# Formule de Grassmann

**Exercice 1.** (Formule de Grassmann). Soient $E$ et $F$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. On veut démontrer la formule suivante :

$$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F).$$

Prenons une base $\mathcal{B}$ de $E \cap F$, qu'on complète en des bases de $E$ et $F$, respectivement notées $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ est une base de $E+F$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_E \cap \mathcal{B}_F$ est une base de $E \cap F$.
3. Démontrer que $\operatorname{card}(\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F) = \operatorname{card}(\mathcal{B}_E) + \operatorname{card}(\mathcal{B}_F) - \operatorname{card}(\mathcal{B}_E \cap \mathcal{B}_F)$, et conclure.

**Exercice 2.** On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $E$ l'espace vectoriel engendré par $e_1, e_2, e_3$ et $F$ celui engendré par $e_4, e_5$. Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F, E+F$.

**Exercice 3.** Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$\vec{u} = (1,0,1,0), \vec{v} = (0,1,-1,0), \vec{w} = (1,1,1,1), \vec{x} = (0,0,1,0) \text{ et } \vec{y} = (1,1,0,-1).$$

Soient $E = \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $F = \operatorname{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Calculer les dimensions respectives de $E, F, E+F$ et $E \cap F$.

**Exercice 4.** Soient

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\right\} \text{ et } F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = z+t\right\}.$$

Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F, E+F$.

# Calcul matriciel

**Exercice 5.** On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer $AB$, $BC$, $(AB)C$, et $A(BC)$. Que remarque-t-on ?

**Exercice 6.** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

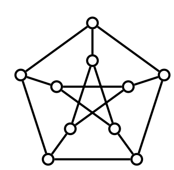
Calculer $AB$ puis $BA$. Que remarque-t-on ?

**Exercice 7.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Calculer $B^2$ et $B^3$. En déduire la valeur de $B^n$, pour tout entier naturel $n$.
2. Pour tout entier naturel $n$, calculer $(B + I_3)^n$ (on utilisera la formule du binôme).
3. En déduire $A^n$ pour tout entier naturel $n$.

**Exercice 8.** Soit $A$ la matrice d'adjacence d'un graphe $G$ à $n$ sommets, sans boucles et sans arêtes multiples. La matrice $A$ est carrée de taille $n$, de coefficients 0 ou 1, avec $A_{i,j} = 1$ si et seulement si $i$ et $j$ sont reliés par une arête.

1. Montrez que le coefficient $(i, j)$ de $A^2$ est égal au nombre de chemins de longueur 2 du graphe allant de $i$ à $j$ (où un chemin est une succession d'arêtes, et sa longueur est le nombre d'arêtes parcourues).
2. Généralisez cette interprétation à $A^k$, $k \geq 3$.
3. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dessinez le graphe dont $A$ est la matrice d'adjacence, puis calculez $A^2$ et $A^3$ en vous aidant du graphe.
4. Soit $A$ la matrice d'adjacence du graphe suivant (appelé le *graphe de Petersen*) :



Démontrez, en utilisant l'interprétation en termes de chemins, que
$$A^2 + 2A - 2I = J$$
où $J$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

**Exercice 9.** Montrez que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

**Exercice 10.** Montrez que le produit de deux matrices carrées diagonales est encore une matrice diagonale, et que le produit de deux matrices carrées triangulaires supérieures est aussi triangulaire supérieure.

**Exercice 11.** Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer le cas échéant leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $AB = AC$. A-t-on $B = C$ ? La matrice $A$ est-elle inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.

**Exercice 13.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 14.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrez que $A$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et que dans ce cas, son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 15.** Calculer les puissances des matrices suivantes ($a$ et $b$ sont des nombres réels ou complexes quelconques)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 16.** Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $U^2$. Quel est le rang de $U$ ? Son noyau ?