Rang, noyau et image d'une matrice

Exercice 1. Déterminez le rang des matrices suivantes, puis déduisez-en la dimension du noyau et de l'image de chacune de ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour chacune des matrices dans Exercice 1, déterminez son noyau et donnez une base de son image.

Exercice 3. Déterminez le rang des matrices suivantes, où $\lambda, a, b, p, q, r \in \mathbb{K}$ sont des paramètres.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrez que $\operatorname{rang}(M) = 1$ si et seulement s'il existe deux vecteurs colonne non nuls X, Y tels que $M = XY^T$.
2. Montrez que $\operatorname{rang}(M) = 2$ si et seulement s'il existe deux couples de vecteurs colonne linéairement indépendants (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) tels que $M = X_1Y_1^T + X_2Y_2^T$.
3. Généralisez aux matrices de rang k.

Exercice 5. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Rappelez la preuve de l'inégalité $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$.
2. Donnez un exemple de deux matrices A, B telles que $\operatorname{rang}(AB) < \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$.
3. Supposons que la matrice B est *inversible* (en particulier $n = p$). Montrez $\operatorname{rang}(AB) =$ rang(A).

Exercice 6. Soient $\alpha = (0, -1, 1)^T, \beta = (-1, 0, 1)^T, \gamma = (-1, -1, 2)^T$ trois vecteurs colonne. Soit $C = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Montrez que la famille $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ est liée, puis donnez une relation linéaire liant ces trois vecteurs.
2. Calculez $\operatorname{rang}(C)$ et C^2.
3. Donnez deux matrices $A_0 \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B_0 \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ vérifiant $A_0B_0 = C$.
4. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ deux matrices *quelconques* telles que $AB = C$.
   (a) Montrez $(BA)^3 = (BA)^2$.
   (b) Montrez que la matrice BA est inversible, puis déduisez-en $BA = I_2$ (**Indication** : on pourra utiliser l'inégalité de Exercice 5 (1)).

Multiplications de matrices et opérations élémentaires

Exercice 7. Soit n un entier naturel non nul. Pour $1 \leq i, j \leq n$ deux entiers, on note $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i colonne j) qui vaut 1. On appelle *matrice de transvection* (resp. *matrice de dilatation*) toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $T_{ij}(\lambda) := I_n + \lambda E_{ij}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$ (resp. de la forme $D_i(\lambda) := I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ avec $1 \leq i \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Les matrices $D_i(\lambda), T_{ij}(\lambda)$ sont-elles inversibles ?
2. Montrez que la multiplication de A à droite par $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j de A par λ ;
3. Montrez que la multiplication de A à droite par $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j de A par $C_j + \lambda C_i$.
4. Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, donnez une matrice P_{ij}, indépendante de A, telle que la multiplication de A à droite par P_{ij} ait pour effet d'échanger la colonne i et la colonne j de A.
5. Comparez les produits $D_i(\lambda)A, T_{ij}(\lambda)A, P_{ij}A$ avec la matrice A.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

1. On suppose que $c \neq 0$.
   (a) Déterminez un scalaire $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ tel que $A_1 := T_{12}(\lambda_1)A$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminez un scalaire $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ tel que $A_2 := T_{21}(\lambda_2)A_1$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.
   (c) Déterminez un scalaire $\lambda_3 \in \mathbb{K}$ tel que $A_3 := T_{21}(\lambda_2)A_1$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}$.
   (d) Déduisez-en qu'il existe des matrices de transvection P_1, P_2, Q_1 et une matrice de dilatation D telles que $A = P_1 P_2 D Q_1$.
2. Donnez un résultat analogue dans le cas où $c = 0$.