TD 6 : Espaces vectoriels (abstraits)

Exercice 1. Soit I un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{F}(I, E)$ l'ensemble de toutes les applications de I à valeurs dans E. Montrez que cet ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour des opérations d'addition et de multiplication scalaire que vous préciserez.

Exercice 2. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f(0) = 1\}$
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f \text{ continue}\}$
3. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f \text{ croissante}\}$
4. $E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0\}$

Exercice 3. Montrez que les parties de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}([a, b], \mathcal{R})$:

1. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$
2. $G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)dt = 0\right\}$

Exercice 4. Montrez que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminez leur dimension :

1. L'ensemble des matrices diagonales
2. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures)
3. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = A\}$ (l'ensemble des matrices symétriques)
4. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = -A\}$ (l'ensemble des matrices antisymétriques)

Exercice 5. Notons $E =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit une loi interne $x \dot{+} y = xy$ et une loi externe $\lambda \cdot x = x^\lambda$. L'ensemble $(E, \dot{+}, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour $z \in \mathbb{C}$, $x \in E$, on définit une nouvelle loi externe par $z \cdot x = \overline{z}x$. L'ensemble E muni de la loi interne initiale et de cette nouvelle loi externe est-il encore un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 7. Dans $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on considère trois sous-ensembles :
$E_{00} = \{(u_n)_n \in \mathcal{F} \mid \exists N \in \mathbb{N} \mid \ \forall n \geq N, \ u_n = 0\}$,
$E_0 = \{(u_n)_n \in \mathcal{F} \ \mid \ \lim u_n = 0\}$ et
$E_\infty = \{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ \mid \ \exists M > 0 \mid \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M\}$.

1. Montrez que E_{00}, E_0 et E_∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Montrez que $E_{00} \subset E_0 \subset E_\infty$ et que ces inclusions sont strictes.
3. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé, on définit la suite $\delta^i \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ par

$$\delta_n^i = \begin{cases} 1, & \text{si } n = i \\ 0, & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

   Montrez que la famille $\{\delta^i, \ i \in \mathbb{N}\}$ est libre. En déduire que les espaces E_{00}, E_0 ou E_∞ ne sont pas de dimension finie.

Exercice 8. Notons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On note $\mathcal{J}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\{J^k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{J}$? Si $A, B \in \mathcal{J}$ montrez que le produit AB appartient à $\mathcal{J}$.

Exercice 9. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ et $h_a(x) = e^{ax}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. la famille $\{f, g\}$ est-elle libre ou liée ?
2. Même question avec la famille $\{f, g, h_1\}$.
3. Même question avec la famille $\{h_a,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 10. Soit E l'ensemble des fonctions réelles deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'equation différentielle : $f'' + f = 0$.

1. Montrez que E est un espace vectoriel. Donnez une base de E.
2. Même question avec l'equation différentielle : $f'' - f = 0$.

Exercice 11. Soit

$$E = \{u = (u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}.$$

1. Calculez les 10 premiers termes de la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ (on l'appelle *la suite de Fibonacci*).
2. Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
3. Montrez que l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
4. Montrez que la suite de terme général x^n appartient à E si et seulement si $x^2 - x - 1 = 0$.
5. Soit x_1 et x_2 les deux racines réelles de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, montrez que $\{x_1^n, x_2^n\}$ forme une base de E et en déduire la forme générale d'une suite appartenant à E.
6. Déduire de ce qui précède que le terme général de la suite de Fibonacci est

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)$$

Exercice 12. Soient $F = \{u = (u_n)_n\ :\ \forall n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\}$ et $G = \{u = (u_n)_n\ :\ \forall n,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\}$ deux sous-ensembles de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. Montrez que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Determinez $F \cap G$.
3. En vous inspirant de l'exercice précédent, montrez que F et G sont de dimension 2 et déterminez une base de chacun d'eux.