Inversibilité de $1 - ba$ en fonction de celle de $1 - ab$.

Bruno Winckler

Soit A un anneau non supposé commutatif, et a, b deux éléments non nuls de cet anneau, en supposant $a \neq b$. Supposons que $1 - ab$ soit inversible. Une question gênante pour les jeunes étudiants en algèbre est de prouver que $1 - ba$ est également inversible, sous telle condition.

Les plus rusés d'entre eux, qui auront peut-être quelques notions d'analyse, se diront que comme $1 - ab$ est inversible, alors, $(1 - ab)^{-1}$ existe. Pour l'instant, pas de piège... Mais alors, en vertu de la formule

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

pourquoi ne pas écrire que

$$(1-ba)^{-1} = 1+ba+(ba)^2+(ba)^3+\cdots = 1+ba+b(ab)a+b(abab)a+\cdots = 1+b(1+ab+(ab)^2+\cdots)a = 1+b(1-ab)^{-1}a,$$

après tout ? Vu qu'il n'y a pas de notion de convergence, *a priori*, dans l'anneau A qui est quelconque, on devrait taper sur les doigts de l'étudiant. Pire, on ne devrait pas avoir le droit de calculer $(1 - ba)^{-1}$ si on n'a pas prouvé son existence !

Pourtant, on peut calculer $(1 - ba)(1 + b(1 - ab)^{-1}a)$, pour obtenir :

$$(1-ba)(1+b(1-ab)^{-1}a) = (1-ba)+b(1-ab)^{-1}a-bab(1-ab)^{-1}a = 1-ba+b(1-ab)(1-ab)^{-1}a = 1-ba+ba = 1,$$

et de même pour $(1 + b(1 - ab)^{-1}a)(1 - ba)$. On tient donc bien là un inverse de $1 - ba$! On peut se demander si ce n'est pas un coup de chance, et si l'approche peut être rendue rigoureuse. Pour espérer y parvenir, on doit se placer dans un contexte où l'identité

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

a un sens. Comme l'anneau A est quelconque, on doit se placer dans un anneau de séries formelles ou de Laurent. En fait, plutôt que de travailler avec $A((X))$, il suffit de se limiter à $\mathbb{Z}\langle\langle a, b\rangle\rangle((X))$, où $\mathbb{Z}\langle\langle a, b\rangle\rangle$ est l'anneau libre engendré par les « lettres » a et b.

Mais pour faire intervenir l'indéterminée X, il faut un peu généraliser ce qui est demandé. En fait, on va prouver le résultat suivant :

Proposition 1 *On a, dans l'anneau* $\mathbb{Z}\langle\langle a, b\rangle\rangle((X))$ *:* $(X - ba)^{-1} = X^{-1} + X^{-1}b(X - ab)^{-1}a$.

Pour $X = 1$, on obtient le résultat annoncé. On remarque qu'en fait, avoir le résultat général de la proposition et le résultat pour $X = 1$ est équivalent : passer du cas $X = 1$ au cas général s'obtient par « renormalisation » de a et b.

Preuve. Dans ce contexte, tout devient facile :

$$(X-ba)^{-1} = X^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty} X^{-n-1}(ba)^n = X^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} X^{-n-1}b(ab)^n a\right) = X^{-1}(1+b(X-ab)^{-1}a).\square$$

Alors, imagions qu'on puisse poser $X = 1$. Le résultat serait alors vrai dans A, grâce à l'injection triviale $\mathbb{Z}\langle\langle a, b\rangle\rangle \hookrightarrow A$. La même méthode permet de prouver l'identité

$$(1 + x)(1 - yx)^{-1}(1 + x) = (1 + y)(1 - xy)^{-1}(1 + x),$$

mais pour des raisons d'« homogénéité » il faut calculer $(X + x)(X^2 - yx)^{-1}(X + x)$.

Comme me l'a fait remarquer M. Beck (`http://people.math.jussieu.fr/~beck/`), et comme on peut s'en douter, on ne peut pas vraiment donner de sens à « poser $X = 1$ ». Il existe peut-être un principe qui dit que quand on veut vérifier des relations algébriques (qui font donc intervenir des inverses, produits, racine n-ièmes, *etc.*) entre des séries de Laurent qui ont un sens en évaluant en un élément de l'anneau, alors le résultat évalué est vrai. Mais en attendant, c'est heuristiquement un bon point de départ.