}}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+1}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{4}{5}x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\sqrt{\frac{1}{5}}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^n (n+1)x^{2\,n+1}}{3\,(2\,n+1)(n+2)} &= -\frac{25}{144\,x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{4}{5}x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{5}{18}\sqrt{\frac{1}{5}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(2\sqrt{\frac{1}{5}}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\frac{25}{144\,x^3}\ln\left(\frac{4}{5}x^2+1\right) + \frac{5}{18}\sqrt{\frac{1}{5}}\arctan\left(2\sqrt{\frac{1}{5}}x\right) + \left(\frac{5}{36\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 65. ← page 12

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -1\}, \quad \frac{n-1}{2\,(n+3)(n+1)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{2\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \left]-2\sqrt{\frac{1}{5}}, 2\sqrt{\frac{1}{5}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n (n-1)x^{2\,n}}{2\,(n+3)(n+1)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}x^2\right)^n}{n+3} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}x^2\right)^n}{n+1}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}x^2\right)^{n-2}}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}x^2\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n (n-1)x^{2\,n}}{2\,(n+3)(n+1)} &= \frac{64}{125\,x^6}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{5\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}x^2\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= -\left(-\frac{2}{5\,x^2} + \frac{64}{125\,x^6}\right)\ln\left(-\frac{5}{4}x^2+1\right) + \left(-\frac{2}{5\,x^2} - \frac{16}{25\,x^4}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 66. ← page 12

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-1\}, \quad \frac{4}{3\,(n+3)(n+1)} = -\frac{2}{3\,(n+3)} + \frac{2}{3\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \,]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,x^{2\,n}}{3\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n+3} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n+1} \\ &= -\frac{2}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n-2}}{n+1} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,x^{2\,n}}{3\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{2}{3\,x^6}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{3\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(\frac{2}{3\,x^2} - \frac{2}{3\,x^6}\right)\ln\left(-x^2+1\right) + \left(\frac{1}{3\,x^2} + \frac{2}{3\,x^4}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. ← page 12

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 1$, puis : $a = -2$. En conclusion, on a :
$$X - 1 = -2 + (X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,(n-1)x^{2\,n}}{(n+1)!} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,(-2)^n\,x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)!}\,(-2)^n\,x^{2\,n} \\ &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{2\,n}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{2\,n}}{n!} \\ &= -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^{n-1}\,x^{2\,n-2}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,x^{2\,n}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,(n-1)x^{2\,n}}{(n+1)!} &= \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-2\,x^2\right)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-2\,x^2\right)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{1}{x^2}+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-2\,x^2\right)^n}{n!} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{x^2}+1\right)e^{\left(-2\,x^2\right)} + \left(-\frac{1}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 68. ← page 12

1. On a trivialement $a = 2$ et $b = 2$.
2. Soit $x \in \,]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(n+1)x^{2\,n} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{2\,n}\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^2\right)^n + 2\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en x^2. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(n+1)x^{2\,n} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2\,x^2}{\left(1-x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 69. ← page 12

1. On a trivialement $a = -1$ et $b = 1$.
2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n\,(n-1)x^n &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-2)^n\,x^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-2\,x)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-2\,x)^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-2\,x)^n - 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-2\,x)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-2\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n\,(n-1)x^n = -\frac{1}{1+2x} - \frac{2\,x}{\left(1+2x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. ← page 12

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $6X+3$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = 3$, puis : $a = -6$. En conclusion, on a :

$$6X + 3 = -6 + 3(2X+3).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{7}\right)^n (2\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= -6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+3)!}\left(\frac{1}{7}\right)^n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+3)}{(2\,n+3)!}\left(\frac{1}{7}\right)^n x^{n+1} \\
&= -6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+3)!} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n x^{n+1}}{(2\,n+2)!} \\
&= -6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1} x^{n}}{(2\,n+1)!} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1} x^{n}}{(2\,n)!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{7}\right)^n (2\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= -\frac{294\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + 21 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\
&= 21 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{294\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(42\sqrt{7}\sqrt{\frac{1}{7}} - 21\right) \\
&= 21\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{x}\right) - \frac{294\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt{x}} \sinh\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{x}\right) + \left(42\sqrt{7}\sqrt{\frac{1}{7}} - 21\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,\left(\frac{1}{7}\right)^n (2\,n+1)x^{n+1}}{(2\,n+3)!} &= 21 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{294\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(42\sqrt{7}\sqrt{\frac{1}{7}} - 21\right) \\
&= 21\cos\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{-x}\right) - \frac{294\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt{-x}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{-x}\right) + \left(42\sqrt{7}\sqrt{\frac{1}{7}} - 21\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 71. ← page 13

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}, \quad \frac{1}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = -\frac{1}{2\,(2\,n+3)} + \frac{1}{4\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \,]-1,1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2\,n+3} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2\,n+1}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4\,(2\,n+3)(n+1)} &= \frac{1}{4\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2\,x^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= -\frac{1}{4\,x}\ln(-x+1) - \frac{1}{2\,x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + \left(\frac{1}{2\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4\,(2\,n+3)(n+1)} = -\frac{1}{4\,x}\ln(-x+1) - \frac{1}{2\,\sqrt{-x}x}\arctan\left(\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{1}{2\,x}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 72. ← page 13

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C}\setminus\{-3,-1\}, \quad \frac{n}{6\,(n+3)(n+1)} = \frac{1}{4\,(n+3)} - \frac{1}{12\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{86},\sqrt{86}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\right)^n n x^{2\,n+1}}{6\,(n+3)(n+1)} &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\,x^2\right)^n x}{n+3} - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\,x^2\right)^n x}{n+1}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\,x^2\right)^{n-2} x}{n+1} - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\,x^2\right)^n x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\right)^n n x^{2\,n+1}}{6\,(n+3)(n+1)} &= \frac{159014}{x^5}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{43}{6\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{86}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1}\\ &= -\left(-\frac{43}{6\,x}+\frac{159014}{x^5}\right)\ln\left(-\frac{1}{86}\,x^2+1\right) + \left(-\frac{43}{4\,x}-\frac{1849}{x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 73. ← page 13

1. On a trivialement $a = -3$ et $b = 9$.
2. Soit $x \in]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 3\,(-1)^n\,(3\,n-1)x^{2\,n} &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{2\,n} + 9\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-1)^n\,x^{2\,n}\\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n + 9\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^n\\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n - 9\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3\,(-1)^n\,(3\,n-1)x^{2\,n} = -\frac{3}{1+x^2} - \frac{9\,x^2}{(1+x^2)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 74. ← page 13

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2-2, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2-2 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-2$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1=c$. En conclusion, on a :

$$X^2-2 = -2 + X + X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-2{,}2\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n} &= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n}\\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n\\
&= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^n + \frac{1}{4}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-1} + \frac{1}{16}\,x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\,x^2\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{1}{4}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n x^{2\,n} = -\frac{2}{1-\frac{1}{4}x^2} + \frac{\frac{1}{4}\,x^2}{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^2} + \frac{\frac{1}{8}\,x^4}{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 75. ← page 13

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C}\setminus\{-3,-1\}, \quad \frac{1}{2\,(n+3)(n+1)} = -\frac{1}{4\,(n+3)} + \frac{1}{4\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \,]-2{,}2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{2\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n+3} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n+1} \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-2}}{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n}{2\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{2}{x^3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(\frac{1}{2\,x} - \frac{2}{x^3}\right)\ln\left(-\frac{1}{2}\,x+1\right) + \left(\frac{1}{4\,x} + \frac{1}{x^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 76. ← page 13

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1,(2X),(2X)(2X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2+2X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $0, \frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $2X^2+2X = a+b(2X)+c(2X)(2X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2 = 4\,c$, et on en déduit $c=\frac{1}{2}$. En conclusion, on a :

$$2X^2+2X = \frac{3}{2}(2X) + \frac{1}{2}(2X)(2X-1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(n^2+n\right)3^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!} &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)}{(2\,n)!}3^n x^{2\,n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)(2\,n-1)}{(2\,n)!}3^n x^{2\,n+1} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2\,n+1}}{(2\,n-1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2\,n+1}}{(2\,n-2)!} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} x^{2\,n+3}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} x^{2\,n+3}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(n^2+n\right)3^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!} &= \frac{3}{2}\,\sqrt{3}x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{3}{2}\,x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= \frac{3}{2}\,x^3\cosh\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{3}{2}\,\sqrt{3}x^2\sinh\left(\sqrt{3}x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 77. ← page 14

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1,(2X),(2X)(2X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2-X, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) :

il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $0, \frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $X^2 - X = a + b(2X) + c(2X)(2X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 0$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = 4\,c$, et on en déduit $c = \frac{1}{4}$. En conclusion, on a :

$$X^2 - X = -\frac{1}{4}(2X) + \frac{1}{4}(2X)(2X-1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2-n)2^n x^n}{(2\,n)!} &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)}{(2\,n)!}2^n x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)(2\,n-1)}{(2\,n)!}2^n x^n \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{(2\,n-1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{(2\,n-2)!} \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable, où nous supposons d'abord $x \geqslant 0$ afin de pouvoir écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et faire apparaître un exposant pair :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2-n)2^n x^n}{(2\,n)!} &= -\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} \\ &= \frac{1}{2}\,x\cosh\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{x}\sinh\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2-n)2^n x^n}{(2\,n)!} &= \frac{1}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} - \frac{\sqrt{2}x}{4\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \\ &= \frac{1}{2}\,x\cos\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right) - \frac{\sqrt{2}x}{4\sqrt{-x}}\sin\left(\sqrt{2}\sqrt{-x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. ← page 14

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{4\,n+1}{(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{2}{2\,n+1} + \frac{3}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(4\,n+1)x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+1)} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^n}{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n}}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1{,}1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(4\,n+1)x^{2\,n}}{(2\,n+1)(n+1)} = \frac{3}{2\,x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{\sqrt{2}}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$
$$= -\frac{3}{2\,x^2}\ln\left(-2\,x^2+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{x}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 79. ← page 14

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -3, -1\right\}, \quad \frac{2\,n-1}{2\,(2\,n+3)(n+3)(n+1)} = \frac{8}{3\,(2\,n+3)} - \frac{7}{12\,(n+3)} - \frac{3}{4\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n(2\,n-1)x^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+3)(n+1)} = -\frac{7}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n x}{n+3} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+3}$$
$$= -\frac{7}{12}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n-2} x}{n+1} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^n x}{n+1} + \frac{8}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n-2} x}{2\,n+1}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et d'une somme de série entière non usuelle, mais qu'on sait calculer en intégrant terme à terme une série géométrique ; nous le faisons en remarque plus bas, et admettons provisoirement que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n(2\,n-1)x^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+3)(n+3)(n+1)} = -\frac{14}{3\,x^5}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{3}{2\,x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{32\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\,x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$
$$= -\left(-\frac{3}{2\,x} - \frac{14}{3\,x^5}\right)\ln\left(-\frac{1}{2}\,x^2+1\right) + \frac{32\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\,x^2}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}x-1}\right) + \left(-\frac{16\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\,x} + \frac{7}{12\,x} +\right.$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 80. ← page 14

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $4X^2 - X + 1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $4X^2 - X + 1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $4 = c$. En conclusion, on a :
$$4X^2 - X + 1 = 1 + 3X + 4X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(4n^2 - n + 1\right)(-12)^n x^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-12)^n x^{2n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n(-12)^n x^{2n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(-12)^n x^{2n+1} \\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-12x^2\right)^n + 3x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-12x^2\right)^n + 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-12x^2\right)^n \\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-12x^2\right)^n - 36x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-12x^2\right)^{n-1} + 576x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-12x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-12x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$
On en déduit :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4n^2 - n + 1\right)(-12)^n x^{2n+1} = \frac{x}{1+12x^2} - \frac{36x^3}{\left(1+12x^2\right)^2} + \frac{1152x^5}{\left(1+12x^2\right)^3},$$
d'où le résultat.

Corrigé 81. ← page 14

1. On a trivialement $a = 2$ et $b = 3$.
2. Soit $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n (3n+2)x^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}x\right)^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{2}x\right)^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}x\right)^n + \frac{9}{2}x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{2}x\right)^{n-1}\end{aligned}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{3}{2}x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(3\,n+2)x^n=\frac{2}{1-\frac{3}{2}x}+\frac{\frac{9}{2}\,x}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 82. ← page 14

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1,(2X+2),(2X+2)(2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $8X^2+2X$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-1,-\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $8X^2+2X=a+b(2X+2)+c(2X+2)(2X+1)$ en -1, on obtient directement : $a=6$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $8=4\,c$, et on en déduit $c=2$. En conclusion, on a :

$$8X^2+2X=6-5(2X+2)+2(2X+2)(2X+1).$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\left(4\,n^2+n\right)\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!}&=6\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+2)!}\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+2)}{(2\,n+2)!}\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}\\&\quad+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+2)(2\,n+1)}{(2\,n+2)!}\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}\\&=6\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!}-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\\&=6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} x^{2\,n-1}}{(2\,n)!}-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\left(4\,n^2+n\right)\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n+2)!}&=\frac{12}{5\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}-2\sqrt{\frac{5}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+2\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}\\&=\left(\frac{12}{5\,x}+2\,x\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}-2\sqrt{\frac{5}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\left(-\frac{12}{5\,x}\right)\\&=\left(\frac{12}{5\,x}+2\,x\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)-2\sqrt{\frac{5}{2}}\sinh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)+\left(-\frac{12}{5\,x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 83. ← page 15

1. On a trivialement $a=1$ et $b=9$.
2. Soit $x\in\,]-2{,}2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(9\,n+1)x^{n+1}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}\\&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^n+9\,x\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^n\\&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^n-\frac{9}{2}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{2}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (9\,n+1) x^{n+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{9}{2}\,x^2}{\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 84. ← page 15

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -2, -1\right\}, \qquad \frac{n+11}{(2\,n+3)(n+2)(n+1)} = -\frac{38}{2\,n+3} + \frac{9}{n+2} + \frac{10}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{29}, \sqrt{29}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{29}\right)^n (n+11) x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+2)(n+1)} &= 9\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{29}\,x^2\right)^n x}{n+2} + 10\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{29}\,x^2\right)^n x}{n+1} - 38\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{29}}x\right)^{2\,n} x}{2\,n+3} \\ &= 9\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{29}\,x^2\right)^{n-1} x}{n+1} + 10\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{29}\,x^2\right)^n x}{n+1} - 38\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\sqrt{\frac{1}{29}}x\right)^{2\,n-2} x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{29}\right)^n (n+11) x^{2\,n+1}}{(2\,n+3)(n+2)(n+1)} &= -\frac{7569}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{29}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{290}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{29}\,x^2\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{31958\sqrt{\frac{1}{29}}}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{29}}x\right)}{2\,n+1} \\ &= \left(\frac{290}{x} - \frac{7569}{x^3}\right)\ln\left(\frac{1}{29}\,x^2+1\right) + \frac{31958\sqrt{\frac{1}{29}}}{x^2}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{29}}x\right) + \left(-\frac{1102\sqrt{29}\sqrt{\frac{1}{29}}}{x} + \frac{261}{x}\right.\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 85. ← page 15

1. On a trivialement $a = -1$ et $b = 1$.
2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n (n-1) x^n &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n 9^n x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (9\,x)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(9\,x)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (9\,x)^n + 9\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(9\,x)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $9\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n (n-1) x^n = -\frac{1}{1-9x} + \frac{9\,x}{(1-9x)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 86. ← page 15

1. On a trivialement $a = -3$ et $b = 1$.
2. Soit $x \in]-7,7[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^n (n-3) x^n &= -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{7}\right)^n x^n \\ &= -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{7}\,x\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{7}\,x\right)^n \\ &= -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{7}\,x\right)^n - \frac{1}{7}\,x \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{7}\,x\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{7}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^n (n-3) x^n = -\frac{3}{1+\frac{1}{7}x} - \frac{\frac{1}{7}\,x}{\left(1+\frac{1}{7}x\right)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 87. ← page 15

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2-X-7, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2 - X - 7 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = -7$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2 - X - 7 = -7 + X(X-1).$$

2. Soit $x \in]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - n - 7\right)(-1)^n x^{2n+1} = -7 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(-1)^n x^{2n+1}$$
$$= -7\,x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n + x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^n$$
$$= -7\,x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n + x^5 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^{n-2}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - n - 7\right)(-1)^n x^{2n+1} = -\frac{7\,x}{1+x^2} + \frac{2\,x^5}{\left(1+x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 88. ← page 15

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{1}{2}$, puis : $a = -\frac{5}{2}$. En conclusion, on a :

$$X - 1 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(2X+3).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n (n-1) x^{2n+1}}{(2\,n+3)!} = -\frac{5}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+3)!} 5^n x^{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+3)}{(2\,n+3)!} 5^n x^{2n+1}$$
$$= -\frac{5}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^{2n+1}}{(2\,n+3)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^{2n+1}}{(2\,n+2)!}$$
$$= -\frac{5}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1} x^{2n-1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1} x^{2n-1}}{(2\,n)!}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n (n-1) x^{2n+1}}{(2\,n+3)!} = -\frac{\sqrt{5}}{10\,x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}x\right)^{2n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{10\,x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}x\right)^{2n}}{(2\,n)!}$$
$$= \frac{1}{10\,x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}x\right)^{2n}}{(2\,n)!} - \frac{\sqrt{5}}{10\,x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{5}x\right)^{2n+1}}{(2\,n+1)!} + \left(\frac{2}{5\,x}\right)$$
$$= \frac{1}{10\,x} \cosh\left(\sqrt{5}x\right) - \frac{\sqrt{5}}{10\,x^2} \sinh\left(\sqrt{5}x\right) + \left(\frac{2}{5\,x}\right),$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. ← page 16

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X+27, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+X+27 = a+bX+cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 27$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :
$$X^2+X+27 = 27+2X+X(X-1).$$

2. Soit $x \in\,]-3,3[$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n+27\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{n+1} &= 27\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{n+1}\\ &= 27\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\,x\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\,x\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\,x\right)^n\\ &= 27\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\,x\right)^n - \frac{2}{3}\,x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\,x\right)^{n-1} + \frac{1}{9}\,x^3\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\,x\right)^{n-2}\end{aligned}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{1}{3}\,x$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$
On en déduit :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n+27\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{n+1} = \frac{27\,x}{1+\frac{1}{3}x} - \frac{\frac{2}{3}\,x^2}{\left(1+\frac{1}{3}x\right)^2} + \frac{\frac{2}{9}\,x^3}{\left(1+\frac{1}{3}x\right)^3},$$
d'où le résultat.

Corrigé 90. ← page 16

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (2X+1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b = \frac{1}{2}$, puis : $a = -\frac{3}{2}$. En conclusion, on a :
$$X-1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2X+1).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+1)!}\,(-1)^n\,x^{2\,n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n+1)}{(2\,n+1)!}\,(-1)^n\,x^{2\,n+1}\\ &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$
On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(n-1)x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \frac{1}{2}\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!}\\ &= \frac{1}{2}\,x\cos{(x)} - \frac{3}{2}\sin{(x)}\,,\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 91. ← page 16

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3), (X+3)(X+2))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X+2, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $-3, -2$. Si l'on évalue l'égalité $X^2+X+2 = a + b(X+3) + c(X+3)(X+2)$ en -3, on obtient directement : $a = 8$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2+X+2 = 8 - 4(X+3) + (X+3)(X+2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+n+2\right)(-2)^n\, x^{n+1}}{(n+3)!} &= 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!}\,(-2)^n\, x^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n+3)!}\,(-2)^n\, x^{n+1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)!}\,(-2)^n\, x^{n+1} \\
&= 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\, x^{n+1}}{(n+3)!} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\, x^{n+1}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n\, x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= 8\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-3}\, x^{n-2}}{n!} - 4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-2}\, x^{n-1}}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1}\, x^{n}}{n!}
\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+n+2\right)(-2)^n\, x^{n+1}}{(n+3)!} &= -\frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} + \left(-\frac{2\,x-1}{x} + \frac{2\,x^2-2\,x+1}{x^2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{(-2\,x)} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 92. ← page 16

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier X^2+X+1, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $X^2+X+1 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $1 = c$. En conclusion, on a :

$$X^2+X+1 = 1 + 2X + X(X-1).$$

2. Soit $x \in \,]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n+1\right)(-1)^n x^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,(-1)^n x^{2n+1}\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^n + x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^n\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n - 2\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-x^2\right)^{n-1} + x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n+1\right)(-1)^n x^{2n+1} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{2\,x^3}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{2\,x^5}{\left(1+x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. ← page 16

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, (X+3))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$ (et en particulier $X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Une identification immédiate (en commençant par comparer les coefficients dominants) permet de démontrer qu'on a : $b=1$, puis : $a=-4$. En conclusion, on a :
$$X-1 = -4 + (X+3).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,(n-1)x^n}{(n+3)!} &= -4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)!}(-2)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+3)}{(n+3)!}(-2)^n x^n\\ &= -4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n x^n}{(n+3)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n x^n}{(n+2)!}\\ &= -4\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-2)^{n-3} x^{n-3}}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-2)^{n-2} x^{n-2}}{n!}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'exponentielle, après factorisation convenable (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n\,(n-1)x^n}{(n+3)!} &= \frac{1}{2\,x^3}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-2\,x)^n}{n!} + \frac{1}{4\,x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-2\,x)^n}{n!}\\ &= \left(\frac{1}{2\,x^3}+\frac{1}{4\,x^2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2\,x)^n}{n!} + \left(\frac{2\,x-1}{4\,x^2} - \frac{2\,x^2-2\,x+1}{2\,x^3}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2\,x^3}+\frac{1}{4\,x^2}\right)e^{(-2\,x)} + \left(-\frac{1}{2\,x}+\frac{3}{4\,x^2}-\frac{1}{2\,x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 94. ← page 16

1. Tout d'abord, l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1, X, X(X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2+186$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en 0,1. Si l'on évalue l'égalité $2X^2 + 186 = a + bX + cX(X-1)$ en 0, on obtient directement : $a = 186$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2 = c$. En conclusion, on a :

$$2X^2 + 186 = 186 + 2X + 2X(X-1).$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n^2+93\right)\left(-\frac{2}{5}\right)^n x^{2n+1} &= 186\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n x^{2n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{2}{5}\right)^n x^{2n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{2}{5}\right)^n x^{2n+1}\\ &= 186\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{2}{5}x^2\right)^n + 2\,x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{2}{5}x^2\right)^n\\ &= 186\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}x^2\right)^n - \frac{4}{5}x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{2}{5}x^2\right)^{n-1} + \frac{8}{25}x^5\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{2}{5}x^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $-\dfrac{2}{5}x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n^2+93\right)\left(-\frac{2}{5}\right)^n x^{2n+1} = \frac{186\,x}{1+\frac{2}{5}x^2} - \frac{\frac{4}{5}x^3}{\left(1+\frac{2}{5}x^2\right)^2} + \frac{\frac{16}{25}x^5}{\left(1+\frac{2}{5}x^2\right)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 95. ← page 16

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}, \quad \frac{5}{2\,(2\,n+1)(n+2)} = \frac{5}{3\,(2\,n+1)} - \frac{5}{6\,(n+2)}.$$

2. Soit $x \in]-2,2[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+2)} &= -\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{n+2} + \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{2\,n+1}\\ &= -\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n-1} x}{n+1} + \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^n x}{2\,n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x=0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+2)} &= \frac{10}{3\,x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{n+1}}{n+1}+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}\\ &= \frac{10}{3\,x}\ln\left(\frac{1}{2}\,x+1\right)+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x=-(-x)=-(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+2)}=\frac{10}{3\,x}\ln\left(\frac{1}{2}\,x+1\right)+\frac{10\sqrt{\frac{1}{2}}x}{3\sqrt{-x}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-x}-1}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x\in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 96. ← page 17

1. Tout d'abord, l'existence de $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$, vérifiant la décomposition de l'énoncé, est assurée par le fait que la famille $(1,(2X),(2X)(2X-1))$ soit échelonnée en degré : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (et en particulier $2X^2-X-1$, qui appartient à cet espace vectoriel, est combinaison linéaire des polynômes de cette base). Pour déterminer ces scalaires, nul besoin de développer comme un cochon (et je vous le déconseille fortement) : il suffit d'évaluer l'égalité en des racines des polynômes du membre de droite, c'est-à-dire successivement en $0,\,\frac{1}{2}$. Si l'on évalue l'égalité $2X^2-X-1=a+b(2X)+c(2X)(2X-1)$ en 0, on obtient directement : $a=-1$. Et ainsi de suite. Pour déterminer c, une évaluation en des racines ne simplifie pas la tâche, mais on peut par exemple le déterminer en comparant les coefficients dominants dans chaque membre de l'égalité : c'est moins calculatoire que si on voulait l'exprimer à l'aide des coefficients précédemment déterminés. Cette idée donne ici : $2=4\,c$, et on en déduit $c=\frac{1}{2}$. En conclusion, on a :
$$2X^2-X-1=-1+\frac{1}{2}(2X)(2X-1).$$
2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(2\,n^2-n-1\right)(-1)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!} &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n)!}(-1)^n x^{2\,n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n)(2\,n-1)}{(2\,n)!}(-1)^n x^{2\,n+1}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n-2)!}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1} x^{2\,n+3}}{(2\,n)!}\end{aligned}$$
après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de fonctions trigonométriques, après factorisation convenable :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(2\,n^2-n-1\right)(-1)^n x^{2\,n+1}}{(2\,n)!} &= -x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2\,n}}{(2\,n)!}-\frac{1}{2}\,x^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2\,n}}{(2\,n)!}\\ &= \left(-x-\frac{1}{2}\,x^3\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2\,n}}{(2\,n)!}\\ &= \left(-x-\frac{1}{2}\,x^3\right)\cos(x),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Corrigé 97. ← page 17

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3, -2\}, \quad \frac{n}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{n+3} - \frac{2}{n+2}.$$

2. Soit $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n n x^{2n+1}}{(n+3)(n+2)} &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^n x}{n+3} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^n x}{n+2} \\ &= 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{n-2} x}{n+1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{n-1} x}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n n x^{2n+1}}{(n+3)(n+2)} &= \frac{24}{x^5}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{8}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(-\frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^5}\right) \ln\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{12}{x^3}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 98. ← page 17

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}, \quad \frac{n-1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} = -\frac{3}{2\,(2\,n+1)} + \frac{1}{n+1}.$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n-1) x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2\,x)^n x}{n+1} - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2\,x)^n x}{2\,n+1}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme et de l'arc tangente (à condition d'écrire $x = (\sqrt{x})^2$ si x est positif, pour faire apparaître une puissance paire ; si x est négatif alors nous écrirons $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$ et il faudra encore un peu travailler). :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n-1) x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2\,x)^{n+1}}{n+1} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln(2\,x+1) - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat si x est positif. Si x est négatif, on écrit $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, et un raisonnement analogue à celui ci-dessus aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n-1) x^{n+1}}{2\,(2\,n+1)(n+1)} = \frac{1}{2}\ln(2\,x+1) - \frac{3\sqrt{2}x}{4\sqrt{-x}}\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{-x}+1}{\sqrt{2}\sqrt{-x}-1}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on remarque qu'on obtient cette somme en intégrant terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ (ce qui est possible parce qu'il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Corrigé 99. ← page 17

1. C'est une décomposition en éléments simples, tout ce qu'il y a de plus classique. Il suffit de multiplier l'égalité par chacun des dénominateurs possibles du membre de droite, et de faire tendre la variable n vers leurs racines. Cela permet d'éliminer toutes les inconnues sauf une, et de les déterminer. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-1\}, \quad \frac{5}{6\,(n+3)(n+1)} = -\frac{5}{12\,(n+3)} + \frac{5}{12\,(n+1)}.$$

2. Soit $x \in]-1{,}1[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,(-1)^n\,x^{n+1}}{6\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{5}{12}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+3} + \frac{5}{12}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{5}{12}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}\,x^{n-1}}{n+1} + \frac{5}{12}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

après changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série entière en 0 du logarithme, et on en déduit (attention à bien prendre x non nul pour diviser ci-dessous ; le cas $x = 0$ étant de toute façon trivial considéré à part) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,(-1)^n\,x^{n+1}}{6\,(n+3)(n+1)} &= -\frac{5}{12\,x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1} + \frac{5}{12}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(-\frac{5}{12\,x^2} + \frac{5}{12}\right)\ln(x+1) + \left(\frac{5}{12\,x} - \frac{5}{24}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 100. ← page 17

1. On a trivialement $a = 25$ et $b = 7$.
2. Soit $x \in \left]-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n (7\,n+25)x^{2\,n+1} &= 25\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1} + 7\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{5}{2}\right)^n x^{2\,n+1} \\ &= 25\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\,x^2\right)^n + 7\,x\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{2}\,x^2\right)^n \\ &= 25\,x\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\,x^2\right)^n + \frac{35}{2}\,x^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{2}\,x^2\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qu'on a dérivée terme à terme et évaluée en $\dfrac{5}{2}\,x^2$. Plus précisément, pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n (7\,n+25)x^{2\,n+1} = \frac{25\,x}{1-\frac{5}{2}x^2} + \frac{\frac{35}{2}\,x^3}{\left(1-\frac{5}{2}x^2\right)^2},$$

d'où le résultat.