1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Exercice 1. Démontrez que l'ensemble $E = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2. Démontrez que l'ensemble $E = \{(a, b, 0, a) \mid a \in \mathbb{C},\, b \in \mathbb{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$.

Exercice 3. Dans les cas suivants, décidez, en le justifiant, si v est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots$:

1. $v = (3, 1, -4)$, $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (0, 1, -1)$.
2. $v = (1, 1, 1, -1)$, $e_1 = (1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (0, 1, 3, 0)$, $e_3 = (0, 0, 4, 1)$.
3. $v = (1, 2, 3, 4)$, $e_1 = (1, -1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, -1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, -1)$, $e_4 = (1, 0, 0, -1)$
4. $v = (0, 0, 0)$, $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (3, 2, 1)$, $e_3 = (12, 24, 36)$.

Exercice 4. Dans les cas suivants, décidez, en le justifiant, si v appartient au sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$:

1. $v = (20, -51, 112)$, $E = \mathrm{vec}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$
2. $v = (0, 0, 0, 0)$, $E = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$
3. $v = (0, 1, 2, 3, 4)$, $E = \mathrm{vec}((0, 1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, -1))$
4. $v = (1, j, j^2)$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Exercice 5. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_2 = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{vec}(e_1, e_2)$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{vec}(e_1, e_2)$?

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} \\ G &= \mathrm{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} \end{aligned}$$

Exercice 7. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 8. Dans $\mathbb{C}^n$, montrez que les deux sous-espaces vectoriels suivants sont égaux :

$$E = \{v = (v_1, \ldots, v_n) \mid \sum_{i=1}^{n} v_i = 0\}$$
$$F = \mathrm{vec}((1, -1, 0, \ldots, 0), (1, 0, -1, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0, -1))$$

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$E = \{v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \mid v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \text{ et } v_2 + 2v_3 + 3v_4 = 0\}$$
$$F = \mathrm{vec}((1, 2, 0, 0), (1, -1, -1, 1))$$

1. Rappelez pourquoi on a les inclusions $E \cap F \subset E \subset E + F$, $E \cap F \subset F \subset E + F$.
2. Trouvez un élément qui appartient à E mais pas à $E \cap F$.
3. Trouvez un élément qui appartient à F mais pas à $E \cap F$.
4. Trouvez un élément de $E + F$ qui n'est pas dans E ni dans F.