Applications linéaires, sommes directes de sous-espaces

Exercice 1. Soit l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x,y,z)) = (2x+y+z, x+2y+z, 3x+3y+2z).$$

1. Montrez que $f$est une application linéaire.
2. Déterminez une matrice A telle que $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et en déduire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Donnez des bases de l'image et du noyau de f. Quel est le rang de f ?
4. Soit $v = f(u)$ un élément de l'image de f, montrez que l'image réciproque de v par f et l'ensemble $\{u + w \mid w \in \mathrm{Ker}(f)\}$.
5. En déduire l'ensemble des solutions du système

$$(S)\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y+z=1 \\ 3x+3y+2z=1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrez que u est linéaire et donnez la matrice de u dans les bases canoniques.
2. Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrez que $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$.

Exercice 3. Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T la transformation linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3, \quad T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Écrire la matrice A de T dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ puis déterminer le noyau de cette application. .
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ et trouver la nature de l'application T.
4. Écrire la matrice de passage P de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{f_1, f_2, f_3\}$, calculer son inverse P^{-1}, puis écrire et vérifier la relation qui lie les matrices A, B, P et P^{-1}.

Exercice 4. (Exercice 1 du DST 2013) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \epsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \epsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \epsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E
2. Calculer $f(\epsilon_1)$, $f(\epsilon_2)$, $f(\epsilon_3)$ et en déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f
4. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
5. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
6. Calculer A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base $\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \to E$ une application linéaire vérifiant $p^2 = p$. On dit que p est un *projecteur* ou une *projection*.

1. Montrez que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{0}\}$
2. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathcal{B}'$ une base de $\mathrm{Im}(p)$. Montrez que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E.
4. Quelle est la matrice de p dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$?
5. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id} - p$ en est un.
6. Si p est un projecteur, montrer que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im} p$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et s un endomorphisme de E involutif, c'est-à-dire tel que $s^2 = \mathrm{Id}$. On pose $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Montrer que s est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de F, puis donnez un sous-espace E tel que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ (on dit que E est un *supplémentaire* de F).

1. $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1,1,0)$ et $\vec{v} = (2,1,1)$,
2. $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u} = (-1,1,0), \vec{v} = (2,0,1)$ et $\vec{w} = (1,1,1)$,
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 9. Notons $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ {}^T A = A\}$ et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ {}^T A = -A\}$ où ^{T} désigne la transposée. Quelles sont les dimensions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$? Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Exercice 10. Montrer que les sous-ensembles $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ et $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = G \oplus H$.