Familles libres, familles génératrices, bases.

Exercice 1. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $A = ((2,3,0),(0,1,4))$.
2. $B = ((0,1,-1),(1,2,-1),(0,2,1),(4,6,3))$.
3. $C = ((1,1,0),(2,-1,1),(0,-1,1))$.

Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par chacune de ces familles.

Exercice 2. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Bases ? Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. (x_1, x_2) avec $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$.
2. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (1,1,0)$ et $x_3 = (1,1,1)$.
3. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$.
4. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (2,-1,3)$ et $x_3 = (-1,1,-1)$.

Exercice 3. On considère, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u = (1,1,0)$, $v = (4,1,4)$, $w = (2,-1,4)$.

1. Montrer que les familles (u,v), (u,w) et (v,w) sont libres.
2. La famille (u,v,w) est-elle libre ?

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux vecteurs $u = (1,1,1)$ et $v = (0,1,2)$.

1. La famille (u,v) est-elle libre ? Forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathrm{Vect}(u,v)$.
3. Existe-t-il w tel que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en trouver un.

Exercice 5. Les familles de vecteurs suivantes peuvent-elles être complétées en une base de $\mathbb{R}^4$? Si oui, le faire.

1. (u,v,w), avec $u = (1,2,-1,0)$, $v = (0,1,-4,1)$, $w = (2,5,-6,1)$;
2. (u,v,w), avec $u = (1,0,2,3)$, $v = (0,1,2,3)$, $w = (1,2,0,3)$;
3. (u,v), avec $u = (1,-1,1,-1)$ et $v = (1,1,1,1)$.

Exercice 6. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{K}^3$. Soit $\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 + e_3$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 7. On considère les vecteurs $u = (0,1,1)$, $v = (1,0,1)$, $w = (1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u_1 = (0,\lambda,2)$, $u_2 = (\lambda,3,5)$ et $u_3 = (\lambda,0,1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.
2. Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille (u_1,u_2,u_3) est génératrice.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (x,y,z)$ dans la base $((0,1,2),(1,3,5),(1,0,1))$.

Exercice 9. Soit $(u_1,\dots,u_p,u_{p+1})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, $n \geqslant p+1$. Établir :

1. Si $(u_1,\dots,u_p)$ est libre et $u_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(u_1,...,u_p)$, alors $(u_1,\dots,u_p,u_{p+1})$ est libre.
2. Si $(u_1,\dots,u_p,u_{p+1})$ est génératrice et $u_{p+1} \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ alors $(u_1,...,u_p)$ est génératrice.

Exercice 10. On munit $\mathbb{K}^n$ d'une base $B = (e_1,\dots,e_n)$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \dots + e_i$.

1. Montrer que $B' = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. Exprimer les composantes dans B' d'un vecteur $\mathbb{K}^n$ en fonction de ses composantes dans $\mathcal{B}$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base B_F de F.
2. Compléter B_F en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u = (1,1,1,1)$, $v = (1,2,3,4)$ et $w = (-1,0,-1,0)$. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
4. Soit $G = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Peut-on écrire de façon unique tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Extraits de DS et DST

Exercice 1 (DS mars 2013). Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$ et $v_2 = (1,2,4)$.

1. Montrer que le vecteur $(x,0,1)$ appartient à $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ pour une seule valeur de x à déterminer et calculer λ et μ tels que $(x,0,1) = \lambda v_1 + \mu v_2$.
2. Notant $e_3 = (0,0,1)$, montrer que (v_1, v_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées dans cette base de $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
3. Déterminer trois réels (a, b, c) non tous nuls tels que $v = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si $ax + by + bz = 0$.

Exercice 2 (DS mars 2013). Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Soit $v = (1,1,1)$; montrer que la droite $\mathbb{R}v$ est un supplémentaire de F.
3. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique réel t tel que $u + tv$ appartienne à F.

Exercice 2 (DS mars 2012). Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne les vecteurs suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.
2. Donner une dimension et une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
3. Donner les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base obtenue.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
5. En déduire la dimension de $F + G$.

Exercice 3 (DS mars 2014, légèrement modifié !). Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une base $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et la famille $\mathcal{F}_n = (f_1, ..., f_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ définie par $f_i = e_i + e_{i+1}$ si $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, et $f_n = e_n + e_1$. Par exemple, si $n = 2$, on a $f_1 = f_2 = e_1 + e_2$ et la famille $\mathcal{F}_2$ est liée.

1. Montrer que si $n = 3$, la famille $\mathcal{F}_3$ est libre. Est-elle une base de $\mathbb{K}^n$?
2. Montrer que si $n = 4$, la famille $\mathcal{F}_4$ est liée.
3. Traiter le cas $n \geqslant 5$ quelconque.