Rayon de convergence d'une série entière

💡 Calcul d'un rayon de convergence. N'oubliez pas qu'il n'y a pas que la règle de D'Alembert dans la vie.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 11

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{(-n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{10}{3}}} z^{4\,n}.$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 11

$$\sum_{n\geqslant 3} -\frac{1}{n^2-4} 3^n z^{3\,n}.$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 11

$$\sum_{n\geqslant 0} -\frac{2\,n^2-n-1}{5\,n-1} (-3)^n\, z^{3\,n}.$$

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 11

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, n^{9\,n} n!}{(2\,n)!} z^{2\,n}.$$

Exercice 5. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 12

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-2)^n\, n^{4\,n} n!}{(2\,n)!} z^{3\,n}.$$

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 12

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{9}{2}} e^{(14\,n)} n!}{(n+1)^n} z^n.$$

Exercice 7. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 12

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n} n!}{(2\,n)!} z^{3\,n}.$$

Exercice 8. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 13

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(-16\,n^2+2\,n\right) (-12)^n\, z^{3\,n}.$$

Exercice 9. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 13

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-3)^n\, n^n n!^{215}}{(2\,n)!^3} z^n.$$

Exercice 10. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 13

$$\sum_{n\geqslant 0} -\frac{1}{n^2+16\,n-2}5^n z^{2\,n}.$$

Exercice 11. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 13

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 545^n z^{3\,n}.$$

Exercice 12. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 14

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 e^n n!}{(n+1)^n} z^{4\,n}.$$

Exercice 13. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 14

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 14. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 14

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!} z^{n}.$$

Exercice 15. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 15

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{3}{7}} e^{(22\,n)} n!}{(n+1)^n} z^{4\,n}.$$

Exercice 16. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 15

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(-\frac{1}{4}\,n-\frac{1}{4}\right)(-1)^n\, z^{2\,n}.$$

Exercice 17. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 15

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!} z^{4\,n}.$$

Exercice 18. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 16

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-2)^n\, n^n n!}{(2\,n)!} z^{4\,n}.$$

Exercice 19. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 16

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, n^n}{(2\,n)!} z^{4\,n}.$$

Exercice 20. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 17

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n n^n n!}{(2\,n)!^2} z^{4\,n}.$$

Exercice 21. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 17

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{1}{3}} e^n n!}{(n+1)^n} z^{3\,n}.$$

Exercice 22. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 17

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{2}{5}} e^n n!}{(n+1)^n} z^{4\,n}.$$

Exercice 23. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 18

$$\sum_{n\geqslant 25} \frac{19}{n-24} (-1)^n z^{4\,n}.$$

Exercice 24. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 18

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-2)^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 25. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 18

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-2)^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 26. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 19

$$\sum_{n\geqslant 3} -\frac{3}{n-2} (-1)^n z^{3\,n}.$$

Exercice 27. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 19

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n n^n n!^3}{(2\,n)!^6} z^{4\,n}.$$

Exercice 28. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 19

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{(2\,n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{8}}} z^{3\,n}.$$

Exercice 29. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 20

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{6\,n}}{(2\,n)!} z^{2\,n}.$$

Exercice 30. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 20

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!} z^{4\,n}.$$

Exercice 31. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 21

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 32. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 21

$$\sum_{n\geqslant 0} -2\,n^2 z^n.$$

Exercice 33. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 21

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{(10\,n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{5}}} z^{4\,n}.$$

Exercice 34. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 22

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, n^n n!^2}{(2\,n)!^3} z^n.$$

Exercice 35. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 22

$$\sum_{n\geqslant 0} (n-3)\,(-1)^n\, z^{3\,n}.$$

Exercice 36. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 22

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{20\,n}}{(2\,n)!^6} z^n.$$

Exercice 37. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 22

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-2)^n\, n^n n!^3}{(2\,n)!^2} z^{3\,n}.$$

Exercice 38. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 23

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!} z^{2\,n}.$$

Exercice 39. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 23

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-2)^n\, n^n n!^{10}}{(2\,n)!} z^{4\,n}.$$

Exercice 40. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 23

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{9^n n^n n!} z^{4\,n}.$$

Exercice 41. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 24

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{16^n n^n n!} z^{2\,n}.$$

Exercice 42. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 24

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{3\,n} n!}{(2\,n)!} z^{4\,n}.$$

Exercice 43. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 25

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{8\,n} n!}{(2\,n)!} z^{3\,n}.$$

Exercice 44. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 25

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 45. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 25

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{7\,n}{13\,n^2 - 20\,n + 1} \left(-1\right)^n z^n.$$

Exercice 46. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 25

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{\left(-2\right)^n n^n n!} z^n.$$

Exercice 47. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 26

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(-1\right)^n n!^4}{(2\,n)!^3} z^n.$$

Exercice 48. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 26

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{\left(-4\right)^n n^n n!} z^{2\,n}.$$

Exercice 49. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 27

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{4^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 50. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 27

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(n^2-\frac{1}{3}\right)2^n z^n.$$

Exercice 51. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 27

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-8)^n n^n n!}{(2n)!^6}z^n.$$

Exercice 52. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 28

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2n)!}{22^n n^n n!}z^{3n}.$$

Exercice 53. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 28

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2n)!}{(-3)^n n^n n!}z^{4n}.$$

Exercice 54. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 28

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2n)!}{5^n n^n n!}z^{3n}.$$

Exercice 55. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 29

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2n)!}{(-2)^n n^n n!}z^{n}.$$

Exercice 56. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 29

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2n)!}{4^n n^n n!}z^{2n}.$$

Exercice 57. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 30

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^{\frac{3}{5}}e^n n!}{(n+1)^n}z^{3n}.$$

Exercice 58. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 30

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2 e^{(-3n)} n!}{(n+1)^n}z^{3n}.$$

Exercice 59. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 30

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{(3n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{3}}}z^{2n}.$$

Exercice 60. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 31

$$\sum_{n\geqslant 1} -\frac{n^2+27\,n-2}{n} z^{3\,n}.$$

Exercice 61. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 31

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(-n^2+n-2\right) z^n.$$

Exercice 62. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 31

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!} z^n.$$

Exercice 63. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 32

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{4}{7}} e^{(-3\,n)} n!}{(n+1)^n} z^{3\,n}.$$

Exercice 64. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 32

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{(-n)} n!}{(n+1)^n n} z^{2\,n}.$$

Exercice 65. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 33

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!} z^{2\,n}.$$

Exercice 66. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 33

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-8)^n\, n^n n!} z^{4\,n}.$$

Exercice 67. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 33

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, n^{2\,n} n!^5}{(2\,n)!^3} z^{2\,n}.$$

Exercice 68. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 34

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{3}{2}} e^{(4\,n)} n!}{(n+1)^n} z^n.$$

Exercice 69. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 34

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(2\,n^2-n+2\right) z^{3\,n}.$$

Exercice 70. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 34

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!} z^{2\,n}.$$

Exercice 71. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 35

$$\sum_{n\geqslant 0} -\frac{1}{n^2+3\,n+42} (-1)^n\, z^{4\,n}.$$

Exercice 72. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 35

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{(-2\,n)} n!}{(n+1)^n n} z^n.$$

Exercice 73. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 35

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!} z^{2\,n}.$$

Exercice 74. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 36

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{(2\,n)!} z^n.$$

Exercice 75. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 36

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{11^n n^n n!} z^n.$$

Exercice 76. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 36

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{(4\,n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{10}}} z^{4\,n}.$$

Exercice 77. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 37

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!} z^{4\,n}.$$

Exercice 78. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 37

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!} z^{2\,n}.$$

Exercice 79. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 38

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!} z^{2\,n}.$$

Exercice 80. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 38

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^n n!}{(n+1)^n n^{\frac{2}{5}}} z^n.$$

Exercice 81. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 38

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{17^n n^n n!}{(2\,n)!} z^{2\,n}.$$

Exercice 82. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 39

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{4^n n^n n!} z^n.$$

Exercice 83. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 39

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-6}{n^2+n+1} \left(-4\right)^n z^n.$$

Exercice 84. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 39

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\left(-1\right)^n n^n n!^3}{(2\,n)!} z^{3\,n}.$$

Exercice 85. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 40

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{3\,n^2-2\,n+2} \left(-2\right)^n z^n.$$

Exercice 86. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 40

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{\left(-5\right)^n n^n n!} z^{2\,n}.$$

Exercice 87. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 40

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{(-14\,n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{7}{2}}} z^{2\,n}.$$

Exercice 88. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 41

$$\sum_{n\geqslant 0} -\frac{n-7}{n^2-n+3} z^n.$$

Exercice 89. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 41

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{8\,n} n!^{19}}{(2\,n)!^2} z^{4\,n}.$$

Exercice 90. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 41

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{52}{n^2+3\,n-1} 4^n z^{3\,n}.$$

Exercice 91. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 41

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 92. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 42

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{4^n n^n n!} z^{4\,n}.$$

Exercice 93. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 42

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n^{3\,n} n!^9}{(2\,n)!^2} z^{4\,n}.$$

Exercice 94. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 43

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-23)^n n!^2}{(2\,n)!^3} z^{2\,n}.$$

Exercice 95. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 43

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{4}n-\frac{1}{4}\right)(-5)^n z^{3\,n}.$$

Exercice 96. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 43

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2-4\,n+7}{n} (-1)^n z^n.$$

Exercice 97. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 43

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{(-8)^n n^n n!} z^{3\,n}.$$

Exercice 98. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 44

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{4}{7}} e^{(-14\,n)} n!}{(n+1)^n} z^{4\,n}.$$

Exercice 99. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 44

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\frac{9}{2}} e^{(-n)} n!}{(n+1)^n} z^n.$$

Exercice 100. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : → page 44

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2\,n)!^2} z^{2\,n}.$$

Corrigé 1. Posons $u_n = \dfrac{e^{(-n)}n!}{(n+1)^n n^{\frac{10}{3}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{10}{3}}}\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{(-1)}|z|^4 = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{10}{3}}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-1)}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-1)}|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = e^{(-2)}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\frac{1}{2}}$, alors $e^{(-2)}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\frac{1}{2}}$, alors $e^{(-2)}|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant e^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé 2. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|-\dfrac{1}{n^2-4}3^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^n}{n^2}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 3} -\dfrac{1}{n^2-4}3^n z^{3\,n}$ et $\sum_{n\geqslant 3}\dfrac{3^n}{n^2}z^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 3}\dfrac{1}{n^2}z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $3\,z^3$, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 3}\dfrac{3^n}{n^2}z^{3\,n} = \sum_{n\geqslant 3}\dfrac{1}{n^2}\left(3\,z^3\right)^n$ converge absolument si $|3\,z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$) et diverge grossièrement si $|3\,z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$. ← page 1

Corrigé 3. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|-\dfrac{2\,n^2-n-1}{5\,n-1}(-3)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{5}\cdot 3^n n$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} -\dfrac{2\,n^2-n-1}{5\,n-1}(-3)^n z^{3\,n}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{2}{5}\cdot 3^n n z^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $3\,z^3$, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{2}{5}\cdot 3^n n z^{3\,n} = \dfrac{2}{5}\sum_{n\geqslant 0} n\left(3\,z^3\right)^n$ converge absolument si $|3\,z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$) et diverge grossièrement si $|3\,z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$. ← page 1

Corrigé 4. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n n^{9\,n} n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{9\,n}(n+1)^{10}\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{9\,n}\frac{1}{4}n^8|z|^2.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{9\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^8 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 5. Posons $u_n = \dfrac{(-2)^n\, n^{4\,n} n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{4\,n} (n+1)^5 \frac{1}{(2\,n+1)(n+1)} |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{4\,n} \frac{1}{2}\, n^3 |z|^3.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{4\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 6. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{9}{2}} e^{(14\,n)} n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{9}{2}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{14}|z| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{9}{2}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{14}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{14}|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = e^{13}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

- si $|z| < e^{(-13)}$, alors $e^{13}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > e^{(-13)}$, alors $e^{13}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{(-13)}$ et $R \leqslant e^{(-13)}$, c'est-à-dire : $R = e^{(-13)}$.

Corrigé 7. Posons $u_n = \dfrac{n^{2\,n} n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2\,n} (n+1)^3 \frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2\,n} \frac{1}{4}\, n |z|^3.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3n}} \right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 8. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\left(-16\,n^2 + 2\,n\right)(-12)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 16 \cdot 12^n n^2$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(-16\,n^2 + 2\,n\right)(-12)^n z^{3n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} 16 \cdot 12^n n^2 z^{3n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $12\,z^3$, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 16 \cdot 12^n n^2 z^{3n} = 16 \sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 \left(12\,z^3\right)^n$ converge absolument si $|12\,z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{12} \cdot 12^{\frac{2}{3}}$) et diverge grossièrement si $|12\,z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{12} \cdot 12^{\frac{2}{3}}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{12} \cdot 12^{\frac{2}{3}}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{12} \cdot 12^{\frac{2}{3}}$.

← page 1

Corrigé 9. Posons $u_n = \dfrac{(-3)^n\, n^n n!^{215}}{(2\,n)!^3}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left| \frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n} \right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^{216} \frac{3}{8\,(2\,n+1)^3 (n+1)^3} |z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{3}{64}\, n^{210} |z|.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^{210} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n} \right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

← page 1

Corrigé 10. Remarquons d'abord qu'on a : $\left| -\dfrac{1}{n^2 + 16\,n - 2} 5^n \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{5^n}{n^2}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} -\dfrac{1}{n^2 + 16\,n - 2} 5^n z^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{5^n}{n^2} z^{2n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $5\,z^2$, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{5^n}{n^2} z^{2n} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} \left(5\,z^2\right)^n$ converge absolument si $|5\,z^2| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{5}\sqrt{5}$) et diverge grossièrement si $|5\,z^2| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{5}\sqrt{5}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{5}\sqrt{5}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{5}\sqrt{5}$.

← page 1

Corrigé 11. On sait que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $545\,z^3$, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 545^n z^{3n} = \sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 \left(545\,z^3\right)^n$ converge absolument si $|545\,z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{545} \cdot 545^{\frac{2}{3}}$) et diverge grossièrement si $|545\,z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{545} \cdot 545^{\frac{2}{3}}$). On a donc : $R = \frac{1}{545} \cdot 545^{\frac{2}{3}}$.

← page 2

Corrigé 12. Posons $u_n = \dfrac{n^2 e^n n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e|z|^4 = \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^4 \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = |z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.

Corrigé 13. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{3}|z|^3 = \frac{1}{3} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4}{3} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{4}{3}\, e^{(-1)} |z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{4}{3}\, e^{(-1)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{4}{3}\, e^{(-1)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 14. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| \underset{n \to +\infty}{\sim} 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}\,e$ et $R \leqslant \frac{1}{2}\,e$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}\,e$.

Corrigé 15. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{3}{7}}e^{(22\,n)}n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 2
R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{7}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{22}|z|^4 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{7}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{22}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{22}|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = e^{21}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < e^{\left(-\frac{21}{4}\right)}$, alors $e^{21}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > e^{\left(-\frac{21}{4}\right)}$, alors $e^{21}|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\left(-\frac{21}{4}\right)}$ et $R \leqslant e^{\left(-\frac{21}{4}\right)}$, c'est-à-dire : $R = e^{\left(-\frac{21}{4}\right)}$.

Corrigé 16. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\left(-\dfrac{1}{4}\,n-\dfrac{1}{4}\right)(-1)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}\,n$. On en déduit, par comparaison, que ← page 2
les séries entières $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\dfrac{1}{4}\,n-\dfrac{1}{4}\right)(-1)^n z^{2\,n}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{4}\,nz^{2\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par z^2, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{4}\,nz^{2\,n}$ converge absolument si $|z^2| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < 1$) et diverge grossièrement si $|z^2| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > 1$). Cette série entière est donc de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R = 1$.

Corrigé 17. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n\,n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 2
R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge

trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^4 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$ et $R \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$.

Corrigé 18. Posons $u_n = \dfrac{(-2)^n\, n^n n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^2 \frac{1}{(2\,n+1)(n+1)}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{2}|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{1}{2}\,e|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2^{\frac{1}{4}} e^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$, alors $\frac{1}{2}\,e|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 2^{\frac{1}{4}} e^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$, alors $\frac{1}{2}\,e|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2^{\frac{1}{4}} e^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$ et $R \leqslant 2^{\frac{1}{4}} e^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$, c'est-à-dire : $R = 2^{\frac{1}{4}} e^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$.

Corrigé 19. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n\, n^n}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{4\,n}|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 20. Posons $u_n = \dfrac{2^n n^n n!}{(2\,n)!^2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 2 R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^2 \frac{1}{2\,(2\,n+1)^2 (n+1)^2} |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{8\,n^2} |z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 21. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{1}{3}} e^n n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 3 R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e|z|^3 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = |z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.

Corrigé 22. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{2}{5}} e^n n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 3 R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2}{5}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e|z|^4 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = |z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.

Corrigé 23. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\dfrac{19}{n-24}(-1)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{19}{n}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 25} \dfrac{19}{n-24}(-1)^n z^{4\,n}$ et $\sum_{n\geqslant 25} \dfrac{19}{n} z^{4\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 25} \dfrac{1}{n} z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par z^4, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 25} \dfrac{19}{n} z^{4\,n}$ converge absolument si $|z^4| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < 1$) et diverge grossièrement si $|z^4| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > 1$). Cette série entière est donc de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R = 1$. ← page 3

Corrigé 24. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^3 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 25. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge ← page 3

trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^3 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 26. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|-\frac{3}{n-2}\,(-1)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 3} -\frac{3}{n-2}\,(-1)^n\, z^{3\,n}$ et $\sum_{n\geqslant 3} \frac{3}{n} z^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n} z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par z^3, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 3} \frac{3}{n} z^{3\,n}$ converge absolument si $|z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < 1$) et diverge grossièrement si $|z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > 1$). Cette série entière est donc de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R = 1$. ← page 3

Corrigé 27. Posons $u_n = \frac{2^n n^n n!^3}{(2\,n)!^6}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^4 \frac{1}{32\,(2\,n+1)^6 (n+1)^6}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{2048\,n^8}|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 28. Posons $u_n = \frac{e^{(2\,n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{8}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge ← page 3

trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{8}}}\,\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^2|z|^3 = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{8}}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^2|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^2|z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = e|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, alors $e|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, alors $e|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$ et $R \leqslant e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, c'est-à-dire : $R = e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$.

Corrigé 29. Posons $u_n = \dfrac{n^{6\,n}}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{6\,n}(n+1)^6\,\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{6\,n}\frac{1}{4}\,n^4|z|^2.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{6\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 30. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{3}|z|^4 = \frac{1}{3}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{4}{3}\,e^{(-1)}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{4}{3}\,e^{(-1)}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{4}{3}\, e^{(-1)}|z|^4 > 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$ et $R \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$.

Corrigé 31. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^3 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = 2\, e^{(-1)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\, e^{(-1)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\, e^{(-1)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 32. On sait que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon de convergence 1. On a donc : $R = 1$. ← page 4

Corrigé 33. Posons $u_n = \dfrac{e^{(10\,n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{5}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}}\,\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{10}|z|^4 = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{10}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{10}|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = e^9|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\left(-\frac{9}{4}\right)}$, alors $e^9|z|^4 < 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\left(-\frac{9}{4}\right)}$, alors $e^9|z|^4 > 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\left(-\frac{9}{4}\right)}$ et $R \leqslant e^{\left(-\frac{9}{4}\right)}$, c'est-à-dire : $R = e^{\left(-\frac{9}{4}\right)}$.

Corrigé 34. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n\, n^n n!^2}{(2\,n)!^3}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^3 \frac{1}{8\,(2\,n+1)^3 (n+1)^3}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{64\,n^3}|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 35. Remarquons d'abord qu'on a : $|(n-3)\,(-1)^n| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n-3)\,(-1)^n\, z^{3\,n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n z^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par z^3, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n z^{3\,n}$ converge absolument si $|z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < 1$) et diverge grossièrement si $|z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > 1$). Cette série entière est donc de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R = 1$. ← page 4

Corrigé 36. Posons $u_n = \dfrac{n^{20\,n}}{(2\,n)!^6}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{20\,n} (n+1)^{20} \frac{1}{64\,(2\,n+1)^6 (n+1)^6}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{20\,n} \frac{1}{4096}\, n^8 |z|.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{20\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^8 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 37. Posons $u_n = \dfrac{(-2)^n\, n^n n!^3}{(2\,n)!^2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^4 \frac{1}{2\,(2\,n+1)^2 (n+1)^2}|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{8}|z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{1}{8}\,e|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < 2\,e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, alors $\frac{1}{8}\,e|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > 2\,e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, alors $\frac{1}{8}\,e|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2\,e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$ et $R \leqslant 2\,e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, c'est-à-dire : $R = 2\,e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$.

Corrigé 38. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé 39. Posons $u_n = \dfrac{(-2)^n\, n^n n!^{10}}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^{11}\frac{1}{(2\,n+1)(n+1)}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{2}\,n^9|z|^4.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^9 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 40. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{9^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 4

R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{9} |z|^4 = \frac{1}{9} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{9} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{4}{9}\, e^{(-1)} |z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{4}{9}\, e^{(-1)}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{4}{9}\, e^{(-1)}|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$ et $R \leqslant \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$.

Corrigé 41. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{16^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 5
R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{16} |z|^2 = \frac{1}{16} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{1}{4}\, e^{(-1)} |z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 2\,e^{\frac{1}{2}}$, alors $\frac{1}{4}\, e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > 2\,e^{\frac{1}{2}}$, alors $\frac{1}{4}\, e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2\,e^{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant 2\,e^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = 2\,e^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé 42. Posons $u_n = \dfrac{n^{3\,n} n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de ← page 5
la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3\,n} (n+1)^4 \frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3\,n} \frac{1}{4}\, n^2 |z|^4.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 43. Posons $u_n = \dfrac{n^{8\,n} n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{8\,n} (n+1)^9 \frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{8\,n} \frac{1}{4}\, n^7 |z|^3.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{8\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^7 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 44. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{2} |z|^3 = \frac{1}{2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)} |z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)} |z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)} |z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 45. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\dfrac{7\,n}{13\,n^2 - 20\,n + 1} (-1)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{13\,n}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{7\,n}{13\,n^2 - 20\,n + 1} (-1)^n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{7}{13\,n} z^n$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n} z^n$ est de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R = 1$. ← page 5

Corrigé 46. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge ← page 5

trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}\,e$ et $R \leqslant \frac{1}{2}\,e$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}\,e$.

Corrigé 47. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n\, n!^4}{(2\,n)!^3}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = (n+1)^4\frac{1}{8\,(2\,n+1)^3(n+1)^3}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{64\,n^2}|z|.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 48. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-4)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{4}|z|^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = e^{(-1)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\frac{1}{2}}$, alors $e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\frac{1}{2}}$, alors $e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant e^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé 49. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{4^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{4}|z|^3 = \frac{1}{4}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = e^{(-1)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < e^{\frac{1}{3}}$, alors $e^{(-1)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > e^{\frac{1}{3}}$, alors $e^{(-1)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 50. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\left(n^2 - \dfrac{1}{3}\right)2^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n n^2$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(n^2 - \dfrac{1}{3}\right)2^n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n n^2 z^n$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $2\,z$, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n n^2 z^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\,(2\,z)^n$ converge absolument si $|2\,z| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{2}$) et diverge grossièrement si $|2\,z| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{2}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{2}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{2}$. ← page 5

Corrigé 51. Posons $u_n = \dfrac{(-8)^n\, n^n n!}{(2\,n)!^6}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^2 \frac{1}{8\,(2\,n+1)^6 (n+1)^6}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{512\,n^{10}}|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 52. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{22^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\frac{1}{22}|z|^3 = \frac{1}{22}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{11}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{2}{11}\, e^{(-1)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{2}{11}\, e^{(-1)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{2}{11}\, e^{(-1)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 53. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-3)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\frac{1}{3}|z|^4 = \frac{1}{3}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{4}{3}\, e^{(-1)}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{4}{3}\, e^{(-1)}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{4}{3}\, e^{(-1)}|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$ et $R \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$.

Corrigé 54. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{5^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\frac{1}{5}|z|^3 = \frac{1}{5}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$
On en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{4}{5}\,e^{(-1)}|z|^3.$$
D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{4}{5}\,e^{(-1)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{4}{5}\,e^{(-1)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 55. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6
$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|.$$
Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$
On en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|.$$
D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| < 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| > 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}\,e$ et $R \leqslant \frac{1}{2}\,e$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}\,e$.

Corrigé 56. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{4^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6
$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{4}|z|^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2.$$
Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$
On en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = e^{(-1)}|z|^2.$$
D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\frac{1}{2}}$, alors $e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\frac{1}{2}}$, alors $e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant e^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé 57. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{3}{5}} e^n n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{5}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e|z|^3 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = |z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.

Corrigé 58. Posons $u_n = \dfrac{n^2 e^{(-3\,n)} n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{(-3)}|z|^3 = \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-3)}|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-3)}|z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = e^{(-4)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\frac{4}{3}}$, alors $e^{(-4)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\frac{4}{3}}$, alors $e^{(-4)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{4}{3}}$ et $R \leqslant e^{\frac{4}{3}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{4}{3}}$.

Corrigé 59. Posons $u_n = \dfrac{e^{(3\,n)} n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{3}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 6

R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}}\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^3|z|^2 = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^3|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^3|z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = e^2|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z|<e^{(-1)}$, alors $e^2|z|^2<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z|>e^{(-1)}$, alors $e^2|z|^2>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant e^{(-1)}$ et $R\leqslant e^{(-1)}$, c'est-à-dire : $R=e^{(-1)}$.

Corrigé 60. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|-\frac{n^2+27\,n-2}{n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{n^2+27\,n-2}{n}z^{3\,n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} nz^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} nz^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$. En remplaçant z par z^3, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} nz^{3\,n}$ converge absolument si $|z^3|<1$ (c'est-à-dire : $|z|<1$) et diverge grossièrement si $|z^3|>1$ (c'est-à-dire : $|z|>1$). Cette série entière est donc de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R=1$. ← page 6

Corrigé 61. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\left(-n^2+n-2\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0}\left(-n^2+n-2\right)z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R=1$. ← page 7

Corrigé 62. Posons $u_n=\frac{(2\,n)!}{(-2)^n\,n^n n!}$ pour tout entier $n\geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}\,e$, alors $2\,e^{(-1)}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}\,e$ et $R \leqslant \frac{1}{2}\,e$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}\,e$.

Corrigé 63. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{4}{7}} e^{(-3\,n)} n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4}{7}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{(-3)}|z|^3 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4}{7}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-3)}|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-3)}|z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = e^{(-4)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < e^{\frac{4}{3}}$, alors $e^{(-4)}|z|^3 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > e^{\frac{4}{3}}$, alors $e^{(-4)}|z|^3 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{4}{3}}$ et $R \leqslant e^{\frac{4}{3}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{4}{3}}$.

Corrigé 64. Posons $u_n = \dfrac{e^{(-n)} n!}{(n+1)^n n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{n}{n+1} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{(-1)}|z|^2 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-1)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-1)}|z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = e^{(-2)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < e$, alors $e^{(-2)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > e$, alors $e^{(-2)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e$ et $R \leqslant e$, c'est-à-dire : $R = e$.

Corrigé 65. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\frac{1}{2}|z|^2 = \frac{1}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

- si $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$.

Corrigé 66. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-8)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\frac{1}{8}|z|^4 = \frac{1}{8}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{1}{2}\,e^{(-1)}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

- si $|z| < 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{1}{2}\,e^{(-1)}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}}$, alors $\frac{1}{2}\,e^{(-1)}|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}}$ et $R \leqslant 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire : $R = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}}$.

Corrigé 67. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n\, n^{2\,n} n!^5}{(2\,n)!^3}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2\,n}(n+1)^7\frac{1}{8\,(2\,n+1)^3(n+1)^3}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2\,n}\frac{1}{64}\,n|z|^2.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge pour tout $z\in\mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R=0$.

Corrigé 68. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{3}{2}}e^{(4\,n)}n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n\geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^4|z| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^4|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^4|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = e^3|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < e^{(-3)}$, alors $e^3|z|<1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > e^{(-3)}$, alors $e^3|z|>1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant e^{(-3)}$ et $R\leqslant e^{(-3)}$, c'est-à-dire : $R=e^{(-3)}$.

Corrigé 69. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\left(2\,n^2-n+2\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,n^2$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(2\,n^2-n+2\right)z^{3\,n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2\,n^2 z^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$. En remplaçant z par z^3, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2\,n^2 z^{3\,n}$ converge absolument si $|z^3|<1$ (c'est-à-dire : $|z|<1$) et diverge grossièrement si $|z^3|>1$ (c'est-à-dire : $|z|>1$). Cette série entière est donc de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R=1$. ← page 7

Corrigé 70. Posons $u_n = \dfrac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n\geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^3\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{4}\,n|z|^2.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge pour tout $z\in\mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R=0$.

Corrigé 71. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|-\frac{1}{n^2+3\,n+42}\,(-1)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{1}{n^2+3\,n+42}\,(-1)^n\,z^{4\,n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}z^{4\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$. En remplaçant z par z^4, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}z^{4\,n}$ converge absolument si $|z^4|<1$ (c'est-à-dire : $|z|<1$) et diverge grossièrement si $|z^4|>1$ (c'est-à-dire : $|z|>1$). Cette série entière est donc de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R=1$. ← page 8

Corrigé 72. Posons $u_n=\frac{e^{(-2\,n)}n!}{(n+1)^n n}$ pour tout entier $n\geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{n}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{(-2)}|z| = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-2)}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-2)}|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = e^{(-3)}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

- si $|z|<e^3$, alors $e^{(-3)}|z|<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z|>e^3$, alors $e^{(-3)}|z|>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant e^3$ et $R\leqslant e^3$, c'est-à-dire : $R=e^3$.

Corrigé 73. Posons $u_n=\frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ pour tout entier $n\geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$.

Corrigé 74. Posons $u_n = \dfrac{n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = (n+1)\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n}|z|.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 75. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{11^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{11}|z| = \frac{1}{11}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{11}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{4}{11}\,e^{(-1)}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \frac{11}{4}\,e$, alors $\frac{4}{11}\,e^{(-1)}|z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > \frac{11}{4}\,e$, alors $\frac{4}{11}\,e^{(-1)}|z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{11}{4}\,e$ et $R \leqslant \frac{11}{4}\,e$, c'est-à-dire : $R = \frac{11}{4}\,e$.

Corrigé 76. Posons $u_n = \dfrac{e^{(4\,n)}n!}{(n+1)^n n^{\frac{1}{10}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{10}}}\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^4|z|^4 = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{10}}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}e^4|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}e^4|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = e^3|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\left(-\frac{3}{4}\right)}$, alors $e^3|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\left(-\frac{3}{4}\right)}$, alors $e^3|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\left(-\frac{3}{4}\right)}$ et $R \leqslant e^{\left(-\frac{3}{4}\right)}$, c'est-à-dire : $R = e^{\left(-\frac{3}{4}\right)}$.

Corrigé 77. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-2)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^4 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^4 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^4 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$ et $R \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire : $R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}}$.

Corrigé 78. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$ et $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire : $R = \sqrt{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$.

Corrigé 79. Posons $u_n = \dfrac{n^n n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^2 \frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{4}|z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{1}{4}\,e|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 2\,e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$, alors $\frac{1}{4}\,e|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
- si $|z| > 2\,e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$, alors $\frac{1}{4}\,e|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2\,e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ et $R \leqslant 2\,e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$, c'est-à-dire : $R = 2\,e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

Corrigé 80. Posons $u_n = \dfrac{e^n n!}{(n+1)^n n^{\frac{2}{5}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2}{5}}}\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e|z| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2}{5}}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e|z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :
- si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, c'est-à-dire : $R = 1$.

Corrigé 81. Posons $u_n = \dfrac{17^n n^n n!}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 9

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^2 \frac{17}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{17}{4}|z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{17}{4}\,e|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2\sqrt{\frac{1}{17}}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$, alors $\frac{17}{4}\,e|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 2\sqrt{\frac{1}{17}}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$, alors $\frac{17}{4}\,e|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{17}}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ et $R \leqslant 2\sqrt{\frac{1}{17}}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$, c'est-à-dire : $R = 2\sqrt{\frac{1}{17}}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

Corrigé 82. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{4^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 9

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{4}|z| = \frac{1}{4}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = e^{(-1)}|z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e$, alors $e^{(-1)}|z| < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ converge absolument ;

— si $|z| > e$, alors $e^{(-1)}|z| > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^n$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e$ et $R \leqslant e$, c'est-à-dire : $R = e$.

Corrigé 83. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\dfrac{n-6}{n^2+n+1}\,(-4)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{n}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n-6}{n^2+n+1}\,(-4)^n\,z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{4^n}{n} z^n$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n} z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $4\,z$, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{4^n}{n} z^n = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}\,(4\,z)^n$ converge absolument si $|4\,z| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{4}$) et diverge grossièrement si $|4\,z| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{4}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{4}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{4}$. ← page 9

Corrigé 84. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n\,n^n n!^3}{(2\,n)!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge ← page 9

trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)^4 \frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)}|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{4}\,n^2|z|^3.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 85. Remarquons d'abord qu'on a : $\displaystyle\left|\frac{n}{3\,n^2-2\,n+2}\,(-2)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{3\,n}$. On en déduit, par comparaison, ← page 9

que les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{3\,n^2-2\,n+2}\,(-2)^n\,z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{3\,n}z^n$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $2\,z$, on en déduit que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{3\,n}z^n = \frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\,(2\,z)^n$ converge absolument si $|2\,z| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{2}$) et diverge grossièrement si $|2\,z| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{2}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{2}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{2}$.

Corrigé 86. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-5)^n\,n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 9
R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\frac{1}{5}|z|^2 = \frac{1}{5}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{4}{5}\,e^{(-1)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :
— si $|z| < \frac{1}{2}\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}}$, alors $\frac{4}{5}\,e^{(-1)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;
— si $|z| > \frac{1}{2}\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}}$, alors $\frac{4}{5}\,e^{(-1)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}}$ et $R \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire : $R = \frac{1}{2}\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé 87. Posons $u_n = \dfrac{e^{(-14\,n)}n!}{(n+1)^n n^{\frac{7}{2}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 9
R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{7}{2}}}\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n e^{(-14)}|z|^2 = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-14)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-14)}|z|^2.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = e^{(-15)}|z|^2.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\frac{15}{2}}$, alors $e^{(-15)}|z|^2 < 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\frac{15}{2}}$, alors $e^{(-15)}|z|^2 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{2\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{15}{2}}$ et $R \leqslant e^{\frac{15}{2}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{15}{2}}$.

Corrigé 88. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|-\dfrac{n-7}{n^2-n+3}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} -\dfrac{n-7}{n^2-n+3}z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}z^n$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}z^n$ est de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R = 1$. ← page 9

Corrigé 89. Posons $u_n = \dfrac{n^{8\,n}n!^{19}}{(2\,n)!^2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 9

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{8\,n}(n+1)^{27}\frac{1}{4\,(2\,n+1)^2(n+1)^2}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{8\,n}\frac{1}{16}\,n^{23}|z|^4.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{8\,n} \geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^{23} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 90. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\dfrac{52}{n^2+3\,n-1}4^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{52\cdot 4^n}{n^2}$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{52}{n^2+3\,n-1}4^n z^{3\,n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{52\cdot 4^n}{n^2}z^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $4\,z^3$, on en déduit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{52\cdot 4^n}{n^2}z^{3\,n} = 52\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}\left(4\,z^3\right)^n$ converge absolument si $|4\,z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{4}\cdot 4^{\frac{2}{3}}$) et diverge grossièrement si $|4\,z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{4}\cdot 4^{\frac{2}{3}}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{4}\cdot 4^{\frac{2}{3}}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{4}\cdot 4^{\frac{2}{3}}$. ← page 9

Corrigé 91. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 10

R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2}|z|^3 = \frac{1}{2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = 2\,e^{(-1)}|z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^3<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}}$, alors $2\,e^{(-1)}|z|^3>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}}$ et $R\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 92. Posons $u_n=\dfrac{(2\,n)!}{4^n n^n n!}$ pour tout entier $n\geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 10 R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{4}|z|^4 = \frac{1}{4}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n|z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = e^{(-1)}|z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z|<e^{\frac{1}{4}}$, alors $e^{(-1)}|z|^4<1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z|>e^{\frac{1}{4}}$, alors $e^{(-1)}|z|^4>1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R\geqslant e^{\frac{1}{4}}$ et $R\leqslant e^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire : $R=e^{\frac{1}{4}}$.

Corrigé 93. Posons $u_n=\dfrac{(-1)^n\,n^{3\,n}n!^9}{(2\,n)!^2}$ pour tout entier $n\geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de conver- ← page 10 gence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $z=0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z\neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3\,n}(n+1)^{12}\frac{1}{4\,(2\,n+1)^2(n+1)^2}|z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3\,n}\frac{1}{16}\,n^8|z|^4.$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3\,n}\geqslant 1$ pour tout n au voisinage de $+\infty$, et $n^8 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = +\infty > 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{4n}$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, donc le rayon de convergence est $R = 0$.

Corrigé 94. Posons $u_n = \dfrac{(-23)^n\, n!^2}{(2\,n)!^3}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 10

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = (n+1)^2 \frac{23}{8\,(2\,n+1)^3 (n+1)^3} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{23}{64\,n^4} |z|^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Corrigé 95. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\left(\dfrac{1}{4}\,n - \dfrac{1}{4}\right)(-5)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4} \cdot 5^n n$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{4}\,n - \frac{1}{4}\right)(-5)^n z^{3\,n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4} \cdot 5^n n z^{3\,n}$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc qu'elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, tandis qu'elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. En remplaçant z par $5\,z^3$, on en déduit que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4} \cdot 5^n n z^{3\,n} = \frac{1}{4} \sum_{n\geqslant 0} n \left(5\,z^3\right)^n$ converge absolument si $|5\,z^3| < 1$ (c'est-à-dire : $|z| < \frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$) et diverge grossièrement si $|5\,z^3| > 1$ (c'est-à-dire : $|z| > \frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$). Cette série entière est donc de rayon de convergence $\frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$. Par comparaison, on a aussi : $R = \frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$. ← page 10

Corrigé 96. Remarquons d'abord qu'on a : $\left|\dfrac{n^2 - 4\,n + 7}{n} (-1)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. On en déduit, par comparaison, que les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2 - 4\,n + 7}{n} (-1)^n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n z^n$ ont même rayon de convergence. Nous allons donc étudier la seconde série entière, qui est plus simple. On sait en effet que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n z^n$ est de rayon de convergence 1. Par comparaison, on a aussi : $R = 1$. ← page 10

Corrigé 97. Posons $u_n = \dfrac{(2\,n)!}{(-8)^n\, n^n n!}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 10

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{8} |z|^3 = \frac{1}{8} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|^3.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{3(n+1)}}{u_n z^{3\,n}}\right| = \frac{1}{2}\, e^{(-1)} |z|^3.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{1}{2}\, e^{(-1)} |z|^3 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, alors $\frac{1}{2}\, e^{(-1)} |z|^3 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n z^{3\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$ et $R \leqslant 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire : $R = 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}}$.

Corrigé 98. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{4}{7}} e^{(-14\,n)} n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 10 R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4}{7}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n} e^{(-14)} |z|^4 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4}{7}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-14)} |z|^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-14)} |z|^4.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{4(n+1)}}{u_n z^{4\,n}}\right| = e^{(-15)} |z|^4.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{\frac{15}{4}}$, alors $e^{(-15)} |z|^4 < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{\frac{15}{4}}$, alors $e^{(-15)} |z|^4 > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{4\,n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{\frac{15}{4}}$ et $R \leqslant e^{\frac{15}{4}}$, c'est-à-dire : $R = e^{\frac{15}{4}}$.

Corrigé 99. Posons $u_n = \dfrac{n^{\frac{9}{2}} e^{(-n)} n!}{(n+1)^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 10 R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^{n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{9}{2}} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n} e^{(-1)} |z| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{9}{2}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-1)} |z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e^{(-1)} |z|.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$. Or :

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = e^{(n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{n+1}{n+2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^{n}}\right| = e^{(-2)} |z|.$$

D'après la règle de D'Alembert :

— si $|z| < e^{2}$, alors $e^{(-2)} |z| < 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{n}$ converge absolument ;

— si $|z| > e^{2}$, alors $e^{(-2)} |z| > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{n}$ diverge.

On en déduit que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant e^{2}$ et $R \leqslant e^{2}$, c'est-à-dire : $R = e^{2}$.

Corrigé 100. Posons $u_n = \dfrac{1}{(2\,n)!^2}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ pour abréger. Déterminons le rayon de convergence ← page 10

R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{2\,n}$ avec la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors cette série converge trivialement, et nous pouvons donc supposer $z \neq 0$ à présent. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = \frac{1}{4\,(2\,n+1)^2 (n+1)^2} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16\,n^4} |z|^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1} z^{2(n+1)}}{u_n z^{2\,n}}\right| = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^{2\,n}$ converge absolument, et ce peu importe la valeur de $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.